

UNIVERSITE PARIS.DIDEROT (Paris 7) SORBONNE PARIS CITE

École doctorale 386 - Science Mathématiques de Paris Centre

*Laboratoire d'Informatique Algorithmique : Fondements et Applications  
CNRS*

DOCTORAT INFORMATIQUE

Laure DAVIAUD

---

**Comportements Asymptotiques  
des Automates Max-plus et Min-plus**

---

Thèse dirigée par Jean-Éric PIN et Thomas COLCOMBET

*Soutenue le 22 septembre 2014 devant le jury suivant :*

Mikołaj BOJAŃCZYK  
Véronique BRUYÈRE  
Thomas COLCOMBET  
Sylvain LOMBARDY  
Jean MAIRESSE  
Jean-Éric PIN  
Jean-Marc TALBOT  
Marc ZEITOUN

Rapporteur  
Examinatrice  
Directeur de thèse  
Rapporteur  
Examineur  
Directeur de thèse  
Examineur  
Examineur



# Remerciements

---

Je me suis particulièrement appliquée à écrire cette partie, d'une part parce que c'est la partie qui sera la plus lue de ma thèse et d'autre part parce que je vais pouvoir raconter des anecdotes marrantes sur mes camarades thésards ~~et mes directeurs de thèse~~.

Je tiens à commencer par remercier Jean-Éric et Thomas. Je vais abrégier la partie concernant les grandes compétences scientifiques de chacun et les remerciements pour les discussions, recherches et réflexions qu'ils m'ont permis d'avoir pendant ces trois ans, pour me consacrer à un aspect plus personnel. Merci de m'avoir soutenue, supportée même parfois, pendant trois ans, d'avoir toujours été disponibles pour moi, d'avoir répondu à mes mails paniqués les veilles de présentations et de m'avoir rassurée dans mes moments de doute. Vous m'avez encadrée avec tellement de gentillesse et d'attention que je serais bien restée trois ans de plus... à profiter de votre humour, des blagues de Jean-Éric et des jeux de mots de Thomas. Je pense sincèrement que je n'aurais pas pu avoir de meilleurs encadrants que vous.

Je tiens aussi à remercier les membres du jury, Marc, Jean-Marc et Véronique qui nous honorent de leur présence, Sylvain et Mikołaj d'avoir relu si consciencieusement mon mémoire, et tout particulièrement Jean qui a toujours été disponible pour m'expliquer et m'éclairer sur de nombreux points concernant les max-plus.

Je remercie aussi infiniment FRECjunior (marque déposée) : Luc pour avoir fait ma culture ciné et musique (enfin essayé), pour avoir toujours une bonne vanne (sur Charles), pour m'avoir fait profiter de sa grande culture sportive et pour être toujours de bonne humeur ; Sam pour la gentillesse et la patience dont il a fait preuve pendant nos petits déjeuners anglais ; Denis, notre hippie préféré, pour sa cool-attitude, sa gentillesse et pour avoir formé Thomas au rôle de directeur de thèse ; Nathanaël pour sa sympathie, sa disponibilité et pour être toujours prêt à apporter son aide et Arthur toujours dispo pour rendre service. Je remercie enfin Lorijn pour la touche d'élégance, de douceur, de raffinement qu'elle a amenée parmi cette bande de brutes.

J'en profite aussi pour remercier FRECsenior : Olivier, May, Pascal, re-Marc... ainsi que mon co-auteur Florian.

Par contre, je NE remercie SURTOUT PAS un certain C. P. (alias l'homme papier) pour (la liste de ses exploits est longue) :

- avoir débarqué dans mon bureau n'importe quand, parfois quinze fois pas jour,

pour me parler de trucs auxquels je n'ai rien compris (une histoire de circuits,... je crois),

- avoir laissé des messages sur mon répondeur à n'importe quelle heure en me disant qu'il devait me parler d'urgence pour finalement me dire qu'il avait peut-être fini sa preuve (urgence ?),
- nous avoir volé notre canapé,
- s'être perdu avec moi dans la halle aux farines (20 min pour rejoindre deux amphis voisins) et dans le brouillard au ski (Champéry, école d'hiver de GAMES, si si on travaille!),
- avoir fait rire tout le monde quand pour son tout premier cours, il s'est trompé et a fait une heure de cours au lieu de deux (ce sont ses élèves qui étaient contents),
- être toujours là quand j'ai besoin de lui.

Ces trois années au LIAFA ont également été aussi agréables grâce à toute la bande de thésards avec qui on a bien rigolé : Élie, Virginie, Irène, Jérémie, Axel, Antoine, Bruno, Jehanne, Timo, Adeline, Heger, Sandrine, François, Jad, Nathanaël, Vincent, et j'en ai sûrement oublié... Merci à mes collègues de bureau pour m'avoir permis d'accrocher au mur mon poster du stade toulousain : Xavier (toujours présent pour résoudre mes problèmes d'ordi), Marc (toujours présent pour se moquer de moi parce que je ne sais pas résoudre mes problèmes d'ordi toute seule), Nans, Sven, Christian, Loïc, André, Antoine et sa zoologie. On n'aura jamais résolu le mystère des feuilles avec nos prénoms (mais l'un de nous est forcément coupable).

Merci aux filles informaticiennes et mathématiciennes Mahsa, Aiswarya, Aurélie, Émilie, Nina, Tiphaine qui sont des amies géniales et merci aux garçons aussi même s'ils sont tellement plus nombreux que je ne peux pas tous les citer (Arthur, Camille, Vincent, Clément...).

Je remercie également Nathalie, Noëlle, Laifa et Houy sans qui le labo ne tournerait pas.

Merci à mes parents et mon frère, qui (soyons honnêtes) ne comprennent absolument rien à ce que je fais, mais qui m'aiment quand-même et m'écoutent attentivement aujourd'hui en essayant de ne pas s'endormir. Vous avez toujours été présents pour moi, m'avez toujours soutenue et si je suis là aujourd'hui c'est grâce à vous.

Enfin, merci à la seule personne qui a vu toutes les répétitions de toutes mes présentations (y compris celle d'aujourd'hui, 4 fois en 2 jours, le pauvre...), mon merveilleux mari. Merci de m'avoir soutenue ces derniers mois (et tous les autres mois en fait) et d'être là tout simplement.

Je vais arrêter là sinon on va croire que j'ai passé plus de temps à écrire les remerciements que le reste de ma thèse. Pour ceux qui auront le courage de tourner la page et de continuer à lire, je serais ravie de discuter de mes travaux avec vous, et pour les autres, ben..., je serais quand-même ravie de discuter avec vous de ce que vous voulez.

Merci encore à tous.



# Table des matières

---

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Automates min-plus et max-plus</b>	<b>15</b>
1.1 Définition graphique . . . . .	16
1.2 Définition matricielle . . . . .	23
1.3 Extensions . . . . .	26
<b>2 Comportements des fonctions</b>	<b>31</b>
2.1 Décidabilité de l'existence de bornes . . . . .	32
2.2 Indécidabilité de la comparaison . . . . .	33
2.3 Cas des poids négatifs . . . . .	36
2.4 Extensions de l'indécidabilité de la comparaison . . . . .	37
2.5 Domination affine . . . . .	39
2.6 Affiner la description des fonctions . . . . .	40
<b>3 Approximation du rapport fonction-longueur</b>	<b>45</b>
3.1 Approximation du rapport fonction-longueur . . . . .	46
3.2 Comparaison approchée avec la longueur . . . . .	48
3.3 Comparaison approchée . . . . .	51
<b>4 Équivalence asymptotique</b>	<b>55</b>
4.1 Le théorème d'équivalence asymptotique . . . . .	56
4.2 Application au temps de calcul d'un programme . . . . .	61
<b>5 Une même structure de preuve</b>	<b>65</b>
5.1 Matrices pondérées . . . . .	66
5.2 Approximation et ensembles présentables . . . . .	68
5.3 Théorème des forêts de factorisation de Simon . . . . .	71
5.4 Induction et preuve des théorèmes 3.1.1 et 4.1.1 . . . . .	71
5.5 Matrices uniformes . . . . .	75

<b>6</b>	<b>Approximation du rapport fonction-longueur : preuve</b>	<b>83</b>
6.1	Approximation . . . . .	84
6.2	Ensembles présentables . . . . .	86
6.3	Produit simple . . . . .	86
6.4	Produit idempotent . . . . .	90
6.4.1	Structure et preuve de la propriété 5.4.2 . . . . .	91
6.4.2	Approximer les petits produits : preuves des propositions 6.4.2 et 6.4.3 . . . . .	94
6.4.3	Produit de matrices uniformes : preuve de la proposition 6.4.1 . . . . .	97
6.4.4	Extraire des produits de matrices uniformes : preuve de la proposition 6.4.4 . . . . .	102
<b>7</b>	<b>Équivalence asymptotique : preuve</b>	<b>107</b>
7.1	Approximation . . . . .	108
7.2	Ensembles présentables . . . . .	112
7.3	Produit simple . . . . .	117
7.4	Produit idempotent . . . . .	119
7.4.1	Réduire le problème au cas des matrices uniformes . . . . .	119
7.4.2	Du produit de matrices uniformes au produit d'une seule matrice . . . . .	122
7.4.3	Itération d'une unique matrice . . . . .	125
<b>8</b>	<b>Comparaison approchée et domination affine : preuves</b>	<b>129</b>
8.1	Chemins d'un automate min-plus . . . . .	130
8.2	Preuve du théorème de domination affine . . . . .	131
8.3	Preuve du théorème de comparaison approchée . . . . .	132
	<b>Conclusion</b>	<b>135</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>137</b>

# Introduction

---

Ce mémoire a pour objet l'étude des automates min-plus et des automates max-plus et la description des fonctions qu'ils calculent.

## Des automates finis aux automates pondérés

L'informatique théorique porte sur l'étude de modèles de calcul dont il s'agit de décrire le comportement et les propriétés. Ces modèles sont notamment utilisés pour la spécification et la vérification de programmes. En connaître les propriétés permet à la fois de s'assurer de leur bon comportement mais aussi de minimiser le temps et la quantité de ressources nécessaires pour faire un calcul.

Un des modèles de calcul les plus simples est le modèle des automates finis non déterministes. Il s'agit d'un modèle abstrait de machine qui prend en entrée un mot sur un alphabet fini et l'accepte ou le rejette. La théorie des automates finis, initiée dans les années 1950 [33, 45] est très riche et a été largement étudiée. Elle a de nombreux intérêts : les automates finis sont déterminisables, la classe des langages qu'ils définissent, les langages rationnels, a de bonnes propriétés de clôture et de décidabilité et il en existe des équivalents logiques et algébriques [27, 8, 46].

Néanmoins, le comportement d'un automate sur un mot est une notion purement qualitative : le mot est accepté ou rejeté. On voit alors assez vite la nécessité d'ajouter une dimension quantitative. Que faire, par exemple, si on veut compter le nombre de chemins acceptants étiquetés par un mot donné ?

Les automates min-plus et max-plus et de manière générale les automates pondérés (ou automates à multiplicités) sont une manière d'ajouter cette dimension quantitative aux automates en pondérant les transitions. Ils ont été introduits par Schützenberger dans [47], et généralisés dans [16]. On pourra se reporter à [46, 14, 13, 6]. L'idée d'un automate pondéré est d'associer à chaque mot, non plus une valeur booléenne, mais une valeur dans un ensemble donné, par exemple l'ensemble des entiers ou celui des réels. Plus précisément, un automate pondéré calcule une fonction de l'ensemble des mots dans un semi-anneau.

D'autres extensions quantitatives des automates finis existent dont certaines qui étendent les automates min-plus et max-plus : la théorie des fonctions de coût [9, 10],

les automates à registres [1, 2] et les automates « desert » [4, 29, 5, 31] et « nested distance desert » [30] en sont des exemples.

## Automates min-plus et automates max-plus

Les automates min-plus et les automates max-plus sont des automates finis non déterministes dont chaque transition est pondérée. En fonction du contexte, ces poids peuvent être des valeurs entières, rationnelles ou réelles, positives ou négatives. Dans ce mémoire, nous considérerons des pondérations entières positives.

L'idée d'un automate min-plus est donc de mettre un coût, représenté par un entier positif, sur chaque transition. Le long d'un chemin les coûts des transitions s'additionnent. On choisit ensuite le chemin de coût minimal. De même pour un automate max-plus, il s'agit de mettre un gain sur chaque transition. Quand on parcourt un chemin, on additionne les gains, puis on choisit le chemin qui maximise le gain.

Plus précisément, chaque transition de l'automate a un poids, le poids d'un chemin est la somme des poids des transitions qui composent le chemin, un chemin est acceptant s'il commence dans un état initial et se termine dans un état final, et un automate min-plus (resp. max-plus) associe à un mot  $w$  le minimum (resp. le maximum) des poids des chemins acceptants étiquetés par  $w$ .

Les automates min-plus et max-plus ont des définitions similaires, l'idée étant juste d'échanger les opérateurs min et max. Cependant, le fait de considérer des poids entiers positifs peut rendre les problèmes asymétriques. Certains résultats seront plus faciles à montrer dans un cas que dans l'autre ou seront tout simplement vrais dans un cas et pas dans l'autre.

Néanmoins, le parti pris dans ce mémoire est de traiter en parallèle les automates min-plus et les automates max-plus. Cela obligera à une certaine gymnastique pour le lecteur au début, mais cela permettra de mettre en avant les similarités des définitions et des résultats. Si une propriété est valable dans un seul des deux cas, cela sera clairement précisé.

Les automates min-plus ont été introduits par Simon en 1978 [48], pour répondre au problème de la puissance finie :

*Étant donné un langage rationnel  $L$ , existe-t-il un entier  $k$  tel que  $L^* = L^k$  ?*

Différentes approches de cette question peuvent être trouvées dans [20] et [28]. L'idée, pour décider ce problème, est de construire un automate min-plus qui, étant donné un mot  $w \in L^*$ , calcule le plus petit entier  $k$  tel que  $w \in L^k$ . Le problème revient alors à se demander si la fonction calculée par l'automate est bornée.

D'autres questions sur les langages rationnels ont requis l'utilisation des automates min-plus. Le problème de la hauteur d'étoile :



*Étant donné un langage rationnel, et un entier  $k$ , existe-t-il une expression rationnelle (n'utilisant que l'union, la concaténation et l'étoile) de hauteur d'étoile au plus  $k$  représentant ce langage ?*

a été posé par Eggan dans [15], et résolu par Hashiguchi dans [22, 23]. Une preuve simplifiée et améliorée a été donnée par Kirsten dans [30].

Le problème de la complexité non-déterministe (essentiellement compter le nombre de choix non-déterministes faits par un automate sur la lecture d'un mot) a été proposé par Simon dans [51]. Une vue d'ensemble de ces problèmes est donnée dans [49].

On pourra se reporter à [40] pour une vue d'ensemble des résultats concernant le comportement des automates max-plus.

Les automates min-plus et max-plus ont ainsi des applications à la théorie des langages formels. Ils ont également des applications dans des problèmes d'optimisation et de vérification, de description des systèmes à événements discrets [17, 19] et de reconnaissance automatique du langage [43].

La propriété de la puissance finie revient à se poser la question de l'existence de bornes pour un automates min-plus. Plus généralement, ce mémoire porte sur l'étude du comportement des fonctions calculées par automates min-plus et max-plus.

## Comportement des fonctions calculées par automates min-plus et max-plus

Résoudre les problèmes mentionnés ci-dessus pose la question du comportement des fonctions calculées par automates min-plus et max-plus : existence de bornes, équivalence, comparaison... Mais avant d'aborder ces questions, une question naturelle est celle de la déterminisation.

**Déterminisation.** Si on enlève les poids sur les transitions d'un automate min-plus ou max-plus, on obtient un automate fini non déterministe. On dit alors qu'un automate min-plus (resp. max-plus) est déterministe si l'automate sans les poids l'est. Dans ce cas, puisqu'un seul chemin acceptant est étiqueté par un mot donné  $w$ , le calcul sur  $w$  ne fera pas intervenir les opérateurs min et max, ce qui simplifie grandement les problèmes. Mais, contrairement aux automates finis, il n'existe pas nécessairement d'automate min-plus ou max-plus déterministe calculant la même fonction qu'un automate donné. La question de décider si, étant donné un automate min-plus ou max-plus, il existe un automate déterministe calculant la même fonction est une question ouverte. Ce problème a été montré décidable dans le cas particulier où l'automate de départ est polynomialement ambigu [32, 34].

**Existence de bornes.** Les automates min-plus et max-plus calculent des fonctions de l'ensemble des mots dans l'ensemble des entiers positifs auquel est ajoutée une valeur

infinie. La première question concernant leur comportement est de savoir si une telle fonction est bornée. Ce problème est décidable. Il est facile de le prouver dans le cas des automates max-plus, et la complexité pour décider ce problème dans ce cas-là est polynomiale. Par contre, le cas des automates min-plus est plus difficile et a engendré de nombreux travaux [38, 52, 25, 39] qui simplifient les preuves originales [21, 24]. Du point de vue de la complexité, le problème de l'existence de bornes pour un automate min-plus est PSPACE-complet.

**Décidable :** *Étant donnée  $f$  calculée par un automate min-plus (resp. max-plus), existe-t-il un réel  $a$  tel que  $0 \leq f \leq a$  ?*

**Équivalence et comparaison de fonctions.** Une autre question est de détecter si deux automates calculent la même fonction, et plus généralement, de comparer deux fonctions calculées par automates min-plus (resp. max-plus). A-t-on  $f = g$  ? Ou encore  $f \leq g$  (c'est-à-dire pour tout mot  $w$ ,  $f(w) \leq g(w)$ ) ? Ces problèmes ont été montrés indécidables par Krob en 1992 [35] par réduction du dixième problème de Hilbert. Plus récemment, une preuve par réduction du problème de l'arrêt d'une machine à deux compteurs a été donnée par Colcombet. Néanmoins se restreindre à des automates finiment ambigus rend les problèmes décidables [26, 53].

**Indécidable :** *Étant données  $f, g$  calculées par automates min-plus (resp. max-plus), a-t-on  $f \leq g$  ?*

**Domination polynomiale.** Le théorème de domination polynomiale est un théorème démontré dans le cadre plus général des fonctions de coût, et que l'on peut donc appliquer au cas particulier des automates min-plus et max-plus. Bien que la comparaison précise entre deux fonctions ne soit pas décidable, si on accepte de relâcher un peu les hypothèses et de considérer une définition moins stricte pour la comparaison alors on bascule dans la décidabilité. Plus précisément, il s'agit de se donner une marge d'erreur polynomiale. Étant données des fonctions  $f$  et  $g$  calculées par automates min-plus (resp. max-plus) le problème de savoir s'il existe un polynôme  $P$  tel que  $f \leq P \circ g$  est décidable [9].

**Décidable :** *Étant données  $f, g$  calculées par automates min-plus (resp. max-plus), existe-t-il un polynôme  $P$  tel que  $f \leq P \circ g$  ?*

## Question posée et contribution

Même si le modèle des automates min-plus et max-plus est assez simple, le fait de rajouter des poids sur les transitions d'un automate fini rend les questions plus difficiles et on se heurte rapidement à l'indécidabilité.

En ce qui concerne la comparaison de fonctions, on se retrouve entre deux problèmes : l'indécidabilité de la comparaison précise et la décidabilité de la comparaison

avec marge d'erreur polynomiale. La question qui se pose alors est de savoir où se situe la frontière de décidabilité entre ces deux problèmes, et jusqu'à quel point on peut être précis pour comparer deux fonctions.

Le problème de la comparaison de fonctions reste indécidable si on se restreint à la fonction qui à un mot associe sa longueur [35]. Plus précisément :

**Min-Plus :** *Étant donnée  $f$  calculée par un automate min-plus, le problème de savoir si pour tout mot  $w$ ,  $f(w) \leq |w|$  est un problème indécidable.*

**Max-Plus :** *Étant donnée  $f$  calculée par un automate max-plus, le problème de savoir si pour tout mot  $w$ ,  $|w| \leq f(w)$  est un problème indécidable.*

Plaçons nous dans le cas des automates min-plus et considérons la fonction qui, à un entier  $n$ , associe la plus grande valeur d'un mot de longueur au plus  $n$  :

$$g_{\max}(n) = \max_{|w| \leq n} f(w)$$

où  $f$  est la fonction calculée par l'automate.

D'une part, par le résultat d'indécidabilité précédent, il est indécidable de savoir si pour tout  $n$ ,  $g_{\max}(n) \leq n$ . D'autre part, la décidabilité de l'existence de bornes pour un automate min-plus montre qu'on peut décider si  $g_{\max}$  est bornée. La question posée dans ce mémoire concerne la description de la fonction  $g_{\max}$ .

Comparer une fonction calculée par un automate min-plus avec la longueur revient donc à étudier le comportement de la fonction  $g_{\max}$ . Plus la description de la fonction  $g_{\max}$  sera précise, plus la comparaison sera précise. Ainsi, la description de la fonction  $g_{\max}$  est une question intéressante dans l'étude du comportement des fonctions calculées par automates min-plus. La réciproque de cette fonction (fonction qui à un entier  $n$  associe la longueur du mot le plus long dont le poids ne dépasse pas  $n$ ) a été introduite par Simon dans [51].

De manière similaire, pour un automate max-plus, il convient d'introduire la fonction qui à un entier  $n$  associe la plus petite valeur d'un mot de longueur au moins  $n$  :

$$g_{\min}(n) = \min_{|w| \geq n} f(w)$$

où  $f$  est la fonction calculée par l'automate.

Les deux contributions principales du mémoire concernent le comportement de ces fonctions.

**Théorème d'approximation du rapport fonction-longueur.** Le premier résultat donne un algorithme qui, étant donné  $\varepsilon > 0$ , calcule à  $\varepsilon$ -près la valeur :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{g_{\max}(n)}{n}$$

pour un automate min-plus, et

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{g_{\min}(n)}{n}$$

pour un automate max-plus. (Il est impossible de calculer ces valeurs de manière exacte.)

**Théorème d'équivalence asymptotique.** Le deuxième résultat se place dans le cadre des automates max-plus. Il donne un algorithme calculant un rationnel  $\alpha$  tel que :

$$g_{\min}(n) = \Theta(n^\alpha).$$

Dans [51], Simon propose une hiérarchie des automates min-plus qui montre essentiellement que  $g_{\max}(n)$  est comprise entre une fonction  $O(n^{\frac{1}{p+1}})$  et une fonction  $O(n^{\frac{1}{p}})$  pour  $p$  un entier. Il conjecture dans [49] que  $g_{\max}(n)$  est  $\Theta(n^{\frac{1}{p}})$  pour un entier positif  $p$ .

Ce mémoire montre que l'équivalent de cette question pour les automates max-plus est vrai pour  $p$  un rationnel. Le résultat pour les automates min-plus ne semble pas se déduire directement du cas max-plus mais l'adaptation de la preuve du cas max-plus au cas min-plus est un travail en cours.

Ces deux théorèmes ont deux applications principales.

**Théorème de comparaison approchée.** Le théorème d'approximation du rapport fonction-longueur procure un algorithme de comparaison approchée entre deux fonctions calculées par automates min-plus. L'idée est de comparer deux fonctions en laissant une marge d'erreur fixée mais aussi petite que l'on veut. Ce théorème répond à la question initiale concernant la comparaison des fonctions. Il semble que ce soit la comparaison la plus précise qui reste décidable.

Plus précisément, il existe un algorithme, prenant en entrée deux automates min-plus calculant des fonctions  $f$  et  $g$  et un réel strictement positif  $\varepsilon$ , qui répond :

- *oui* si  $f \leq g$  (i.e. pour tout mot  $w$   $f(w) \leq g(w)$ ),
- *non* si  $f \not\leq (1 + \varepsilon)g$  (i.e. s'il existe un mot  $w$  tel que  $f(w) > (1 + \varepsilon)g(w)$ ),
- indifféremment *oui* ou *non* dans les autres cas.

**Temps de calcul d'un programme.** Le modèle de la « size-change abstraction » est un modèle d'abstraction de programme utilisé dans l'analyse de la terminaison [37, 3]. Le théorème d'équivalence asymptotique permet de donner un équivalent asymptotique du temps de calcul de la plus longue exécution en fonction de la taille de l'entrée. Plus précisément, il existe un rationnel  $\beta$  calculable tel que ce temps de calcul soit de l'ordre de  $n^\beta$  où  $n$  est la taille de l'entrée.

## Organisation du mémoire

Comme précisé plus haut, les cas min-plus et max-plus vont être traités en parallèle dans tout le mémoire. De plus, il s'agira aussi de voir si les résultats restent valables avec l'ajout de poids négatifs.

Le chapitre 1 et le début du chapitre 2 font un état des lieux des définitions et résultats et ne contiennent aucune contribution personnelle. Les résultats et preuves sont exposés à partir de la fin du chapitre 2.

**Chapitre 1.** Le chapitre 1 expose les définitions, exemples et premières propriétés des automates min-plus et max-plus. Les preuves élémentaires y sont très détaillées pour se familiariser avec ce modèle. Il y est fait le lien avec les langages réguliers et les différentes extensions qui généralisent les automates min-plus et max-plus. Ce chapitre ne peut bien sûr pas être exhaustif, il introduit ainsi uniquement les notions utiles pour la suite.

**Chapitre 2.** Le chapitre 2 se focalise plus précisément sur le comportement des fonctions calculées, en énonçant les résultats de décision sur l'existence de bornes et la comparaison de fonctions. Il y est fait un état des lieux assez complet sur ces questions, en considérant les automates max-plus et min-plus avec des pondérations entières positives mais aussi les cas où des pondérations négatives sont utilisées. La première partie de ce chapitre permet d'avoir une vue d'ensemble sur les résultats existants.

La deuxième partie de ce chapitre donne des premières contributions qui précisent la frontière entre l'indécidabilité de la comparaison de fonctions et la décidabilité de la comparaison avec marge d'erreur polynomiale. Ainsi, des variantes de la comparaison, moins strictes, mais qui restent indécidables y sont énoncées. À l'inverse, le **théorème de domination affine** donne une comparaison décidable plus précise que la comparaison avec marge d'erreur polynomiale.

La dernière section du chapitre 2 énonce les questions posées, les caractéristiques des automates considérées et les raisons de ces choix.

**Chapitre 3.** Le chapitre 3 énonce le **théorème d'approximation du rapport fonction-longueur**, et donne son application à la **comparaison approchée** de deux fonctions.

**Chapitre 4.** Le chapitre 4 énonce le **théorème d'équivalence asymptotique** et donne son application au calcul du temps de la plus longue exécution dans le modèle de la « size-change abstraction ».

La suite du mémoire est consacrée aux preuves de ces deux théorèmes dont les structures sont très similaires.

**Chapitre 5.** Le chapitre 5 donne la structure générale commune aux deux preuves. L'idée est de représenter de manière finie et le plus précisément possible le comportement d'une fonction calculée par un automate min-plus ou un automate max-plus. Un automate min-plus (resp. max-plus) peut être représenté par un ensemble fini de matrices et le comportement sur tous les mots par le semi-groupe engendré par cet ensemble fini, où le produit matriciel est défini à partir des lois min et + (resp. max et +). Ainsi, dans les deux preuves, il s'agit essentiellement d'approximer la clôture par produit d'un ensemble fini de matrices par un ensemble finiment représentable. Pour cela on utilise le théorème des forêts de factorisation de Simon [50], qui permet de simplifier la structure des matrices considérées. Ce chapitre permettra de montrer que l'on peut se ramener à faire deux types de calcul : le produit de deux ensembles de matrices et la clôture par produit d'un ensemble de matrices ayant une même structure simplifiée. Ces produits seront approximés par des ensembles dits *finiment représentables*. Les notions exactes d'approximation et d'ensembles représentables dépendront du théorème que l'on veut démontrer et seront précisées dans les deux chapitres qui suivent.

Les deux chapitre suivants utilisent des idées introduites par Hashiguchi, Leung et Simon pour calculer l'itération de matrices.

**Chapitre 6.** Le chapitre 6 donne la preuve du théorème d'approximation du rapport fonction-longueur. La clôture par produit d'un ensemble fini de matrices y sera approximé par un ensemble fini de « droites » du type  $\{kM \mid k \in \mathbb{N}\}$  où  $M$  est une matrice fixée.

**Chapitre 7.** Le chapitre 7 donne la preuve du théorème d'équivalence asymptotique. On y introduira la notion de polytopes de matrices. La clôture par produit d'un ensemble fini de matrices y sera ainsi approximée par une union finie de polytopes de matrices.

**Chapitre 8.** Enfin, le chapitre 8 donne les preuves des théorèmes de domination affine et de comparaison approchée énoncés aux chapitres 2 et 3. Les preuves de ces deux théorèmes utilisent la même idée et des outils introduits dans les chapitres précédents.

Tout ce qui concerne le théorème d'approximation du rapport fonction-longueur vient de [11] et ce qui concerne le théorème d'équivalence asymptotique vient de [12].

## Pré-requis et notations

On suppose connu les notions d'alphabets, de mots, de langages ainsi que la théorie des langages réguliers, les automates finis, et les résultats usuels les concernant. On utilisera les notations standards  $\mathbb{N}$  pour l'ensemble des entiers naturels et  $|w|$  pour la longueur du mot  $w$ . Les autres notations seront précisées en début de chaque chapitre.

# Chapitre 1

---

## Automates min-plus et max-plus

Ce mémoire porte sur l'étude des automates min-plus et max-plus et des fonctions qu'ils calculent. Ce premier chapitre a pour objet de présenter ces deux modèles et de les situer parmi les différents modèles de calculs.

Les automates min-plus et les automates max-plus étendent les automates finis non déterministes en y ajoutant une dimension quantitative. Alors qu'un automate fini accepte ou rejette un mot, c'est-à-dire qu'à un mot est associée une valeur booléenne, un automate min-plus ou max-plus associe à chaque mot une valeur numérique en pondérant les transitions de l'automate.

De manière générale, ces poids associés aux transitions de l'automate peuvent être des valeurs réelles, rationnelles, ou entières, positives ou négatives. Dans ce mémoire, nous considérerons des poids dans l'ensemble des entiers naturels. Les définitions données dans la suite sont dans ce cadre. Nous discuterons des autres variantes en fonction des différentes notions abordées. Le passage des entiers naturels aux rationnels ou aux réels positifs ne changera pas fondamentalement les résultats obtenus, par contre l'ajout de valeurs négatives fera souvent basculer des problèmes décidables dans l'indécidabilité.

**Organisation du chapitre.** Ce chapitre présente tout d'abord deux définitions équivalentes des automates min-plus et max-plus et des fonctions qu'ils calculent.

La première, sous forme de graphes, étend la notion d'automates finis non déterministes. Elle est donnée dans la section 1.1, dans laquelle sont également développés les liens entre les langages réguliers et les fonctions calculées par automates min-plus et max-plus.

La deuxième, matricielle, permet l'utilisation d'outils de la théorie des semi-groupes. Elle est donnée dans la section 1.2. On y explicite aussi l'équivalence entre les deux définitions.

Enfin, la section 1.3 précise le contexte général et les liens entre différents modèles qui sont des extensions des automates min-plus et max-plus.

Ce chapitre est très détaillé afin de familiariser (en douceur) le lecteur à ces notions.

## 1.1 Définition graphique

Les automates min-plus et max-plus ont une même syntaxe, ce sont des automates finis non déterministes dont chaque transition est étiquetée par une lettre et un poids. L'utilisation du min ou du max apparaît dans la sémantique de ces automates, et dans la définition des fonctions qu'ils permettent de calculer.

**Définition 1.1.1** (syntaxe des automates min-plus et max-plus).

Un **automate min-plus** (resp. **max-plus**) est un 5-uplet  $(\mathbb{A}, Q, I, F, T)$  où :

- $\mathbb{A}$  est un alphabet fini,
- $Q$  est un ensemble fini d'états,
- $I \subseteq Q$  est l'ensemble des états initiaux,
- $F \subseteq Q$  est l'ensemble des états finaux,
- $T \subseteq Q \times \mathbb{A} \times \mathbb{N} \times Q$  est l'ensemble des transitions. Chaque transition est donc étiquetée à la fois par une lettre et par un entier positif appelé **poids de la transition**.

**Notations.** La transition de l'état  $p$  vers l'état  $q$  étiquetée par la lettre  $a$  de poids  $n$  pourra être notée  $p \xrightarrow{a:n} q$ .

**Exemple 1.1.1.**

L'automate de la figure 1.1 représente un automate min-plus (ou max-plus) à quatre états sur l'alphabet  $\{a, b\}$ . Les états initiaux sont notés par des flèches entrantes, ici  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$ , et les états finaux par des flèches sortantes, ici  $q_1$ ,  $q_3$  et  $q_4$ . La figure 1.2 représente un automate min-plus (ou max-plus) à un seul état.

Un automate min-plus (resp. max-plus) calcule une fonction de l'ensemble des mots dans l'ensemble des entiers naturels auquel est ajoutée une valeur infinie. Le poids associé à un chemin est la somme des poids des transitions qui composent ce chemin et la valeur associée à un mot est essentiellement le minimum (resp. le maximum) des poids des chemins étiquetés par ce mot.

Les automates min-plus calculent ainsi des coûts : prendre une transition a un certain coût, ces coûts s'additionnent le long d'un chemin, et le chemin choisi est bien sûr celui qui minimise le coût.

De même, les poids sur les transitions des automates max-plus peuvent être considérés comme des gains, le but étant de maximiser le gain en choisissant le chemin qui rapporte le plus.



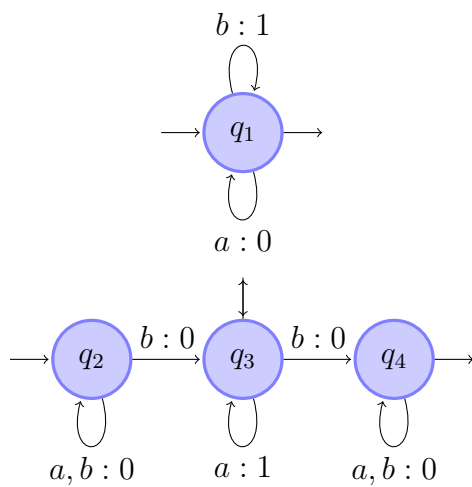


FIGURE 1.1 – Automate min-plus (resp. max-plus).

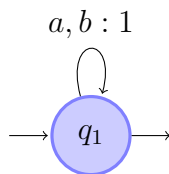


FIGURE 1.2 – Automate min-plus (resp. max-plus) à un état.

**Définition 1.1.2** (sémantique des automates min-plus et max-plus).

Le **poids d'un chemin** dans un automate min-plus (resp. max-plus) est la somme des poids des transitions qui composent ce chemin.

Un chemin est **acceptant** s'il part d'un état initial et se termine dans un état final.

La **fonction calculée par un automate min-plus** est la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^* &\rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \\ w &\mapsto \min\{ \text{poids de } \rho \mid \rho \text{ est un chemin acceptant étiqueté par } w \} \end{aligned}$$

avec la convention  $\min(\emptyset) = +\infty$ .

De même, la **fonction calculée par un automate max-plus** est la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^* &\rightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\} \\ w &\mapsto \max\{ \text{poids de } \rho \mid \rho \text{ est un chemin acceptant étiqueté par } w \} \end{aligned}$$

avec la convention  $\max(\emptyset) = -\infty$ .

La valeur associée à un mot est appelée **poids** de ce mot.

**Cas du mot vide.** Par convention, le poids du mot vide est 0 s'il existe un état à la fois initial et final et  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) sinon.

**Exemple 1.1.2.**

L'automate de la figure 1.1, vu comme automate min-plus, calcule la fonction qui, à un mot  $a^{n_0}ba^{n_1}b \cdots ba^{n_k}$ , associe la valeur  $\min(n_0, n_1, \dots, n_k, k)$ . En effet, l'état  $q_1$  permet de compter le nombre de  $b$  : sur un chemin allant de  $q_1$  à  $q_1$ , lire un  $b$  ajoute 1 au poids du chemin et lire un  $a$  ajoute 0. Quant aux états  $q_2$  à  $q_4$ , ils permettent de compter la taille des blocs de  $a$  consécutifs. L'état  $q_3$  permet de compter le nombre de  $a$  entre deux  $b$ , entre le début du mot et un  $b$  ou entre un  $b$  et la fin du mot. Par le non déterminisme, le poids du mot est le minimum de toutes ces valeurs. De la même manière, l'automate de la figure 1.1, vu comme automate max-plus, calcule la fonction qui, à un mot  $a^{n_0}ba^{n_1}b \cdots ba^{n_k}$ , associe la valeur  $\max(n_0, n_1, \dots, n_k, k)$ . L'automate de la figure 1.2 calcule la longueur d'un mot (qu'il soit vu comme un automate min-plus ou max-plus).

Les automates min-plus et max-plus sont un modèle plus riche que les automates finis non déterministes. Nous allons voir maintenant comment la théorie des automates min-plus et max-plus étend celle des automates finis.

**Lien avec les langages réguliers.** Tout d'abord, les automates finis non déterministes peuvent être vus comme une sous-classe des automates min-plus et max-plus. En effet, soit  $\mathcal{A}$  un automate fini non déterministe. Considérons l'automate min-plus (resp. max-plus)  $\tilde{\mathcal{A}}$  construit à partir de  $\mathcal{A}$  où chaque transition a poids 0. Alors, un mot est accepté par  $\mathcal{A}$  si et seulement si son poids dans  $\tilde{\mathcal{A}}$  est 0 (dans le cas contraire le poids est  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ )).

D'autre part, le langage des mots qui ont des valeurs finies dans un automate min-plus (resp. max-plus) est un langage régulier. En effet, soit  $\mathcal{A}$  un automate min-plus (resp. max-plus). Construisons un automate fini  $\tilde{\mathcal{A}}$  à partir de  $\mathcal{A}$  en enlevant tous les poids sur les transitions. Alors  $w$  a un poids fini dans  $\mathcal{A}$  si et seulement s'il est accepté par  $\tilde{\mathcal{A}}$ . On appellera ce langage le **langage accepté** par l'automate min-plus (resp. max-plus).

Les deux propositions suivantes précisent un peu plus le lien entre langages réguliers et automates min-plus et max-plus.

**Proposition 1.1.1.**

Étant donné un automate min-plus et un entier positif  $n$ , le langage des mots ayant un poids inférieur à  $n$  est régulier.

Étant donné un automate max-plus et un entier positif  $n$ , le langage des mots ayant un poids supérieur à  $n$  est régulier.

*Démonstration.* Faisons la preuve dans le cas min-plus. Soit  $\mathcal{A}$  un automate min-plus avec  $k$  états,  $q_1, q_2, \dots, q_k$ , sur l'alphabet  $\mathbb{A}$  et  $n$  un entier positif. Nous allons construire un automate fini  $\tilde{\mathcal{A}}$  sur  $\mathbb{A}$  qui reconnaît le langage des mots de poids au plus  $n$  pour  $\mathcal{A}$ . Pour cela, nous allons faire  $n + 1$  copies des états de  $\mathcal{A}$ . Chaque copie  $\ell \leq n$  de l'état  $q$  gardera en mémoire le fait que l'on est sur un chemin qui est arrivé en  $q$  avec poids  $\ell$ . Formellement,  $\tilde{\mathcal{A}}$  a  $k(n + 1)$  états, notés  $q_i^j$  (copie  $j$  de l'état  $q_i$ ) pour  $1 \leq i \leq k$  et  $0 \leq j \leq n$ . Les états initiaux sont les états  $q_i^0$  pour tous les  $i$  tels que  $q_i$  est initial dans  $\mathcal{A}$ . Les états finaux sont tous les états  $q_i^j$  pour  $0 \leq j \leq n$  et  $i$  tels que  $q_i$  est final dans  $\mathcal{A}$ . Il y a une transition de  $q_i^j$  à  $q_{i'}^{j'}$  étiquetée par  $a$  s'il existe une transition dans  $\mathcal{A}$  de  $q_i$  à  $q_{i'}$ , étiquetée par  $a$  de poids  $j' - j$ .

Montrons qu'un mot est accepté par  $\tilde{\mathcal{A}}$  si et seulement s'il est accepté par  $\mathcal{A}$  avec un poids inférieur à  $n$ . Soit un mot  $w$  de poids  $m$  inférieur à  $n$  dans  $\mathcal{A}$ . Alors il existe un chemin de poids  $m$  dans  $\mathcal{A}$  d'un état initial  $q_i$  à un état final  $q_f$  étiqueté par  $w$ . Par construction, il existe alors un chemin de  $q_i^0$  à  $q_f^m$  dans  $\tilde{\mathcal{A}}$  étiqueté par  $w$ . De plus,  $q_i^0$  est initial et  $q_f^m$  est final par définition. Donc le mot  $w$  est accepté par  $\tilde{\mathcal{A}}$ . Inversement, soit un mot  $w$  accepté par  $\tilde{\mathcal{A}}$ . Alors, il existe un chemin dans  $\tilde{\mathcal{A}}$  étiqueté par  $w$ , d'un état initial  $q_i^0$  à un état final  $q_f^m$ . Par construction, il existe alors un chemin de  $q_i$  à  $q_f$  dans  $\mathcal{A}$  de poids  $m$ . De plus, par définition,  $q_i$  est initial, et  $q_f$  est final. Donc il existe un chemin acceptant de poids  $m \leq n$  étiqueté par  $w$  dans  $\mathcal{A}$ . Comme  $\mathcal{A}$  est un automate min-plus, alors  $w$  a un poids inférieur à  $m$  dans  $\mathcal{A}$ .

La preuve dans le cas max-plus est similaire. La  $(n + 1)$ -ième copie des états gardera en mémoire le fait que la valeur  $n$  a été dépassée. En plus des transitions précédentes, il faudra rajouter toutes les transitions de l'automate de départ dans la  $(n + 1)$ -ième copie : il y a une transition de  $q_i^\ell$  à  $q_j^n$  étiquetée par  $a$  s'il existe une transition de  $q_i$  à  $q_j$  étiquetée par  $a$  de poids supérieur à  $n - \ell$ . La seule autre modification à faire est que les états finaux sont maintenant les  $q_i^n$  pour  $1 \leq i \leq k$  tels que  $q_i$  est final.

Ainsi, si un mot  $w$  est de poids  $m$  supérieur à  $n$  dans  $\mathcal{A}$ , alors il existe un chemin de poids  $m$  dans  $\mathcal{A}$  d'un état initial  $q_i$  à un état final  $q_f$  étiqueté par  $w$ . Par construction, il existe alors un chemin de  $q_i^0$  à  $q_f^n$  dans  $\tilde{\mathcal{A}}$  étiqueté par  $w$ . De plus,  $q_i^0$  est initial et  $q_f^n$  est final par définition. Donc le mot  $w$  est accepté par  $\tilde{\mathcal{A}}$ . Inversement, si un mot  $w$  est accepté par  $\tilde{\mathcal{A}}$ . Alors, il existe un chemin dans  $\tilde{\mathcal{A}}$  étiqueté par  $w$ , d'un état initial  $q_i^0$  à un état final  $q_f^n$ . Par construction, il existe alors un chemin de  $q_i$  à  $q_f$  dans  $\mathcal{A}$  de poids  $m \geq n$ . De plus, par définition,  $q_i$  est initial, et  $q_f$  est final. Donc il existe un chemin acceptant de poids  $m \geq n$  étiqueté par  $w$  dans  $\mathcal{A}$ . Comme  $\mathcal{A}$  est un automate max-plus, alors  $w$  a un poids supérieur à  $m$  dans  $\mathcal{A}$ .  $\square$

**Corollaire 1.1.2.**

Étant donné un automate min-plus (resp. max-plus) et un entier positif  $n$ , le langage des mots de poids  $n$  est régulier.

*Démonstration. Cas min-plus :* Pour tout entier  $i \geq 0$ , notons  $L_{=i}$  le langage des mots de poids  $i$  et  $L_{\leq i}$  le langage des mots de poids inférieurs à  $i$ . Alors, pour  $i = 0$ ,  $L_{=0} = L_{\leq 0}$  et pour  $i > 0$ ,  $L_{=i} = L_{\leq i} - L_{\leq i-1}$ , qui est donc régulier par la proposition 1.1.1.

*Cas max-plus :* Pour tout entier  $i \geq 0$ , notons  $L_{=i}$  le langage des mots de poids  $i$  et  $L_{\geq i}$  le langage des mots de poids supérieurs à  $i$ . Alors  $L_{=i} = L_{\geq i} - L_{\geq i+1}$ , qui est donc régulier par la proposition 1.1.1.  $\square$

Pour les automates min-plus ou les automates max-plus, les langages de mots de poids égal, (resp. inférieur, strictement inférieur, supérieur, strictement supérieur) à un entier fixé sont ainsi réguliers (il suffit de prendre des combinaisons booléennes des langages données dans les propositions précédentes). Cependant, ce n'est plus le cas si les poids négatifs sont autorisés.

*Cas de  $\mathbb{Z}$  :* Nous verrons les définitions précises d'automates pondérés sur d'autres ensembles que  $\mathbb{N}$  dans la section suivante 1.3, mais supposons ici que l'on ait des poids dans  $\mathbb{Z}$  et considérons l'automate de la figure 1.3.

Chaque mot n'étiquette qu'un seul chemin acceptant, donc le chemin de poids minimal et le chemin de poids maximal étiquetés par un mot donné sont les mêmes. Cet automate calcule la différence entre le nombre de  $a$  et le nombre de  $b$ . Le langage des mots de poids 0 est donc le langage des mots ayant le même nombre de  $a$  que de  $b$ , qui n'est pas un langage régulier. C'est un premier exemple qui montre que rajouter des poids négatifs change radicalement la nature des problèmes posés.

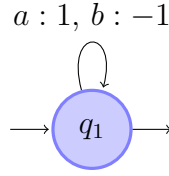


FIGURE 1.3 – Automate min-plus (resp. max-plus) à poids négatifs.

**Propriétés de clôture.** Nous allons maintenant voir des propriétés de clôture qui pourront être utiles dans la suite.

Étant données deux fonctions  $f$  et  $g : \mathbb{A}^* \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  (resp.  $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ ), définissons la fonction  $\min(f, g) : w \mapsto \min(f(w), g(w))$  (resp.  $\max(f, g) : w \mapsto \max(f(w), g(w))$ ) et la fonction  $f + g : w \mapsto f(w) + g(w)$  (cette somme est appelée « produit d’Hadamard »).

**Proposition 1.1.3** (clôture par min et max).

Si  $f$  et  $g$  sont calculées par automate min-plus (resp. max-plus) alors  $\min(f, g)$  (resp.  $\max(f, g)$ ) aussi.

*Démonstration.* Il suffit de faire l’union disjointe des deux automates. □

**Proposition 1.1.4** (somme).

Si  $f$  et  $g$  sont calculées par automate min-plus (resp. max-plus) alors  $f + g$  aussi.

*Démonstration.* Traitons la preuve dans le cas min-plus. Il s’agit de construire le produit cartésien des deux automates. Plus précisément, étant donné un automate min-plus  $\mathcal{A} = (\mathbb{A}, Q, I, F, T)$  qui calcule  $f$  et un automate min-plus  $\mathcal{A}' = (\mathbb{A}, Q', I', F', T')$  qui calcule  $g$ , construisons un automate min-plus  $\tilde{\mathcal{A}} = (\mathbb{A}, \tilde{Q}, \tilde{I}, \tilde{F}, \tilde{T})$  calculant  $h$  avec  $\tilde{Q} = Q \times Q'$ ,  $\tilde{I} = I \times I'$ ,  $\tilde{F} = F \times F'$  et

$$\tilde{T} = \{((p, p'), a, n + n', (q, q')) \mid (p, a, n, q) \in T, (p', a, n', q') \in T'\}.$$

Soit  $w$  un mot,  $h(w)$  est le poids d’un chemin acceptant minimal étiqueté par  $w$  dans  $\tilde{\mathcal{A}}$ . Par construction, ce chemin nous donne un chemin acceptant dans  $\mathcal{A}$  et un chemin acceptant dans  $\mathcal{A}'$  étiquetés par  $w$ , et dont la somme des poids vaut  $h(w)$ . On a donc  $h(w) \geq f(w) + g(w)$ . Inversement, un chemin acceptant étiqueté par  $w$  de poids minimal  $f(w)$  dans  $\mathcal{A}$  et un chemin acceptant étiqueté par  $w$  de poids minimal  $g(w)$  dans  $\mathcal{A}'$  définissent un chemin acceptant dans  $\tilde{\mathcal{A}}$  étiqueté par  $w$  de poids  $f(w) + g(w)$  par construction. On a donc  $f(w) + g(w) \geq h(w)$ . Finalement,  $h(w) = f(w) + g(w)$ .

La preuve pour les automates max-plus est similaire. □

**Passage d'un automate min-plus à un automate max-plus.** Ce qui suit détaille une construction permettant de passer d'un automate min-plus à un automate max-plus et inversement. Cette transformation sera utilisée de nombreuses fois dans le chapitre suivant. Cependant, bien qu'elle permette de montrer l'équivalence de certains résultats sur les automates min-plus et max-plus, elle ne permet pas un passage systématique des propriétés.

Soit  $\mathcal{A} = (\mathbb{A}, Q, I, F, T)$  un automate min-plus calculant une fonction  $f$  et soit  $m$  un entier supérieur au maximum des poids étiquetant les transitions de  $\mathcal{A}$ . Construisons  $\tilde{\mathcal{A}} = (\mathbb{A}, Q, I, F, \tilde{T})$  en changeant le poids sur chaque transition de  $\mathcal{A}$  de la manière suivante : si le poids d'une transition est  $c$  alors le nouveau poids est  $m - c$ . Plus précisément,  $\tilde{T} = \{(p, a, m - c, q) \mid (p, a, c, q) \in T\}$ .

L'automate ainsi construit a bien des poids positifs. De plus, un chemin de poids maximal dans  $\tilde{\mathcal{A}}$  correspond à un chemin de poids minimal dans  $\mathcal{A}$ . Ainsi l'automate max-plus  $\tilde{\mathcal{A}}$  calcule la fonction  $\tilde{f}$  définie, pour tout  $u \in \mathbb{A}^*$ , par :

$$\tilde{f}(u) = m|u| - f(u)$$

Cette construction permet de passer d'un automate min-plus à un automate max-plus. Une construction similaire permet de passer d'un automate max-plus à un automate min-plus.

**La détermination.** Une propriété clé des automates finis non déterministes est qu'ils peuvent être déterminisés. Ce ne sera plus le cas pour les automates min-plus et max-plus.

Un automate min-plus (resp. max-plus) est **déterministe** si l'automate fini sous-jacent (automate sans les poids sur les transitions) est déterministe. Par exemple, l'automate de la figure 1.1 n'est pas déterministe alors que celui de la figure 1.2 l'est.

De la même manière, un automate min-plus (resp. max-plus) est **non ambigu** si l'automate fini sous-jacent l'est, c'est-à-dire que pour tout mot  $w$ , il existe au plus un chemin acceptant étiqueté par  $w$ . Un automate min-plus (resp. max-plus) est **finiment ambigu** s'il existe un entier  $B$  tel que pour tout mot  $w$ , il existe au plus  $B$  chemins acceptants étiquetés par  $w$ . Enfin, un automate est **polynomialement ambigu** s'il existe un polynôme  $P$  tel que pour tout mot  $w$ , le nombre de chemins acceptants étiquetés par  $w$  est inférieur à  $P(|w|)$ .

Pour un automate déterministe, il existe au plus un chemin acceptant étiqueté par un mot donnée. De ce fait, l'automate calcule un minimum ou un maximum sur un ensemble contenant au plus un élément, ce qui simplifie les choses.

Contrairement aux automates finis non déterministes, les automates min-plus (resp. max-plus) ne sont pas déterminisables : il n'existe pas forcément d'automate min-plus (resp. max-plus) déterministe calculant la même fonction. L'automate de la figure 1.1, par exemple, n'est pas déterminisable.

Une question ouverte concernant la détermination des automates min-plus ou max-plus est la décidabilité du problème suivant :

*Étant donné un automate max-plus (resp. min-plus), existe-t-il un automate max-plus (resp. min-plus) déterministe qui calcule la même fonction ?*

Ce problème a été montré décidable si on se restreint aux automates polynomialement ambigus [34, 32].

Nous venons de voir une définition des automates min-plus et max-plus en termes de graphes, que nous avons manipulée pour démontrer les premières propriétés. La section suivante présente une définition algébrique équivalente en termes de matrices.

## 1.2 Définition matricielle

Une façon équivalente de voir ces automates est d'utiliser le cadre des matrices sur un semi-anneau. Nous allons donc voir tout d'abord des définitions algébriques sur les semi-groupes, monoïdes et semi-anneaux. Ces définitions seront utilisées dans les preuves des résultats principaux. Nous verrons ensuite la définition matricielle des automates min-plus et max-plus pour finalement faire le lien avec la définition précédente.

**Matrices sur un semi-anneau.** Un **semi-groupe** est un ensemble muni d'une loi associative. Notons  $xy$  le produit de deux éléments.

Un **morphisme de semi-groupes** est une application  $\mu$  d'un semi-groupe  $S$  dans un semi-groupe  $T$  telle que  $\mu(xy) = \mu(x)\mu(y)$ , pour tout  $x, y \in S$ .

Un élément  $e$  d'un semi-groupe  $S$  est **idempotent** si  $ee = e$ .

Un **monoïde** est un semi-groupe muni d'un élément neutre (1 est un élément neutre si  $1x = x1 = x$  pour tout  $x$ ). Il est dit **commutatif** si la loi est commutative ( $xy = yx$  pour tout  $x, y$ ). Dans ce cas, la loi est le plus souvent notée de manière additive  $+$  et l'élément neutre est noté  $0$ .

Un **morphisme de monoïdes** est un morphisme de semi-groupes tel que l'image de l'élément neutre du monoïde de départ est l'élément neutre du monoïde d'arrivée.

Un **semi-anneau** est un ensemble muni de deux lois  $(S, +, \times)$  tel que  $(S, +)$  est un monoïde commutatif,  $(S, \times)$  est un monoïde,  $\times$  est distributive par rapport à  $+$  ( $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$  et  $(y + z) \times x = (y \times x) + (z \times x)$ ), et le neutre pour  $+$  est absorbant pour  $\times$  ( $x \times 0 = 0 \times x = 0$  pour tout  $x$ ).

Soit donc  $(S, +, \times)$  un semi-anneau. Considérons maintenant les matrices à valeurs dans  $S$ . Notons  $\mathcal{M}_{n,m}(S)$  l'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $m$  colonnes à valeurs dans  $S$ . La structure de semi-anneau de  $S$  permet alors de définir un produit  $\otimes$  sur ces matrices : si  $M \in \mathcal{M}_{m,n}(S)$  et  $P \in \mathcal{M}_{n,p}(S)$  alors

$$(M \otimes P)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^n (M_{i,\ell} \times P_{\ell,j}).$$

**Proposition 1.2.1.**

Pour tout entier strictement positif  $n$ , l'ensemble  $(\mathcal{M}_{n,n}(S), \otimes)$  des matrices carrées de taille  $n$  équipé de ce produit est un monoïde.

Nous venons de voir les définitions algébriques générales de matrices sur un semi-anneau. Dans ce mémoire, nous allons les appliquer à des semi-anneaux particuliers.

Pour ce qui suit, nous considérerons le semi-anneau  $(\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ , noté  $\mathbb{N}_{\min}$ , aussi appelé **semi-anneau tropical**. La loi  $\min$  est le minimum usuel sur  $\mathbb{N}$  et pour tout  $x$ ,  $\min(x, +\infty) = \min(+\infty, x) = x$ . La somme est la somme usuelle sur  $\mathbb{N}$  et pour tout  $x$ ,  $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$ .

Nous utiliserons également le semi-anneau  $(\mathbb{N} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ , noté  $\mathbb{N}_{\max}$ . La loi  $\max$  est le maximum usuel sur  $\mathbb{N}$  et pour tout  $x$ ,  $\max(x, -\infty) = \max(-\infty, x) = x$ . La somme est la somme usuelle sur  $\mathbb{N}$  et pour tout  $x$ ,  $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$ .

Dans  $\mathbb{N}_{\min}$ , le produit matriciel est donc :

$$(M \otimes P)_{i,j} = \min_{1 \leq \ell \leq n} (M_{i,\ell} + P_{\ell,j}),$$

et dans  $\mathbb{N}_{\max}$  :

$$(M \otimes P)_{i,j} = \max_{1 \leq \ell \leq n} (M_{i,\ell} + P_{\ell,j}).$$

La même notation  $\otimes$  sera employée pour ces deux produits dans  $\mathbb{N}_{\min}$  et  $\mathbb{N}_{\max}$ , le contexte permettant d'identifier le cas considéré.

Nous allons maintenant voir la définition matricielle des automates min-plus et max-plus, et nous montrerons ensuite que les deux définitions sont équivalentes.

**Définition 1.2.1** (définition matricielle des automates).

Un automate min-plus (resp. max-plus) est la donnée d'un entier strictement positif  $k$  (nombre d'états) et :

- d'un morphisme de monoïdes  $\mu$  de  $\mathbb{A}^*$  muni de la concaténation dans le monoïde  $\mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{N} \cup \{+\infty\})$  (resp.  $\mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{N} \cup \{-\infty\})$ ) muni du produit matriciel  $\otimes$ ,
- d'un vecteur ligne  $I$  de taille  $k$  à valeur dans  $\{0, +\infty\}$  (resp.  $\{-\infty, 0\}$ ) appelé vecteur des états initiaux,
- d'un vecteur colonne  $F$  de taille  $k$  à valeur dans  $\{0, +\infty\}$  (resp.  $\{-\infty, 0\}$ ) appelé vecteur des états finaux.

La fonction calculée par cet automate est la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^* &\rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \text{ (resp. } \mathbb{N} \cup \{-\infty\}) \\ w &\mapsto I \otimes \mu(w) \otimes F \end{aligned}$$



**Remarque 1.2.1.** La donnée de  $I$ ,  $F$  et des matrices  $\mu(a)$  pour  $a$  une lettre de  $\mathbb{A}$  suffisent à caractériser l'automate,  $\mu$  étant étendu par morphisme à tous les mots.

**Exemple 1.2.1.**

Les matrices de la figure 1.4 définissent un automate min-plus. Remplacer les valeurs  $+\infty$  par  $-\infty$  définirait un automate max-plus. Nous allons voir que ces matrices correspondent à l'automate de la figure 1.1.

$$\mu(a) = \begin{pmatrix} 0 & +\infty & +\infty & +\infty \\ +\infty & 0 & +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & 0 \end{pmatrix} \quad \mu(b) = \begin{pmatrix} 1 & +\infty & +\infty & +\infty \\ +\infty & 0 & 0 & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & 0 \\ +\infty & +\infty & +\infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$I = (0 \quad 0 \quad 0 \quad +\infty) \quad T = \begin{pmatrix} 0 \\ +\infty \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

FIGURE 1.4 – Définition matricielle d'un automate.

**Lien entre les deux définitions.** Les deux définitions données ci-avant sont équivalentes. Nous allons voir comment passer de l'une à l'autre. Selon les résultats voulus nous pourrions utiliser l'une ou l'autre. La première définition sous forme de graphes permet d'utiliser des résultats de théorie des graphes, et est peut-être plus visuelle et intuitive. La deuxième définition, plus algébrique, permet d'utiliser des résultats de théorie matricielle et de structures algébriques.

*Comment construire la représentation matricielle à partir de la représentation en graphes ?*

Soit un automate min-plus (resp. max-plus) donné sous forme de graphe à  $k$  états, sur un alphabet  $\mathbb{A}$ . Notons  $q_1, q_2, \dots, q_k$  ses états.

Construisons l'application  $\mu$  en donnant ses valeurs sur les lettres et en l'étendant par morphisme. Étant donnée une lettre  $a$ , la matrice  $\mu(a)$  est une matrice carrée de taille  $k$  telle que  $(\mu(a))_{i,j}$  vaut le poids de la transition entre  $q_i$  et  $q_j$  étiquetée par  $a$  si elle existe et  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) sinon.

Le vecteur  $I$  est un vecteur ligne de taille  $k$  tel que  $I_j$  vaut 0 si  $q_j$  est initial et  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) sinon.

Le vecteur  $F$  est un vecteur colonne de taille  $k$  tel que  $F_j$  vaut 0 si  $q_j$  est final et  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) sinon.

Considérons donc  $\mu$ ,  $I$  et  $F$  ainsi définis. Notons  $f$  la fonction calculée par l'automate de départ donné sous forme de graphe. Les propositions suivantes montrent l'équivalence des sémantiques.

**Proposition 1.2.2** (cas min-plus).

Étant donné un mot  $w$  et des indices  $i, j$  de  $\{1, \dots, k\}$ ,  $(\mu(w))_{i,j}$  est le minimum des poids des chemins allant de  $q_i$  à  $q_j$  étiquetés par  $w$ .

De plus, on a :

$$f(w) = I \otimes \mu(w) \otimes F$$

**Proposition 1.2.3** (cas max-plus).

Étant donné un mot  $w$  et des indices  $i, j$  de  $\{1, \dots, k\}$ ,  $(\mu(w))_{i,j}$  est le maximum des poids des chemins allant de  $q_i$  à  $q_j$  étiquetés par  $w$ .

De plus, on a :

$$f(w) = I \otimes \mu(w) \otimes F$$

De la même manière, la représentation graphique se déduit de la représentation matricielle : les matrices de lettres donnent les transitions de l'automate, le vecteur  $I$  les états initiaux et le vecteur  $F$  les états finaux.

**Exemple 1.2.2.**

Les figures 1.1 et 1.4 représentent le même automate.

Nous venons de voir les définitions des automates min-plus et max-plus et les propriétés qui nous seront utiles dans la suite. La section suivante détaille le cadre plus général dans lequel s'inscrivent ces automates.

## 1.3 Extensions

Nous avons vu dans la section 1.1 que les automates min-plus et max-plus étendent les automates finis non déterministes. Nous allons voir dans cette section qu'ils peuvent également être généralisés de différentes manières.

**Les automates pondérés.** Nous avons vu comment définir les automates min-plus et max-plus à partir des semi-anneaux  $\mathbb{N}_{\min}$  et  $\mathbb{N}_{\max}$ . De manière plus générale, il est possible de définir les **automates pondérés** (ou **automates à multiplicités**) qui sont des automates sur n'importe quel semi-anneau. Nous avons toujours les deux points de vue équivalents :

- le point de vue matriciel : un automate pondéré à  $k$  états est la donnée d'un semi-anneau  $(S, +, \cdot)$  (avec 0 le neutre pour la loi  $+$  et 1 le neutre pour la loi  $\cdot$ ), et d'un morphisme  $\mu$  de l'alphabet dans  $\mathcal{M}_{k,k}(S)$  muni du produit  $\otimes$  défini à partir des lois du semi-anneau. Sont aussi donnés deux vecteurs ligne  $I$  et colonne  $F$  de taille  $k$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . La fonction calculée associée à un mot  $w$  la valeur  $I \otimes \mu(w) \otimes F$ .
- le point de vue graphique : chaque transition est pondérée dans  $S$ , et le poids d'un mot  $w$  est la somme ( $+$ ) sur tous les chemins acceptants étiquetés par  $w$  des produits ( $\cdot$ ) des poids des transitions qui composent le chemin.

Les automates pondérés ont été introduits dans [47] et généralisés dans [16]. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [46].

**Quelques exemples.** Les automates finis non déterministes (ou automates booléens) peuvent être vus comme des automates pondérés sur le semi-anneau booléen. Ce semi-anneau peut être défini comme la restriction de  $\mathbb{N}_{\min}$  à  $\{0, +\infty\}$  ou comme la restriction de  $\mathbb{N}_{\max}$  à  $\{0, -\infty\}$  par exemple.

Les semi-anneaux  $\mathbb{N}_{\min}$  et  $\mathbb{N}_{\max}$  peuvent aussi être étendus par  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$  et  $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$  et restreints à l'ensemble  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs ou à l'ensemble  $\mathbb{R}^+$  des réels positifs ou nuls. Nous discuterons de ces différentes variantes en fonction des résultats obtenus dans ce mémoire, mais de manière générale passer des entiers positifs aux réels positifs ne changera pas les résultats obtenus. Les semi-anneaux  $(\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \min, +)$  et  $(\mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\}, \max, +)$  sont d'ailleurs utilisés dans les preuves puisqu'ils permettent une plus grande marge de manœuvre pour faire les calculs. À l'inverse, l'ajout de valeurs négatives pourra changer radicalement la nature des problèmes étudiés.

Les automates pondérés sur le semi-anneau  $(\mathbb{R}, +, \times)$  ont été aussi beaucoup étudiés. Cependant les résultats de décidabilité sont totalement différents de ceux sur  $\mathbb{N}_{\min}$  et  $\mathbb{N}_{\max}$ . Bien que des transformations permettant de passer de l'un à l'autre existent, elles ne permettent pas un passage systématique des propriétés.

Les automates probabilistes sont une restriction des automates précédents dans lesquels il s'agit de faire en sorte de n'obtenir que des valeurs entre 0 et 1 (pour toutes les matrices, la somme des coefficients sur chaque ligne fait 1). L'idée est qu'à partir d'un état donné, les pondérations des transitions sortantes représentent la probabilité de prendre la transition en question [44].

**Les fonctions de coût.** Une autre généralisation possible des automates min-plus et max-plus provient de la théorie des fonctions de coût. Cette théorie a été développée par Colcombet. On pourra trouver les détails dans [9, 10].

Cette théorie considère des automates utilisant plusieurs compteurs qui peuvent être incrémentés ou remis à zéro et permettant de calculer le maximum sur les valeurs prises par les compteurs et le minimum sur tous les chemins de ces valeurs. Les automates min-plus font partie de ces automates.

Ces automates calculent des fonctions de l'ensemble des mots dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , mais la théorie des fonctions de coût ne s'attache pas à regarder les valeurs précises que prennent ces fonctions mais l'existence ou non de bornes sur les ensembles. Ainsi deux telles fonctions sont dites **équivalentes** si elles sont bornées sur les mêmes ensembles et une fonction de coût est définie comme étant une classe d'équivalence de telles fonctions. La théorie des fonctions de coût donne des propriétés telle que la décidabilité de l'équivalence. Nous allons voir ici un théorème important sur ces fonctions, traduit dans le cas particulier des automates min-plus.

**Théorème 1.3.1** (théorème de domination polynomiale [9]).

Étant données  $f$  et  $g$  calculées par automates min-plus, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. pour tout ensemble  $X$ , si  $g$  est bornée sur  $X$  alors  $f$  est bornée sur  $X$ ,
2. il existe une fonction  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  prolongée par  $\alpha(+\infty) = +\infty$  telle que  $f \leq \alpha \circ g$ ,
3. il existe un polynôme  $P$  tel que  $f \leq P \circ g$ .

De plus, ces propriétés sont décidables.

Si les propriétés du théorème sont vérifiées,  $f$  sera dite **polynomialement dominée** par  $g$ .

Ce théorème sera raffiné dans les chapitres suivants.

**Intersection des fonctions calculées par automates min-plus et des fonctions calculées par automates max-plus.** Dans [41], il est montré que si une fonction est à la fois calculée par un automate min-plus et par un automate max-plus alors elle est calculée par un automate min-plus ou max-plus non ambigu.

## Résumé du chapitre

Nous venons de voir les définitions, exemples et premières propriétés concernant les automates min-plus et max-plus. Ce chapitre détaille aussi le cadre plus général dans lequel se place les automates min-plus et max-plus. Nous avons vu que ces automates calculent des fonctions qui associent à un mot une valeur entière positive ou infinie. Ce mémoire s'intéresse aux comportements de ces fonctions, l'objectif étant de les décrire

le plus précisément possible. Le chapitre suivant aborde cette question, en énonçant les résultats de décidabilité connus concernant la description de ces fonctions.



# Chapitre 2

---

## Comportements des fonctions

Les automates min-plus et max-plus calculent des fonctions qui associent aux mots des valeurs entières ou infinies. Le propos de cette thèse est d'étudier le comportement de ces fonctions, de savoir quelles caractéristiques de ces comportements sont décidables et de savoir avec quel degré de précision on peut les décrire.

Les fonctions sont à valeurs dans les entiers positifs et  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Des questions naturelles se posent alors sur les valeurs infinies : sont elles atteintes ? pour un mot ? une infinité de mots ? Dans le chapitre précédent nous avons vu que le langage des mots ayant des valeurs infinies est régulier et que l'on peut calculer un automate qui le reconnaît, ainsi ces questions sont décidables.

Une question plus intéressante est la question de l'existence de bornes. Autant il est facile de voir que la question de l'existence de bornes inférieures est triviale (toujours vraie pour un automate min-plus, dépend uniquement du fait qu'une valeur  $-\infty$  est atteinte pour un automate max-plus), autant l'existence de bornes supérieures est plus difficile.

Le problème de l'existence de bornes a un statut différent pour les automates max-plus et pour les automates min-plus. En effet, c'est une question décidable dans les deux cas, mais il est facile de le prouver dans le cas des automates max-plus, alors que la preuve est beaucoup plus difficile dans le cas des automates min-plus.

Une autre question est la comparaison de deux fonctions calculées par automates min-plus (resp. max-plus). Nous allons voir dans ce chapitre que cette comparaison de fonctions peut être définie de manière plus ou moins précise, avec une marge d'erreur plus ou moins grande. Les comparaisons les plus précises seront indécidables alors que celles moins restrictives deviendront décidables.

**Alphabet à une lettre.** Dans tout ce chapitre et dans la suite du mémoire, nous nous plaçons dans le cadre d'un alphabet avec au moins deux lettres. Le cas d'un alphabet à une lettre est particulier et de nombreux résultats deviennent décidables, comme la comparaison de fonctions [35].

**Organisation du chapitre.** Ce chapitre expose les résultats déjà connus concernant le comportement de ces fonctions.

La décidabilité de l'existence de bornes est donnée dans la section 2.1 et l'indécidabilité de la comparaison précise entre deux fonctions dans la section 2.2.

La section 2.3 présente les résultats pour les semi-anneaux  $(\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \min, +)$  et  $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ .

La section 2.4 donne ensuite l'indécidabilité de comparaisons moins strictes mais encore trop précises pour devenir décidables.

La section 2.5 expose la décidabilité de la comparaison avec marge d'erreur polynomiale et raffine ce résultat en une comparaison avec marge d'erreur affine : le théorème de domination affine pour les automates min-plus.

Enfin la section 2.6 présente le sujet de ce mémoire, les idées apportées dans l'étude des fonctions calculées, les différentes questions abordées et les critères retenus pour décrire le comportement des automates min-plus et max-plus.

**Notations.** Dans ce chapitre, nous discuterons aussi du cas de  $\mathbb{Z}$ . Pour cela, notons  $\mathbb{Z}_{\min}$  (resp.  $\mathbb{Z}_{\max}$ ) le semi-anneau  $(\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \min, +)$  (resp.  $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ ).

## 2.1 Décidabilité de l'existence de bornes

Comme nous l'avons vu dans la section 1.1, étant donné un automate min-plus ou max-plus, le langage des mots ayant une valeur infinie est régulier et l'on peut construire un automate qui le reconnaît. Dès lors, il est décidable de savoir si ce langage est vide, fini ou infini. De même l'existence d'une borne inférieure est une question décidable. Une fonction calculée par un automate min-plus est par définition bornée inférieurement par 0. Une fonction calculée par un automate max-plus est bornée inférieurement si et seulement si aucun mot n'a valeur  $-\infty$ , ce qui est décidable.

Une question plus intéressante est la question de l'existence de bornes supérieures. Pour les automates max-plus, il n'est pas difficile de voir que ce problème est décidable.

**Théorème 2.1.1** (existence de bornes pour les automates max-plus (folklore)).

Étant donné un automate max-plus, le problème de savoir si la fonction qu'il calcule est bornée est décidable.

*Démonstration.* Montrons qu'un automate max-plus à  $k$  états est borné supérieurement si et seulement si tous les cycles accessibles depuis un état initial et co-accessibles depuis un état final, dont la taille (nombre d'arêtes qui composent le cycle) est inférieure à  $k$ , sont de poids nuls. Notons  $f$  la fonction calculée par l'automate.

Soit  $q_1$  un état accessible depuis un état initial par un chemin étiqueté par un mot  $u$  et co-accessible depuis un état final par un chemin étiqueté par un mot  $v$ . Supposons qu'il existe un cycle  $q_1 \xrightarrow{a_1:n_1} q_2 \xrightarrow{a_2:n_2} q_3 \rightarrow \dots \rightarrow q_\ell \xrightarrow{a_\ell:n_\ell} q_1$  avec  $\ell \leq k$  et



$s = n_1 + \dots + n_\ell$  non nul. Alors  $f(u(a_1 a_2 \dots a_\ell)^m v) \geq ms \geq m$ . Et donc la fonction calculée par l'automate n'est pas bornée supérieurement.

Inversement, si tous les cycles décrits ci-dessus sont de poids nuls, montrons que la fonction est bornée par  $kc$  où  $c$  est le poids maximal sur une transition de l'automate. Soit un mot  $w = a_1 \dots a_\ell$ , et  $q_1 \xrightarrow{a_1:n_1} q_2 \xrightarrow{a_2:n_2} q_3 \rightarrow \dots \rightarrow q_\ell \xrightarrow{a_\ell:n_\ell} q_{\ell+1}$  le chemin acceptant de poids maximal. Montrons qu'au plus  $k$  transitions de ce chemin ont un poids non nul. S'il existe au moins  $k+1$  transitions de poids non nul, il existe nécessairement un état  $q$  qui est l'état de départ de deux de ces transitions. Ainsi il existe un cycle dans ce chemin de  $q$  à  $q$  de poids non nul. Il existe ainsi également un cycle de taille plus petite que  $k$  dans ce cycle de poids non nul, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il existe donc au plus  $k$  transitions de poids non nul. Finalement  $f(w) \leq kc$ . Et la fonction calculée par l'automate est bornée.  $\square$

Le cas min-plus est plus complexe. Le problème de l'existence de bornes a été prouvé décidable par Hashiguchi [21, 24], puis Leung [38] et Simon [52] par des méthodes de preuves différentes. Si la fonction calculée est bornée, les preuves exhibent une borne. La meilleure borne a été donnée par Leung et Podolskiy [39] et est exponentielle en  $n^3$  où  $n$  est le nombre d'états de l'automate.

**Théorème 2.1.2** (Hashiguchi 82).

Étant donné un automate min-plus, le problème de savoir si la fonction qu'il calcule est bornée est décidable.

La même question peut se poser pour les automates avec des poids dans  $\mathbb{Z}$ . Mais ces questions ont alors un statut différent, l'existence de bornes supérieures pour  $\mathbb{Z}_{\min}$  est par exemple indécidable. Les résultats pour les semi-anneaux  $\mathbb{Z}_{\min}$  et  $\mathbb{Z}_{\max}$  seront détaillés dans la section suivante, puisque les preuves d'indécidabilité d'existence de bornes se font par réduction du problème de comparaison de deux fonctions calculées par des automates à poids positifs.

## 2.2 Indécidabilité de la comparaison

Nous venons de voir la décidabilité de différents comportements d'une fonction calculée par un automate min-plus ou un automate max-plus. Ici, nous allons regarder le comportement de deux fonctions, l'une par rapport à l'autre. Se pose alors la question du sens à donner à la comparaison. Une première réponse naturelle est la suivante :

**Définition 2.2.1.**

Étant données  $f$  et  $g$  deux fonctions calculées par automates min-plus (resp. max-plus) sur le même alphabet  $\mathbb{A}$ , on dit que  $f$  est inférieure à  $g$ , noté  $f \leq g$  si pour tout mot  $w$  de  $\mathbb{A}^*$ ,  $f(w) \leq g(w)$ .

Les relations  $f \geq g$ ,  $f < g$ ,  $f > g$  se définissent de manière analogue.

Cette première comparaison est la plus naturelle, mais aussi la plus précise et se heurte à l'indécidabilité.

**Théorème 2.2.1** (Krob 92).

Étant données  $f$  et  $g$  deux fonctions calculées par automates min-plus (resp. max-plus) sur le même alphabet  $\mathbb{A}$ , le problème de savoir si  $f \leq g$  est indécidable.

Les preuves de ce résultat montrent plus généralement l'indécidabilité de la comparaison pour des fonctions calculées par un automate sur  $\mathbb{Z}_{\min}$ . La preuve originale a été donnée par Krob en 1992 dans [35]. L'indécidabilité de la comparaison est montrée par réduction à partir du dixième problème de Hilbert. Une autre preuve de ce résultat consiste à réduire le problème de l'arrêt d'une machine à deux compteurs à la comparaison entre une fonction calculée par un automate min-plus et la fonction qui à un mot associe sa longueur. Les preuves donnent en fait un théorème plus fort :

**Théorème 2.2.2** (Krob 92).

Étant donnée  $f$  une fonction calculée par automates min-plus (resp. max-plus), le problème de savoir si pour tout mot  $w$ ,  $f(w) \leq |w|$  (resp.  $|w| \leq f(w)$ ) est indécidable.

Les preuves de ce résultat ont été données dans le cas min-plus mais on le réduit facilement au cas max-plus. Pour cela on utilise la construction donnée à la section 1.1 pour passer d'un automate min-plus à un automate max-plus. Si  $f$  est calculée par un automate min-plus, et si  $m$  est un entier plus grand que tous les poids sur les transitions de  $f$ , on sait construire un automate max-plus qui calcule la fonction  $\tilde{f}$  définie par  $\tilde{f}(w) = m|w| - f(w)$ .

Ainsi, si  $f$  et  $g$  sont calculées par des automates min-plus tels que l'entier  $m$  est plus grand que tous les poids des transitions des deux automates, alors il existe effectivement  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  calculées par des automates max-plus telles que  $f \leq g$  si et seulement si  $\tilde{f} \geq \tilde{g}$ .

**Variantes.** La comparaison donnée ci-avant est équivalente (en terme d'indécidabilité) à un certain nombre de variantes (une idée des réductions dans le cas min-plus est donnée, le cas max-plus est similaire) :

- $f = g : f \leq g$  si et seulement si  $f = \min(f, g)$ .
- $f < g : f \leq g$  si et seulement si  $f < g + 1$ .
- il existe  $w$  tel que  $f(w) \leq g(w) : f < g$  si et seulement si il existe  $w$  tel que  $g(w) \leq f(w)$ .
- il existe  $w$  tel que  $f(w) = g(w) : \text{il existe } w \text{ tel que } f(w) \leq g(w) \text{ si et seulement si il existe } w \text{ tel que } f(w) = \min(f, g)(w)$ .

**Cas particuliers décidables.** La comparaison  $f \leq g$  pour des automates min-plus reste indécidable même en se restreignant à des fonctions  $g$  déterministes. Par contre, considérer  $f$  déterministe rend le problème décidable.

L'idée est la suivante. Pour prouver que  $f \leq g$ , il s'agit de montrer que pour tout mot  $w$  et pour tout chemin acceptant étiqueté par  $w$  dans l'automate de  $g$ , il existe un chemin acceptant étiqueté par  $w$  dans l'automate de  $f$ . Si  $f$  est déterministe, il n'existe qu'un seul chemin acceptant étiqueté par  $w$  dans l'automate de  $f$ .

Le problème est symétrique pour les automates max-plus. La comparaison reste indécidable si on considère  $f$  déterministe. À l'inverse, elle devient décidable si  $g$  est déterministe.

**Théorème 2.2.3** (folklore).

Étant données  $f$  calculée par un automate min-plus déterministe (resp. un automate max-plus) et  $g$  calculée par un automate min-plus (resp. un automate max-plus déterministe), le problème  $f \leq g$  est décidable.

*Démonstration.* Faisons la preuve dans le cas min-plus, le cas max-plus est similaire. Si  $f$  est une fonction calculée par un automate min-plus déterministe alors  $-f$  est calculée par un automate déterministe sur le semi-anneau  $\mathbb{Z}_{\min}$ . La fonction  $g - f$  est alors calculée par un automate sur le semi-anneau  $\mathbb{Z}_{\min}$ . (Nous avons vu dans la section 1.1, que les automates min-plus sont clos par somme, il en va de même pour les automates sur  $\mathbb{Z}_{\min}$ , la preuve est identique.) Or, le problème  $h \geq 0$  pour  $h$  calculée par un automate sur  $\mathbb{Z}_{\min}$  est décidable (il suffit de vérifier s'il existe des cycles de poids strictement négatifs ou pas). On peut donc décider si  $g - f \geq 0$  et donc si  $g \geq f$ .  $\square$

D'autres restrictions rendent aussi ce problème décidable, comme la restriction à des automates finiment ambigus, voir par exemple [26, 53].

## 2.3 Cas des poids négatifs

Une première remarque concernant le cas de  $\mathbb{Z}$  est qu'il est facile de passer d'un automate sur  $\mathbb{Z}_{\min}$  à un automate sur  $\mathbb{Z}_{\max}$ . En effet, si une fonction  $f$  est calculée par un automate sur  $\mathbb{Z}_{\min}$  alors  $-f$  est calculée par un automate sur  $\mathbb{Z}_{\max}$  (il suffit de prendre l'opposé des poids sur chaque transition), et inversement. Dans la suite, les preuves seront faites pour le semi-anneau  $\mathbb{Z}_{\min}$ , les résultats sur  $\mathbb{Z}_{\max}$  s'en déduiront immédiatement en utilisant cette transformation.

De même que dans le cas des poids positifs, la comparaison de deux fonctions est indécidable. Mais plus précisément, la comparaison avec la fonction nulle est indécidable.

### **Théorème 2.3.1** (Krob 92).

Étant donné un automate pondéré sur le semi-anneau  $\mathbb{Z}_{\min}$  (resp.  $\mathbb{Z}_{\max}$ ) calculant une fonction  $f$ , le problème de savoir si  $f \leq 0$  (resp.  $f \geq 0$ ) est indécidable.

Ce résultat permet de montrer que l'existence de bornes supérieures devient un problème indécidable sur  $\mathbb{Z}$ , à l'inverse des résultats sur  $\mathbb{N}$ .

### **Théorème 2.3.2.**

Étant donné un automate pondéré sur le semi-anneau  $\mathbb{Z}_{\min}$  (resp.  $\mathbb{Z}_{\max}$ ), le problème de l'existence de bornes supérieures (resp. inférieures) est indécidable.

*Démonstration.* Montrons qu'il est indécidable de savoir si une fonction calculée par un automate sur le semi-anneau  $\mathbb{Z}_{\min}$  est majorée. Pour cela, faisons une réduction du problème de la comparaison à 0. Soit donc  $f$  une fonction calculée par automate sur le semi-anneau  $\mathbb{Z}_{\min}$ . Ajoutons un nouveau symbole  $\star$  à notre alphabet. Posons alors pour tout mot  $w_1, \dots, w_n$  sur le précédent alphabet :

$$\tilde{f}(w_1 \star w_2 \star \dots \star w_n) = f(w_1) + f(w_2) + \dots + f(w_n).$$

La fonction  $\tilde{f}$  ainsi définie est bien une fonction calculée par automate sur le semi-anneau  $\mathbb{Z}_{\min}$  (pour construire un tel automate, il suffit de prendre un automate pour  $f$  et de rajouter des transitions de chaque état final vers chaque état initial étiquetées par  $\star$  et de poids 0). De plus,  $f \leq 0$  si et seulement si  $\tilde{f}$  est majorée. En effet,  $f \leq 0$  implique par définition que  $\tilde{f} \leq 0$  et  $\tilde{f}$  est donc majorée. Inversement, s'il existe  $w$  tel que  $f(w) \geq 1$ , alors pour tout  $n$ ,  $\tilde{f}((w\star)^n w) = (n+1)f(w) \geq n$ , et  $\tilde{f}$  n'est pas majorée.

Donc il est indécidable de savoir si une fonction calculée par un automate sur  $\mathbb{Z}_{\min}$  est majorée. On en déduit qu'il est indécidable de savoir si une fonction calculée par un automate sur  $\mathbb{Z}_{\max}$  est minorée.  $\square$

À l'inverse, l'existence de bornes inférieures pour  $\mathbb{Z}_{\min}$ , et supérieures pour  $\mathbb{Z}_{\max}$  est décidable : il s'agit juste de détecter des cycles de poids négatifs pour  $\mathbb{Z}_{\min}$  et de poids positifs pour  $\mathbb{Z}_{\max}$  (la preuve est similaire à la preuve du théorème 2.1.1).

**Théorème 2.3.3** (folklore).

Étant donné un automate pondéré sur le semi-anneau  $\mathbb{Z}_{\min}$  (resp.  $\mathbb{Z}_{\max}$ ), le problème de l'existence de bornes inférieures (resp. supérieures) est décidable.

Le théorème suivant se déduit alors des théorèmes 2.3.3 et 2.1.2. Une généralisation de ce théorème au cas des poids réels se trouve dans [18].

**Théorème 2.3.4.**

Étant donné un automate pondéré sur le semi-anneau  $\mathbb{Z}_{\min}$  (resp.  $\mathbb{Z}_{\max}$ ), il est décidable de savoir si la fonction qu'il calcule est bornée.

## 2.4 Extensions de l'indécidabilité de la comparaison

Nous avons vu que la comparaison entre deux fonctions est indécidable. Dans cette section, nous allons voir que même si on relâche un peu les hypothèses, certaines généralisations restent indécidables.

Les résultats d'indécidabilité sur  $\mathbb{Z}$  nous permettent d'étendre le résultat d'indécidabilité de comparaison des fonctions sur  $\mathbb{N}$ .

Tout comme il est indécidable de savoir si  $f \leq g$ , étant donnés deux entiers  $a \geq 1$  et  $b \geq 0$ , il est indécidable de savoir si  $f \leq ag + b$ . La première généralisation consiste à ne plus fixer la valeur de  $b$  mais à décider de l'existence d'un tel  $b$ , comme le schématise la figure 2.1.

**Théorème 2.4.1.**

Soit un entier  $a$  strictement positif. Étant données  $f$  et  $g$  deux fonctions calculées par des automates min-plus, le problème de savoir s'il existe  $b$  tel que  $f \leq ag + b$  est indécidable.

*Démonstration.* Fixons  $a$  un entier strictement positif, et  $f$  une fonction calculée par un automate sur le semi-anneau  $\mathbb{Z}_{\min}$ . Notons  $m$  la valeur absolue du plus petit poids apparaissant sur une transition de  $f$ . On a pour tout  $w$ ,  $f(w) = f(w) + am|w| - am|w|$ .

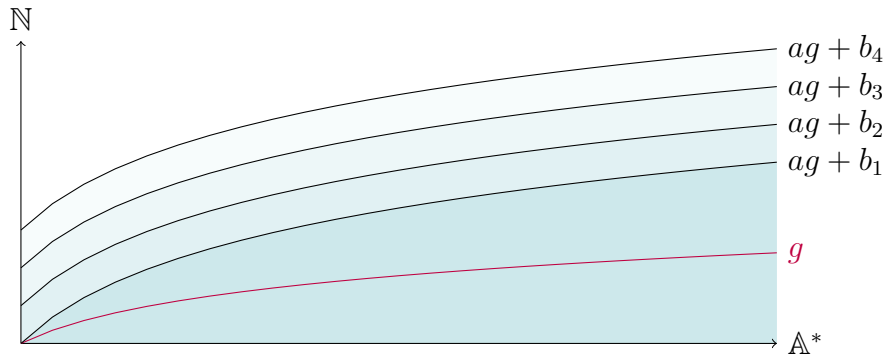


FIGURE 2.1 – Indécidabilité de l'existence de  $b$ .

En posant  $\tilde{f}(w) = f(w) + am|w|$  et  $\tilde{g}(w) = m|w|$ , on constate tout d'abord que  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  sont calculées par des automates min-plus (pour  $\tilde{f}$ , il suffit de prendre l'automate de  $f$  et de rajouter  $am$  au poids de chaque transition). De plus,  $f$  est majorée si et seulement s'il existe  $b$  tel que pour tout mot  $w$ ,  $f(w) + am|w| - am|w| \leq b$ , si et seulement s'il existe  $b$  tel que  $\tilde{f} \leq a\tilde{g} + b$ .  $\square$

Nous venons de voir, théorème 2.4.1, que l'existence d'un entier  $b$  tel que  $f \leq g + b$  est indécidable. Nous allons encore affiner ce résultat.

La question est de savoir s'il existe un algorithme ayant le comportement suivant, schématisé dans la figure 2.2 :

**Entrée :**

$f, g$  calculées par des automates min-plus

**Sortie :**

- *oui* si  $f \leq g$
- *non* s'il existe  $\varepsilon > 0$  et une suite de mots  $(w_n)_n$  de longueur strictement croissante, tels que pour tout  $n$ ,  $f(w_n) \geq (1 + \varepsilon)g(w_n)$
- indifféremment *oui* ou *non* dans les autres cas

L'idée ici est de relâcher encore la précision dans la comparaison de  $f$  et  $g$ . Cependant,  $\varepsilon$  pouvant être arbitrairement proche de 0, cela ne suffira pas pour obtenir la décidabilité.

**Théorème 2.4.2.**

Un tel algorithme n'existe pas.

*Démonstration.* Faisons une réduction du problème de comparaison de deux fonctions que l'on sait indécidable. Soient donc  $f$  et  $g$  deux fonctions calculées par des automates

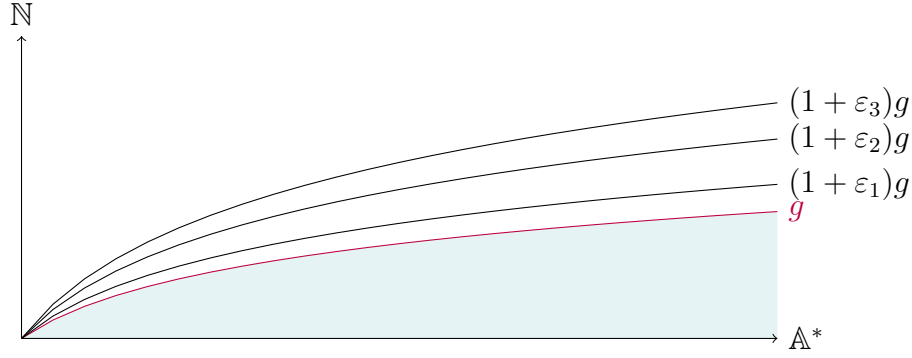


FIGURE 2.2 – Indécidabilité.

min-plus. Ajoutons un nouveau symbole  $\star$  à l'alphabet. Posons alors pour tout mot  $w_1, \dots, w_n$  sur le précédent alphabet :

$$\tilde{f}(w_1 \star w_2 \star \dots \star w_n) = f(w_1) + f(w_2) + \dots + f(w_n),$$

$$\tilde{g}(w_1 \star w_2 \star \dots \star w_n) = g(w_1) + g(w_2) + \dots + g(w_n).$$

Si l'algorithme existe, exécutons-le sur  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$ . Montrons qu'il répond *non* si et seulement si  $f$  n'est pas inférieure à  $g$ . S'il répond *non*, alors il existe nécessairement un mot  $w_1 \star w_2 \star \dots \star w_n$  tel que :

$$\tilde{f}(w_1 \star w_2 \star \dots \star w_n) > \tilde{g}(w_1 \star w_2 \star \dots \star w_n),$$

d'où  $f(w_1) + f(w_2) + \dots + f(w_n) > g(w_1) + g(w_2) + \dots + g(w_n)$ , et il existe donc un mot  $w_i$  tel que  $f(w_i) > g(w_i)$ . Réciproquement, supposons qu'il existe  $w$  tel que  $f(w) > g(w)$ . Posons alors  $\varepsilon = 1/g(w)$  et  $w_n = (w\star)^n w$ . Pour tout  $n$  :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(w_n) &= (n+1)f(w) \geq (n+1)(g(w) + 1) \\ &\geq (n+1)g(w) + (n+1) \\ &\geq \tilde{g}(w_n) + \tilde{g}(w_n)/g(w) \\ &\geq (1 + \varepsilon)\tilde{g}(w_n) \end{aligned}$$

et l'algorithme répond donc *non*. □

Il est donc impossible de comparer précisément deux fonctions et les comparaisons moins strictes données ci-avant restent indécidables. La question est alors de savoir à quel point il faut relâcher ces hypothèses pour obtenir la décidabilité.

## 2.5 Domination affine

En utilisant les travaux de Colcombet sur la théorie des fonctions de coûts, nous avons vu qu'en autorisant une marge d'erreur polynomiale, la comparaison devient

décidable. Plus précisément, étant données deux fonctions  $f$  et  $g$  calculées par automates min-plus, on peut décider s'il existe un polynôme  $P$  tel que  $f \leq P \circ g$  (voir théorème 1.3.1).

Ce théorème est donné dans le cadre plus général des fonctions de coût, mais on peut l'affiner pour les fonctions calculées par automates min-plus. C'est ce que nous faisons ici : la domination polynomiale est équivalente à une domination affine, on peut choisir le polynôme  $P$  de degré 1.

**Théorème 2.5.1** (théorème de domination affine).

Étant données deux fonctions calculées par automates min-plus sur le même alphabet, les conditions suivantes sont équivalentes et décidables :

1. sur tout ensemble où  $g$  est bornée,  $f$  est aussi bornée,
2. il existe un polynôme  $P$  tel que  $f \leq P \circ g$ ,
3. il existe un entier  $a$  positif tel que  $f \leq ag + a$ .

La preuve qui nécessite l'utilisation d'un certain nombre d'outils mis en place dans les chapitres suivants sera donnée au chapitre 8.

On se retrouve donc entre deux problèmes, la comparaison exacte de deux fonctions qui est indécidable, et la comparaison avec marge d'erreur affine qui, elle, est décidable. On peut dès lors se demander où se situe la frontière de décidabilité entre les deux.

## 2.6 Affiner la description des fonctions

Cette section expose les problématiques soulevées dans ce mémoire.

Les sections précédentes donnent des problèmes de décision sur le comportement des fonctions calculées par automates min-plus et max-plus.

Ainsi, la comparaison exacte de deux telles fonctions est indécidable alors que la comparaison avec marge d'erreur affine devient décidable. La question qui en découle naturellement est de savoir jusqu'à quel degré de précision on peut aller pour comparer des fonctions en gardant la décidabilité.

Concernant le comportement d'une fonction, la seule question abordée a été celle de l'existence de bornes, qui est décidable, et on peut se demander s'il existe d'autres critères intéressants à prendre en compte, et quels sont les aspects pertinents à considérer pour décrire le comportement de ces fonctions.

Nous verrons en fait que ces deux questions se rejoignent. Dans les sections 3.2 et 3.3, nous répondrons à la question de la comparaison approchée de deux fonctions en utilisant la description du comportement d'une seule fonction.



Nous allons maintenant voir quels comportements des fonctions étudiées ont été considérés dans ce mémoire.

Tout d'abord, il s'agit de considérer l'évolution des fonctions par rapport à la longueur des mots. Pour illustrer cela, les figures 2.3 et 2.4 représentent des fonctions calculées par automates min-plus et max-plus avec en ordonnée le poids des mots, et en abscisse la longueur des mots. Chaque point  $(x, y)$  représente un ou plusieurs mots de longueur  $x$  et de poids  $y$ . Ces figures correspondent aux automates données en exemple dans le chapitre 1.

Ce qu'il est intéressant de regarder, ce sont les fonctions minorantes et majorantes qui entourent l'ensemble de points. Si  $f$  est la fonction calculée par l'automate, on considère :

$$\text{la fonction « majorante » : } n \mapsto \max\{f(w) \mid |w| \leq n\}$$

$$\text{la fonction « minorante » : } n \mapsto \min\{f(w) \mid |w| \geq n\}.$$

Une autre manière de voir ces fonctions est de considérer leurs fonctions réciproques. La fonction réciproque de la fonction majorante est la fonction qui à un entier  $n$  associe la longueur du mot le plus court qui a un poids plus grand que  $n$ . *Quelle longueur minimale me faut-il pour dépasser  $n$  ?*

La fonction réciproque de la fonction minorante est la fonction qui à un entier  $n$  associe la longueur du plus long mot qui a un poids ne dépassant pas  $n$ . *Quelle longueur maximale puis-je atteindre sans dépasser  $n$  ?*

**Cas des automates max-plus.** La fonction majorante sera la plus facile à décrire. (Cela vient du fait qu'on utilise deux max pour la définir.) Soit elle est bornée ou identiquement égale à  $-\infty$ , si l'automate est supérieurement borné (ce qui est décidable). Soit l'automate n'est pas supérieurement borné et alors il possède au moins un cycle de poids non nul. De ce fait il existe une suite de mots dont les poids sont une fonction affine des longueurs. La fonction majorante sera alors équivalente à une fonction  $n \mapsto cn$  pour  $c$  une constante.

Pour un automate max-plus, on s'intéressera donc à décrire la fonction minorante. Dans la définition de cette fonction, alternent un min et un max.

**Cas des automates min-plus.** À l'inverse, l'utilisation de deux min rendra la fonction minorante plus facile à décrire. Si un automate min-plus possède un cycle de poids nul alors sa fonction minorante est bornée. Inversement, si tous les cycles ont un poids strictement positif, alors sa fonction minorante est équivalente à une fonction  $n \mapsto cn$  pour  $c$  une constante.

Ainsi, pour un automate min-plus, on sera intéressé par la fonction majorante, pour laquelle alternent un max et un min. Cette fonction a été introduite dans [49].

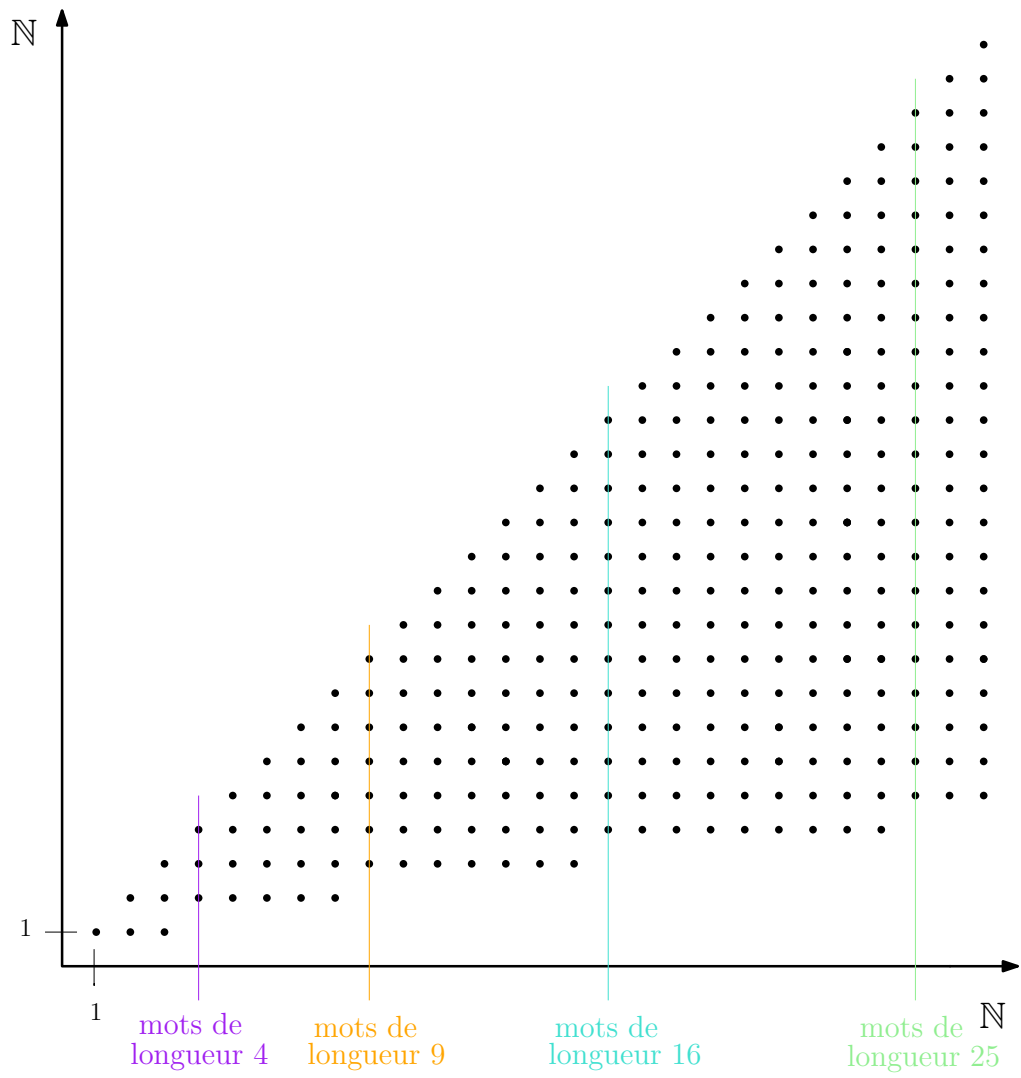


FIGURE 2.3 – Fonction calculée par l’automate de la figure 1.1 vu comme automate max-plus.

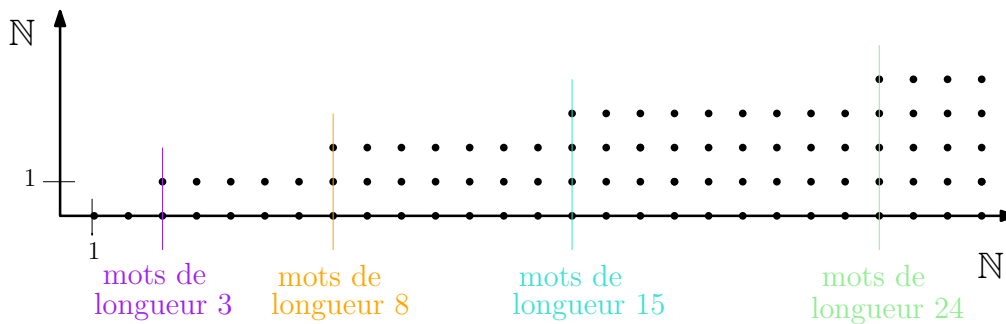


FIGURE 2.4 – Fonction calculée par l’automate de la figure 1.1 vue comme automate min-plus.

**Sujet du mémoire.** L’objet de ce travail est donc de décrire ces fonctions majorante et minorante en trouvant des fonctions qui leur soient équivalentes.

Notons  $g$  la fonction minorante (resp. majorante) d’un automate max-plus (resp. min-plus). Si  $g$  n’est pas identiquement égale à  $-\infty$  (resp.  $+\infty$ ), il s’agirait de prouver (c’est fait dans le cas max-plus) qu’il existe  $c$  et  $c'$  des réels positifs, et  $\alpha$  un rationnel de  $[0, 1]$  tels que pour tout  $n$  suffisamment grand :

$$cn^\alpha \leq g(n) \leq c'n^\alpha$$

L’objectif ultime est de :

1. calculer précisément  $\alpha$ ,
2. approximer les valeurs de  $c$  et  $c'$ . Plus précisément, pour  $\varepsilon > 0$  fixé, il s’agit de calculer à  $\varepsilon$ -près la valeur  $\liminf(g(n)/n^\alpha)$  (resp.  $\limsup(g(n)/n^\alpha)$ ). Cette valeur ne peut pas être calculée exactement au vu des résultats d’indécidabilité de comparaison des fonctions.

La suite de ce mémoire expose les résultats obtenus.

- Pour le cas max-plus, il existe une algorithm qui calcule  $\alpha$  (chapitre 4).
- Pour le cas min-plus (resp. max-plus), il existe un algorithm qui approxime  $\limsup(g(n)/n)$  (resp.  $\liminf(g(n)/n)$ ) (chapitre 3).

## Résumé du chapitre

Nous venons de voir les différents résultats de décidabilité concernant le comportement des fonctions calculées par automates max-plus et min-plus : décidabilité de l’existence de bornes, indécidabilité de la comparaison. Pour préciser la frontière de décidabilité entre ces deux résultats, et décrire le plus précisément possible les fonctions calculées par automates min-plus et max-plus, ce chapitre a introduit les fonctions majorantes et minorantes des automates. Pour un automate min-plus, il s’agira de décrire

la fonction majorante et pour un automate max-plus, il s'agira de décrire la fonction minorante. Les deux chapitres suivants 3 et 4 présentent les résultats obtenus dans la description de ces fonctions ainsi que leurs applications (théorème de comparaison approchée, temps de calcul en pire cas d'un programme). Les chapitres 5, 6, 7 et 8 donnent les preuves de ces résultats.

# Chapitre 3

---

## Approximation du rapport fonction-longueur

Dans l'optique de décrire le comportement des fonctions calculées par automates min-plus (resp. max-plus), nous allons nous intéresser à la fonction correspondant au comportement maximal (resp. minimal) des automates, comme expliqué dans la section 2.6.

Ce chapitre considère plus particulièrement le rapport entre cette fonction et la longueur des mots. Plus précisément, nous allons considérer l'ensemble des rapports  $\{f(w)/|w| \mid w \in \mathbb{A}^*\}$  et approximer sa borne supérieure si  $f$  est une fonction calculée par un automate min-plus sur  $\mathbb{A}$  et sa borne inférieure si  $f$  est une fonction calculée par un automate max-plus sur  $\mathbb{A}$ . Calculer ces valeurs de manière exacte est impossible. Cela se prouve par réduction de l'indécidabilité de comparer deux fonctions.

Par contre, approximer ces valeurs permet de déduire un algorithme de comparaison approchée pour les fonctions calculées par automates min-plus. En s'autorisant une marge d'erreur aussi petite que l'on veut mais fixée, il est possible de comparer deux fonctions calculées par automates min-plus.

**Organisation du chapitre.** Dans un premier temps, nous allons voir le théorème d'approximation du rapport fonction-longueur qui calcule à  $\varepsilon$ -près les bornes inférieures et supérieures de  $\{f(w)/|w| \mid w \in \mathbb{A}^*\}$  (section 3.1). Ce théorème est valable pour les automates min-plus et max-plus.

Dans un deuxième temps, nous en déduisons un résultat de comparaison approchée entre une fonction calculée par un automate min-plus ou par un automate max-plus et la fonction qui à un mot associe sa longueur (section 3.2).

Finalement, dans un troisième temps, nous verrons le théorème de comparaison approchée, qui permet de comparer, de manière approchée, deux fonctions calculées par des automates min-plus (et uniquement dans le cadre des automates min-plus) (section 3.3).

**Notations.** À partir de maintenant, l'alphabet  $\mathbb{A}$  associé à tous les automates considérés dans la suite est fixé.

### 3.1 Approximation du rapport fonction-longueur

Dans cette section, nous allons nous intéresser au calcul de la borne supérieure de l'ensemble  $\{f(w)/|w| \mid w \in \mathbb{A}^*\}$  pour  $f$  une fonction calculée par un automate min-plus et de la borne inférieure de l'ensemble  $\{g(w)/|w| \mid w \in \mathbb{A}^*\}$  pour  $g$  une fonction calculée par un automate max-plus.

Tout d'abord, calculer de manière exacte ces valeurs est impossible : en effet, dans le cas contraire, supposons que l'on ait calculé la borne supérieure  $r$  de l'ensemble  $\{f(w)/|w| \mid w \in \mathbb{A}^*\}$ . Si  $r \leq 1$  alors pour tout mot  $w$ ,  $f(w) \leq |w|$ , et inversement si  $r > 1$  alors il existe un mot  $w$  tel que  $f(w) > |w|$ . Donc calculer  $r$  permet de décider si  $f$  est inférieure à la fonction qui à un mot associe sa longueur, ce qui est indécidable d'après le théorème 2.2.2. (La démonstration est similaire pour le cas max-plus.)

Cependant, il est possible d'approcher ces quantités avec une marge d'erreur arbitrairement proche de 0. C'est le sujet des deux théorèmes suivants.

**Théorème 3.1.1** (approximation du rapport fonction-longueur).

Étant donné un automate min-plus calculant une fonction  $f$ , et un réel strictement positif  $\varepsilon$ , il existe un algorithme calculant un réel  $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  tel que :

$$r - \varepsilon \leq \sup_{w \in \mathbb{A}^*} \frac{f(w)}{|w|} \leq r + \varepsilon.$$

La preuve de ce théorème est le sujet des chapitres 5 et 6.

On peut en déduire un théorème équivalent pour les automates max-plus.

**Théorème 3.1.2.**

Étant donné un automate max-plus calculant une fonction  $g$ , et un réel strictement positif  $\varepsilon$ , il existe un algorithme calculant  $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\}$  tel que :

$$r - \varepsilon \leq \inf_{w \in \mathbb{A}^*} \frac{g(w)}{|w|} \leq r + \varepsilon.$$

*Démonstration.* Nous allons déduire ce théorème du théorème d'approximation du rapport fonction-longueur en utilisant la transformation d'un automate min-plus en automate max-plus donnée à la section 1.1. Soit  $\varepsilon > 0$ , soit une fonction  $g$  calculée par un automate max-plus et  $m$  un entier plus grand que tous les poids sur ses transitions, il existe un automate min-plus calculant la fonction  $f$  définie par  $f(w) = m|w| - g(w)$ . On a alors la relation :

$$\sup_{w \in \mathbb{A}^*} \frac{f(w)}{|w|} = m - \inf_{w \in \mathbb{A}^*} \frac{g(w)}{|w|}.$$

Ainsi une approximation de  $\sup\{f(w)/|w| \mid w \in \mathbb{A}^*\}$  à  $\varepsilon$ -près donne une approximation de  $\inf\{g(w)/|w| \mid w \in \mathbb{A}^*\}$  à  $\varepsilon$ -près.  $\square$

Ainsi, dans le chapitre 6, nous verrons un algorithme qui renvoie une valeur  $r$  approchant à  $\varepsilon$ -près la valeur  $\sup\{f(w)/|w| \mid w \in \mathbb{A}^*\}$ . L'algorithme approche en fait toutes les valeurs  $f(w)/|w|$  pour tous les mots  $w$  et peut même détecter si une valeur donnée est obtenue pour un nombre fini de témoins ou pour une infinité. Dès lors, on peut non seulement calculer la borne supérieure de l'ensemble des rapports mais aussi sa limite supérieure dans le sens ci-dessous :

**Théorème 3.1.3.**

Étant donné un automate min-plus calculant une fonction  $f$ , et un réel strictement positif  $\varepsilon$ , il existe un algorithme calculant  $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  tel que :

$$r - \varepsilon \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{|w|=n} \frac{f(w)}{n} \right) \leq r + \varepsilon.$$

**Théorème 3.1.4.**

Étant donné un automate max-plus calculant une fonction  $g$ , et un réel strictement positif  $\varepsilon$ , il existe un algorithme calculant  $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\}$  tel que :

$$r - \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left( \inf_{|w|=n} \frac{g(w)}{n} \right) \leq r + \varepsilon.$$

La preuve du théorème 3.1.3 est donnée dans les chapitres 5 et 6 : c'est la même preuve que pour le théorème 3.1.1. La preuve du théorème 3.1.4 découle du théorème 3.1.3 de la même manière que le théorème 3.1.2 découlait du théorème 3.1.1 : il suffit juste de prendre la  $\liminf$  (resp.  $\limsup$ ) au lieu de l' $\inf$  (resp. du  $\sup$ ).

**Complexité.** L'algorithme proposé a une complexité EXPSPACE en la somme de la taille de l'automate et de la représentation binaire de  $\varepsilon$ . D'autre part, le problème est PSPACE-difficile (il est par exemple possible de réduire l'universalité des automates finis non déterministes à ce problème).

**Cas de  $\mathbb{Z}$ .** Le théorème reste vrai si on autorise des poids négatifs. En effet, soit un automate sur  $\mathbb{Z}_{\min}$  calculant une fonction  $f$  et  $m$  la valeur absolue du poids négatif le plus petit. En rajoutant  $m$  sur toute les transitions, l'automate obtenu est à poids positifs et en tant qu'automate min-plus, il calcule la fonction  $g$  définie pour tout mot  $w$  par  $g(w) = f(w) + m|w|$ . Une approximation de  $\sup\{g(w)/|w| \mid w \in \mathbb{A}^*\}$  à  $\varepsilon$ -près donne alors une approximation de  $\sup\{f(w)/|w| \mid w \in \mathbb{A}^*\}$  à  $\varepsilon$ -près.

**Rayon spectral joint.** Ces théorèmes rejoignent la théorie du rayon spectral joint. L'idée est de partir d'un ensemble fini de matrices et de considérer tous les produits que l'on peut obtenir à partir de ces matrices. Il s'agit ensuite de regarder l'évolution des produits en fonction de leur longueur. Notre algorithme permet notamment d'approximer le rayon spectral joint [7].

L'approximation des quantités données dans les théorèmes précédents permet, dans les sections suivantes, de comparer de manière approchée (dans un sens que nous allons définir) les fonctions calculées par automates min-plus et max-plus.

## 3.2 Comparaison approchée avec la longueur

Il est indécidable de comparer une fonction calculée par un automate min-plus (resp. max-plus) avec la fonction qui à un mot associe sa longueur (voir section 2.2). Dans cette section, nous allons voir une comparaison approchée : l'idée est de laisser une zone de flou près de la longueur, si la fonction est suffisamment petite par rapport à la longueur alors l'algorithme le détectera, s'il existe un mot qui rend la fonction suffisamment grande par rapport à la longueur alors l'algorithme le détectera aussi mais si on se trouve dans la zone de flou la réponse de l'algorithme ne sera pas significative. Plus précisément :

### Théorème 3.2.1.

Il existe un algorithme, prenant en entrée un automate min-plus calculant une fonction  $f$  et un réel strictement positif  $\varepsilon$ , qui répond :

- *oui* si pour tout mot  $f(w) \leq |w|$ ,
- *non* s'il existe un mot  $w$  tel que  $f(w) > (1 + \varepsilon)|w|$ ,
- indifféremment *oui* ou *non* dans les autres cas.

*Démonstration.* Par le théorème 3.1.1, on peut calculer un réel  $r$  tel que :

$$r - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sup_{w \in \mathbb{A}^*} \frac{f(w)}{|w|} \leq r + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considérons l'algorithme qui répond *oui* si  $r \leq 1 + \varepsilon/2$  et *non* sinon.

Si, pour tout mot  $w$ ,  $f(w) \leq |w|$  alors  $\sup\{f(w)/|w| \mid w \in \mathbb{A}^*\} \leq 1$ , d'où  $r \leq 1 + \varepsilon/2$  et l'algorithme répond *oui*. Inversement s'il existe un mot  $w$  tel que  $f(w) > (1 + \varepsilon)|w|$  alors  $\sup\{f(w)/|w| \mid w \in \mathbb{A}^*\} > 1 + \varepsilon$  et  $r > 1 + \varepsilon/2$ , d'où l'algorithme répond *non*.  $\square$

Les figures 3.1, 3.2 et 3.3 schématisent les trois cas. La figure 3.1 représente le cas où l'algorithme répond oui, la figure 3.3 représente le cas où l'algorithme répond non et la figure 3.2, le cas où la réponse n'est pas significative.



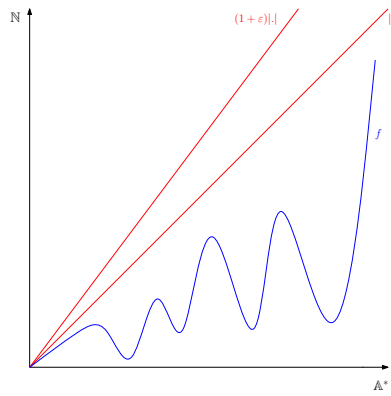


FIGURE 3.1 – L’algorithme répond oui.

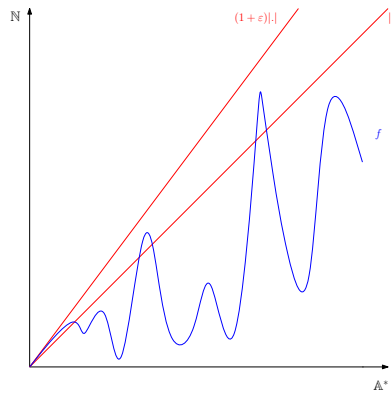


FIGURE 3.2 – L’algorithme répond oui ou non.

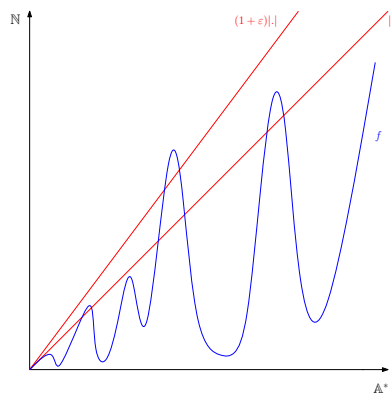


FIGURE 3.3 – L’algorithme répond non.

Un premier commentaire sur ce théorème concerne le cas  $\varepsilon = 0$ . Dans ce cas là, on obtiendrait un algorithme de décision pour la comparaison exacte entre  $f$  et la longueur, ce qui est indécidable. Mais comme  $\varepsilon$  peut être choisi arbitrairement petit, aussi proche de zéro que possible, on se rapproche de plus en plus de ce problème. En ce sens et au vu des résultats d'indécidabilité donnés dans la section 2.2, cette comparaison approchée semble être la comparaison la plus précise que l'on puisse obtenir.

Un deuxième commentaire sur ce théorème concerne le fait que l'on puisse l'adapter à n'importe quel intervalle de taille  $\varepsilon$  autour de la longueur : par exemple, répondre *oui* si pour tout mot  $f(w) \leq (1 - \varepsilon)|w|$  et *non* s'il existe un mot  $w$  tel que  $f(w) > |w|$ .

Enfin, un dernier commentaire concerne ce que l'on peut déduire des réponses de l'algorithme :

- si l'algorithme répond *oui* alors on est sûr que pour tout mot  $w$ ,  $f(w) \leq (1 + \varepsilon)|w|$ ,
- si l'algorithme répond *non* alors il existe un mot  $w$  tel que  $f(w) > |w|$ .

Bien sûr ces deux possibilités ne sont pas disjointes.

La version max-plus se prouve de manière similaire.

### **Théorème 3.2.2.**

Il existe un algorithme, prenant en entrée un automate max-plus calculant une fonction  $f$  et un réel strictement positif  $\varepsilon$ , qui répond :

- *oui* si pour tout mot  $f(w) \geq |w|$ ,
- *non* s'il existe un mot  $w$  tel que  $f(w) < (1 - \varepsilon)|w|$ ,
- indifféremment *oui* ou *non* dans les autres cas.

En utilisant de la même manière les théorèmes 3.1.3 et 3.1.4, on obtient une comparaison approchée qui détecte uniquement si un nombre infini de mots dépasse suffisamment la longueur (et non plus un nombre fini comme ci-dessus). Plus précisément :

### **Théorème 3.2.3.**

Il existe un algorithme, prenant en entrée un automate min-plus calculant une fonction  $f$  et un réel strictement positif  $\varepsilon$ , qui répond :

- *oui* si  $f(w) \leq |w|$  pour tout mot  $w$  sauf éventuellement un nombre fini,
- *non* s'il existe une infinité de mots  $w$  tel que  $f(w) > (1 + \varepsilon)|w|$ ,
- indifféremment *oui* ou *non* dans les autres cas.

### **Théorème 3.2.4.**

Il existe un algorithme, prenant en entrée un automate max-plus calculant une fonction  $f$  et un réel strictement positif  $\varepsilon$ , qui répond :

- *oui* si  $f(w) \geq |w|$  pour tout mot  $w$  sauf éventuellement un nombre fini,
- *non* s'il existe une infinité de mots  $w$  tel que  $f(w) < (1 - \varepsilon)|w|$ ,
- indifféremment *oui* ou *non* dans les autres cas.

Dans cette section, nous avons vu une comparaison approchée entre les fonctions calculées par automates min-plus et max-plus et la fonction qui à un mot associe sa longueur. Dans la section suivante, nous allons voir une comparaison approchée entre deux fonctions calculées par automates min-plus.

## **3.3 Comparaison approchée**

La question qui se pose maintenant est la question de la comparaison entre deux fonctions calculées par des automates min-plus ou max-plus. Le théorème suivant répond à cette question dans le cas min-plus.

### **Théorème 3.3.1** (comparaison approchée).

Il existe un algorithme, prenant en entrée deux automates min-plus calculant des fonctions  $f$  et  $g$  et un réel strictement positif  $\varepsilon$ , qui répond :

- *oui* si  $f \leq g$  (i.e. pour tout mot  $f(w) \leq g(w)$ ),
- *non* si  $f \not\leq (1 + \varepsilon)g$  (i.e. s'il existe un mot  $w$  tel que  $f(w) > (1 + \varepsilon)g(w)$ ),
- indifféremment *oui* ou *non* dans les autres cas.

Le cas  $\varepsilon = 0$  donnerait la comparaison exacte entre les deux fonctions, ce qui est indécidable. Mais comme  $\varepsilon$  peut-être choisi arbitrairement petit, plus il est proche de 0, plus la comparaison est proche de la comparaison exacte des fonctions.

La preuve de ce théorème utilise certains outils mis en place dans les chapitres suivants et est donnée dans le chapitre 8.

Le comportement de cet algorithme est schématisé dans les figures 3.4, 3.5 et 3.6.

## **Résumé du chapitre**

Nous venons de comparer les fonctions majorantes et minorantes du comportement d'automates min-plus et max-plus avec la longueur, en considérant plus précisément le rapport avec la longueur. Cela nous a permis d'en déduire une comparaison approchée assez précise entre deux fonctions calculées par automates min-plus.

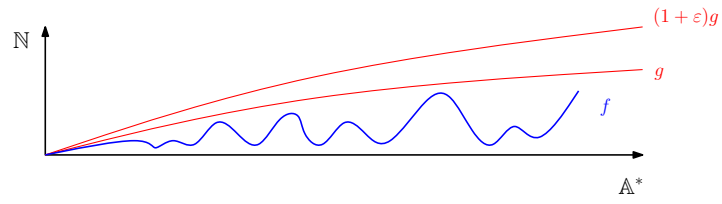


FIGURE 3.4 – L'algorithme répond oui.

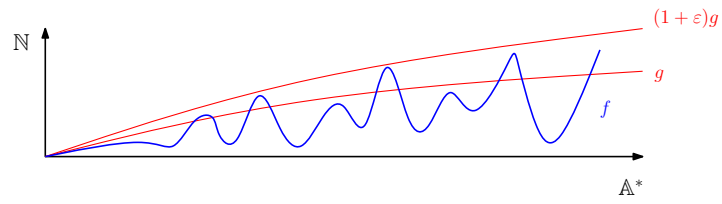


FIGURE 3.5 – L'algorithme répond oui ou non.

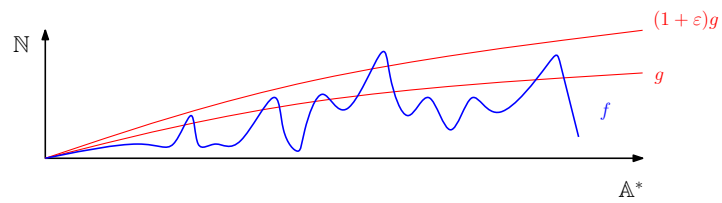


FIGURE 3.6 – L'algorithme répond non.

Si le rapport avec la longueur est non nul, alors les fonctions sont essentiellement « affine en la longueur ». Par contre si ce rapport est nul, alors l'algorithme ne nous donne pas d'idées plus précises sur l'allure des courbes. Le chapitre suivant s'attache à montrer que dans ce cas là, les fonctions sont équivalentes à l'inverse de polynôme en la longueur.



# Chapitre 4

---

## Équivalence asymptotique

Ce mémoire a pour objectif de décrire le comportement des fonctions calculées par automates min-plus et max-plus, en considérant les fonctions majorantes et minorantes de ces automates, comme expliqué dans la section 2.6.

Dans le chapitre précédent, ces fonctions étaient comparées à la longueur des mots en approximant le coefficient multiplicatif. Ici, nous cherchons une fonction plus simple qui leur est asymptotiquement équivalente (dans un sens défini ci-après).

L'étude de ce problème a été faite dans le cadre des automates max-plus. Un résultat similaire semble être envisageable pour les automates min-plus même si pour l'instant aucune preuve n'a été écrite. Il n'y a en tout cas pas de réduction directe d'un cas à l'autre.

Intéressons nous donc à la fonction qui minimise le comportement des automates max-plus : la fonction qui, à  $n$ , associe le plus petit poids des mots de longueur plus grande que  $n$ . Il s'agit d'en obtenir une fonction asymptotiquement équivalente dans le sens  $\theta$ -équivalente suivant :

*soient deux fonctions  $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\}$  et  $g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\}$ ,  
on dit que  $f = \theta(g)$*

*s'il existe un entier  $m$  et des réels strictement positifs  $c$  et  $d$  tels que  
 $\forall n \geq m, f(n) \leq cg(n) + c$  et  $g(n) \leq df(n) + d$ .*

L'idée avec cette notion d'équivalence est de ne pas se soucier des coefficients multiplicatifs. Elle permettra de confondre par exemple les fonctions  $n \mapsto n^{1/2}$  et  $n \mapsto 2n^{1/2}$ . L'ajout d'une constante intervient uniquement pour traiter les cas où les fonctions prendraient des valeurs nulles. Il s'agit de pouvoir confondre toutes les fonctions bornées (en particulier les fonctions constantes 0 et 1). Elle permet aussi de ne regarder les fonctions que suffisamment loin sans se soucier des valeurs sur les mots de longueurs bornées.

Nous allons ainsi voir que la fonction minimale est essentiellement  $\theta$ -équivalente à une fonction de la forme  $n \mapsto n^\alpha$  avec  $\alpha$  rationnel de  $[0, 1]$ .

**Organisation du chapitre.** La section 4.1 donne le résultat principal qui décrit l'allure de la fonction minimale, et explique aussi pourquoi ce résultat devient faux si on autorise des poids négatifs.

La section 4.2 donne ensuite une application de ce résultat au calcul du temps de la plus longue exécution d'un modèle de programme.

## 4.1 Le théorème d'équivalence asymptotique

Considérons un automate max-plus et la fonction  $g : n \mapsto \min\{f(w) \mid |w| \geq n\}$  où  $f$  est la fonction calculée par l'automate. Une première remarque est que cette fonction  $g$  est croissante. De deux choses l'une, ou bien elle est identiquement égale à  $-\infty$  (ce qui correspond au fait qu'il existe une infinité de mots à valeur  $-\infty$ ), ou bien à partir d'un certain entier, elle est positive. Une des contributions les plus importantes de ce mémoire concernant le comportement de  $g$  est le théorème qui suit et qui décrit l'allure de sa courbe.

### **Théorème 4.1.1** (Équivalence asymptotique).

Étant donné un automate max-plus calculant une fonction  $f$ , on peut décider si la fonction :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\} \\ n &\mapsto \min\{f(w) \mid |w| \geq n\} \end{aligned}$$

est identiquement égale à  $-\infty$ . Dans la cas contraire, il existe  $\alpha$  rationnel calculable de  $[0, 1]$ , tel que :

$$g(n) = \Theta(n^\alpha).$$

La preuve de ce théorème sera donnée dans les chapitres 5 et 7. On y explicite un algorithme calculant un ensemble finiment représentable de matrices qui décrit le comportement asymptotique de l'automate et permet de calculer la valeur  $\alpha$ . Il permet également d'exhiber une suite de mots témoins de ce comportement, c'est à dire une suite de mots  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tels que  $f(w_n) = \Theta(|w_n|^\alpha)$ .



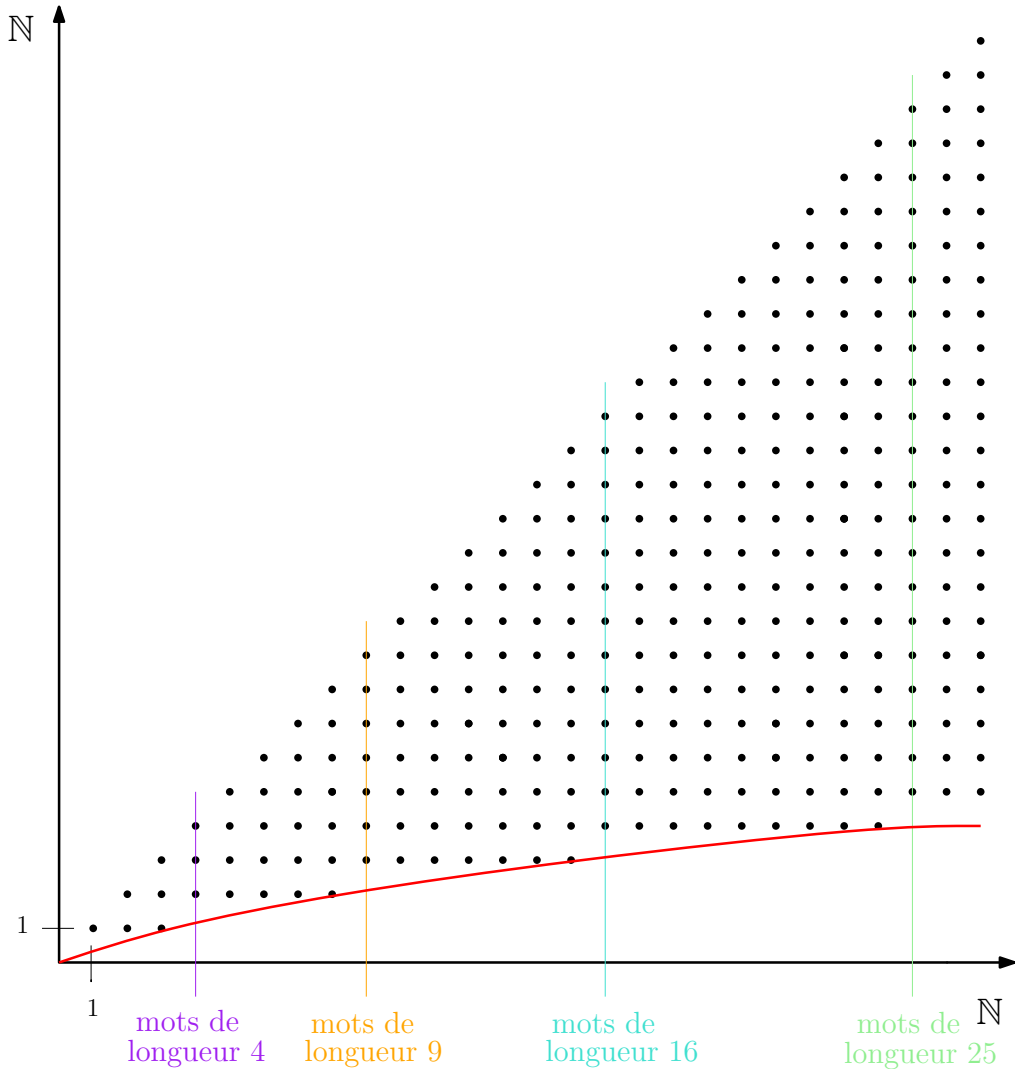


FIGURE 4.1 – Équivalence asymptotique du comportement minimal.

**Exemple 4.1.1.**

Reprenons l'exemple d'automate max-plus donné à la figure 1.1 du premier chapitre. Cet automate calcule la fonction :

$$a^{n_0}ba^{n_1}b \cdots ba^{n_k} \mapsto \max(n_0, n_1, \dots, n_k, k)$$

La figure 4.1 schématise le comportement minimal. Étant donnée une valeur  $n$ , le mot le plus long que l'on peut construire dont la valeur ne dépasse pas  $n$  est le mot  $(a^n b)^n a^n$ , dont la longueur est équivalente à  $n^2$ . Ainsi la courbe minimale est équivalente à la racine carré de la longueur. L'algorithme précédent appliqué à cet automate renverra la valeur  $\alpha = 1/2$ .

**La hiérarchie de Simon.** Dans [51], Simon introduit une hiérarchie des automates min-plus, dans laquelle il fait intervenir la fonction majorante. Pour chaque automate, soit cette fonction est bornée, soit elle est comprise entre une fonction  $O(n^{\frac{1}{p+1}})$  et une fonction  $O(n^{\frac{1}{p}})$  pour un certain entier  $p$ . Simon conjecture aussi que ces fonctions sont  $\Theta(n^{\frac{1}{p}})$ .

Dans ce chapitre, on considère l'équivalent de cette question pour les automates max-plus, et on montre que les fonctions sont  $\Theta(n^\alpha)$  pour un certain rationnel  $\alpha$  (et on a des exemples où  $\alpha$  n'est pas l'inverse d'un entier). La preuve doit pouvoir être adaptée au cas des automates min-plus.

**Cas de  $\mathbb{Z}$ .** Le théorème précédent permet, dans le cadre des automates max-plus à poids positifs, de décider, entre autres, s'il existe une suite infinie de mots de poids supérieurement bornés. C'est le cas si  $\alpha$  vaut 0 ou si  $g$  est identiquement égale à  $-\infty$ . Le résultat suivant explique que ce problème devient indécidable si on autorise des poids négatifs.

**Théorème 4.1.2.**

Étant donné un automate sur le semi-anneau  $\mathbb{Z}_{\max}$ , le problème de l'existence d'une suite infinie de mots de poids supérieurement bornés est indécidable.

*Démonstration.* Étant donnée une fonction  $f$  calculée par un automate pondéré sur  $\mathbb{Z}_{\max}$ , le problème de savoir si  $f > 0$  sur  $\mathbb{A}^+$  est indécidable. Réduisons ce problème au problème de l'existence d'une suite infinie de mots de poids bornés. Soit donc  $f$  calculée par un automate pondéré sur  $\mathbb{Z}_{\max}$  sur  $\mathbb{A}$ . Soit un nouveau symbole  $\star \notin \mathbb{A}$ . Définissons

$\tilde{f}$  sur  $(\mathbb{A} \cup \{\star\})^*$  par :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(w) &= \max_{1 \leq i \leq n} (|w_i|) + \sum_{i=1}^n f(w_i) && \text{si } w = w_1 \star w_2 \star \cdots \star w_n \text{ avec pour tout } i, w_i \in \mathbb{A}^+ \\ &= |w| && \text{sinon} \end{aligned}$$

La fonction  $\tilde{f}$  est calculée par un automate max-plus.

Si  $f > 0$ , alors pour tout  $w \in \mathbb{A}^+$ ,  $f(w) \geq 1$ . Fixons un entier  $N$  et un mot  $w$  de  $(\mathbb{A} \cup \{\star\})^*$  tel que  $\tilde{f}(w) \leq N$ . Si  $w$  possède deux  $\star$  consécutives, ou commence ou finit par une lettre  $\star$  alors  $\tilde{f}(w) = |w|$  et donc  $|w| \leq N$ . Si ce n'est pas le cas,  $w = w_1 \star w_2 \star \cdots \star w_n$  avec les  $w_i$  non vides. Et on a  $\tilde{f}(w) = \max_{i=1 \dots n} (|w_i|) + \sum_{i=1}^n f(w_i) \geq \max_{i=1 \dots n} (|w_i|) + n$ . Donc,  $\max_{i=1 \dots n} (|w_i|) \leq N$  et  $n \leq N$ . D'où,  $|w| \leq N^2 + N$ . Il y a donc un nombre fini de mots  $w$  tels que  $\tilde{f}(w) \leq N$ , et ce pour tout  $N$ . Inversement, s'il existe  $w$  tel que  $f(w) \leq 0$ , alors  $\tilde{f}((w\star)^n w) = |w| + (n+1)f(w) \leq |w|$ . Posons donc  $N = |w|$ , alors il existe une infinité de mots dont la valeur par  $\tilde{f}$  est bornée par  $N$ .  $\square$

**Automates déterministes.** Dans le cas des automates max-plus déterministes, il est facile de voir que la fonction  $g$  est soit bornée, soit  $\Theta$ -équivalente à la fonction qui à un mot associe sa longueur. S'il existe un cycle accessible et co-accessible de poids 0 alors on est dans le premier cas, sinon on est dans le deuxième cas.

**Réciproque.** Nous venons donc de voir que la fonction minorante des automates max-plus est de la forme  $h^\alpha$  où  $h$  est la fonction qui à un mot associe sa longueur, pour  $\alpha$  rationnel de  $[0, 1]$ .

Il est facile de voir que les valeurs 0 et 1 sont atteintes. Un automate max-plus calculant une fonction constante aura la valeur  $\alpha = 0$ , et la fonction qui à un mot associe sa longueur aura la valeur  $\alpha = 1$ .

L'exemple suivant donne un automate qui correspond à la valeur  $\alpha = 2/3$ .

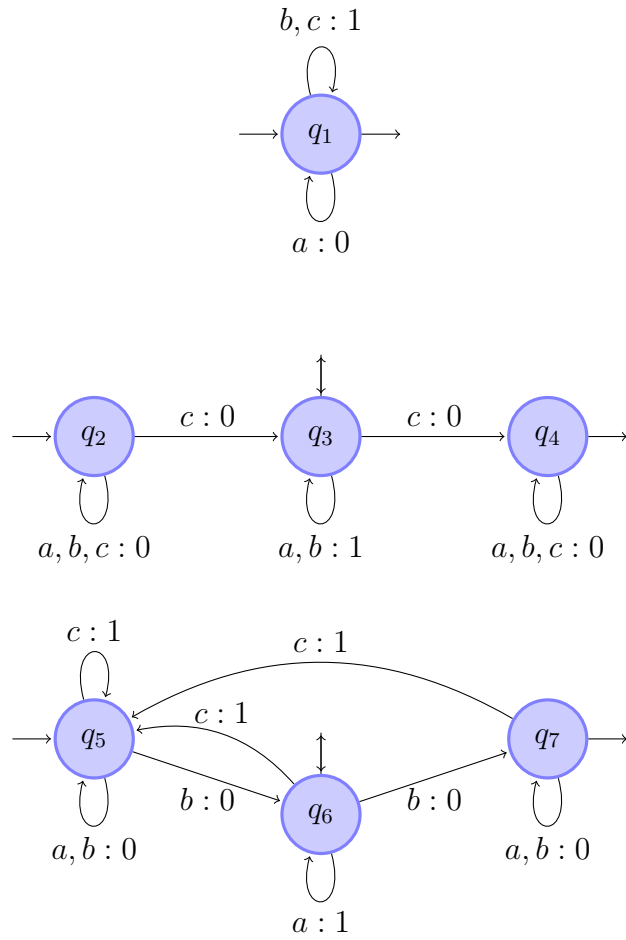


FIGURE 4.2 – Automate max-plus de valeur  $\alpha = 2/3$ .

### Exemple 4.1.2.

Prenons un alphabet à trois lettres  $\mathbb{A} = \{a, b, c\}$ . L'idée est de faire en sorte que les mots  $((a^n b)^n c)^n$ , dont les longueurs sont équivalentes à  $n^3$ , aient poids  $n^2$ , et qu'ils soient les mots témoins du comportement minimal. Pour cela, construisons trois automates :

- le premier calcule la somme du nombre de  $b$  et du nombre de  $c$ ,
- le second calcule le maximum des tailles des blocs contenant des lettres  $a$  et  $b$  consécutives,
- pour le troisième, il s'agit de faire la construction suivante : entre deux  $c$  fixés, on prend le maximum des tailles des blocs de  $a$  consécutifs, puis on somme tous ces maxima. On ajoute à cette valeur le nombre de  $c$ .

Finalement, on construit l'automate qui calcule le maximum des valeurs données par les trois automates ci-dessus. Cet automate a une fonction minorante  $\Theta$ -équivalente à  $n^{2/3}$ . Il correspond à la figure 4.2.

## 4.2 Application au temps de calcul d'un programme

Dans cette section, nous allons appliquer le théorème d'équivalence asymptotique au calcul du temps de la plus longue exécution d'un programme. La preuve complète peut être trouvée dans [12].

La « size-change abstraction » est une abstraction de programme pour l'analyse de la terminaison de programmes fonctionnels [42] et impératifs [3]. Une instance de ce modèle est définie par des combinaisons booléennes de prédicats  $x \leq y$  où  $x$  et  $y$  sont des variables du programme. L'intérêt est que ces prédicats sont extraits localement du programme et que la terminaison des programmes ainsi abstraits est décidable en PSPACE [37].

Nous allons voir sur un exemple comment abstraire un programme dans ce modèle. Considérons le programme suivant :

```
Entrées: x,y
  tant que (x>=0){
    y--;
    si (y=0){
      x--;
      y=random();
    }
  }
```

où la fonction `random()` renvoie n'importe quel entier positif.

Le programme possède deux variables  $x$  et  $y$  dont il s'agit de considérer les variations. Notons donc  $x'$  et  $y'$  les nouvelles valeurs prises par ces variables après un tour dans la

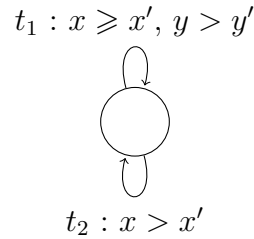
boucle, si  $x$  et  $y$  étaient les valeurs au départ.

À chaque passage dans la boucle deux comportements sont possibles, soit  $y$  est décrémentée et  $x$  garde la même valeur, soit  $x$  est décrémentée et  $y$  peut prendre n'importe quelle valeur.

Cette abstraction autorise à faire diminuer les variables. Ainsi, dans le premier cas, on obtient  $y > y'$  ( $y$  est décrémenté) et  $x \geq x'$  ( $x$  garde la même valeur). Dans le deuxième cas, on a  $x > x'$  ( $x$  est décrémenté) et aucune condition sur  $y$  puisqu'il peut prendre n'importe quelle valeur.

D'autre part, on ne prend pas en compte les conditions de passage.

Le dessin ci-dessous correspond au modèle de la size-change abstraction pour le programme ci-dessus. Chaque transition représente un des cas possibles dans la boucle.



Une instance de la size-change abstraction est donc donnée par des variables qui peuvent prendre des valeurs dans  $\mathbb{N}$ , et des transitions qui sont des conjonctions d'un nombre fini de prédicats de la forme  $x_i > x'_j$  ou  $x_i \geq x'_j$  où  $x_i$  et  $x_j$  sont des variables.

Une trace d'une telle instance est une suite de transitions et de valuations des variables compatibles avec les transitions.

Par exemple,  $(5, 5) \xrightarrow{t_1} (5, 4) \xrightarrow{t_2} (4, 8) \xrightarrow{t_1} (3, 6) \xrightarrow{t_1} (3, 2) \xrightarrow{t_2} (2, 10) \dots$  est une trace de l'instance précédente.

Étant donné une instance de la size-change abstraction, l'existence de trace infinie est décidable [37].

Cependant même si les traces sont toutes de longueurs finies, elles peuvent être de longueurs non bornées. Dans l'exemple ci-dessus, les traces sont toutes de longueurs finies. En effet, la variable  $x$  diminue que l'on prenne la transition  $t_1$  ou la transition  $t_2$ , et diminue strictement par la transition  $t_2$ . Comme les variables ne peuvent prendre que des valeurs entières positives, la transition  $t_2$  est donc utilisée un nombre fini de fois. Donc, à partir d'un certain moment, seule la transition  $t_1$  est utilisée. Or,  $y$  diminue strictement par cette transition, donc elle ne peut être utilisée consécutivement qu'un nombre fini de fois. Les traces sont donc toutes finies. Par contre,  $y$  pouvant prendre n'importe quelle valeur par la fonction `random()`, les traces sont arbitrairement longues. On se pose alors la question de savoir quelle est la longueur de la plus longue trace pour laquelle les valeurs des variables sont restreintes à l'intervalle  $[0, n]$ , en fonction de  $n$ . Le résultat suivant répond à cette question.

**Théorème 4.2.1.**

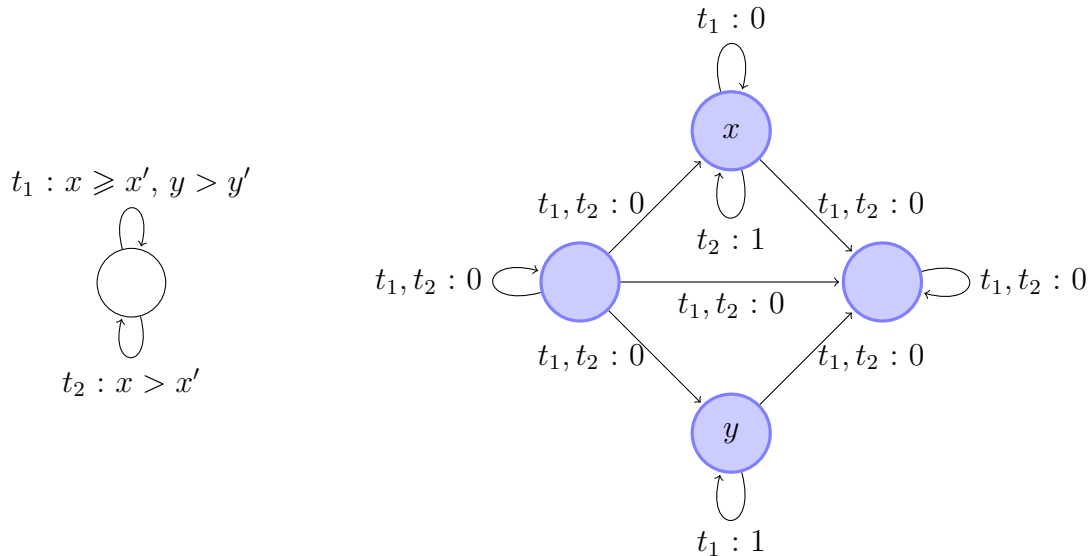
Étant donnée une instance de la size-change abstraction, la plus longue trace est d'ordre  $\Theta(n^\beta)$  où  $n$  est la valeur maximale prise par une variable et  $\beta$  est un rationnel supérieur à 1. De plus,  $\beta$  est calculable.

Ce problème sur les instances de la size-change abstraction se réduit au problème considéré dans ce chapitre sur les automates max-plus. Nous allons voir l'idée de la réduction sur un exemple.

Étant donnée une instance de la size-change abstraction, il s'agit de construire un automate max-plus, tel que si  $\alpha$  est le rationnel de  $[0, 1]$  donné par le théorème d'équivalence asymptotique alors  $\beta = \frac{1}{\alpha}$  est le rationnel du théorème précédent.

Dans la figure qui suit, on transforme l'instance de la size-change abstraction à gauche en l'automate max-plus à droite.

Pour chaque variable de l'instance de la size-change abstraction, on construit un état de l'automate. On rajoute deux états de plus (un état d'attente au début du mot, et un état d'attente à la fin du mot). Les lettres de l'automate sont les transitions de l'instance de la size-change abstraction. On construit une transition de l'état représentant la variable  $x$  vers l'état représentant la variable  $y$ , étiquetée par  $t$ , de poids 0, si  $x \geq y$  est un prédicat de  $t$ . On construit une transition de l'état représentant la variable  $x$  vers l'état représentant la variable  $y$ , étiquetée par  $t$ , de poids 1, si  $x > y$  est un prédicat de  $t$ .



Par cette transformation, on montre que, dans l'instance de la size-change abstraction, il existe une exécution de longueur au moins  $k$ , dont les valeurs des variables ne

dépassent pas  $n$  si et seulement si il existe un mot de longueur au moins  $k$  dont le poids ne dépasse pas  $n$  dans l'automate max-plus.

En appliquant le théorème d'équivalence asymptotique, on obtient alors directement le théorème précédent.

## Résumé du chapitre

Dans ce chapitre nous avons vu que la fonction minorante d'un automate max-plus est équivalente à une fonction  $n \mapsto n^\alpha$  pour un rationnel  $\alpha$  de  $[0, 1]$ . Ce résultat a ensuite été appliqué au calcul du temps de la plus longue exécution d'une abstraction de programme.

Le résultat principal de ce chapitre, le théorème d'équivalence asymptotique 4.1.1 et le résultat principal du chapitre 3, le théorème d'approximation du rapport fonction-longueur 3.1.1 ont une même structure de preuve. Cette structure commune est donnée dans le chapitre 5. Le chapitre 6 donne ensuite la preuve du théorème 3.1.1 et le chapitre 7 la preuve du théorème 4.1.1.



# Chapitre 5

---

## Une même structure de preuve

Les résultats principaux de ce mémoire, à savoir les théorèmes d'approximation du rapport fonction-longueur 3.1.1, et d'équivalence asymptotique 4.1.1 ont été donnés dans les chapitres précédents. Les chapitres 5, 6 et 7 sont dévolus à donner les preuves de ces résultats. Le premier théorème (approximation du rapport fonction-longueur) est donné dans le cadre des automates min-plus et alors que le deuxième théorème (équivalence asymptotique) est donné dans le cadre des automates max-plus. Les deux cas continuent ainsi d'être traités en parallèle.

Dans les deux théorèmes, il s'agit de décrire le comportement des automates et des fonctions qu'ils calculent, ou encore de décrire le comportement des matrices  $\mu(w)$  pour tous les mots  $w$ , par rapport à la longueur de  $w$ . Plus précisément, l'idée est d'approximer de manière finie les comportements maximaux (resp. minimaux) de l'ensemble des matrices. L'approche des deux théorèmes et des deux preuves est très similaire. Ce chapitre donne donc la structure commune aux preuves des deux théorèmes.

**Matrices pondérées.** Dans ces deux preuves, l'élément principal est la représentation du comportement des automates en fonction de la longueur des mots. Ce chapitre introduit la notion de matrices pondérées, éléments qui prennent en compte cette double information : comportement de l'automate sur un mot et longueur du mot. Le produit défini sur ces matrices pondérées calque le produit de concaténation des mots, et permet d'utiliser des outils de théorie des semi-groupes.

**Approximation et ensembles présentables.** Deux ingrédients sont ensuite nécessaires pour aboutir à une description de l'automate. Le premier consiste à donner une représentation finie de l'automate qui permette de calculer les valeurs que l'on cherche. Cependant, obtenir une telle représentation de manière exacte est impossible au vu des résultats d'indécidabilité de comparaison de fonctions. Le second ingrédient fournit donc la notion d'approximation des ensembles de matrices pondérées qui permet d'obtenir effectivement une représentation approchée.

**Théorème des forêts de factorisation de Simon.** Enfin, la structure de semi-groupe de l'ensemble des matrices pondérées permet d'utiliser le théorème des forêts de factorisation de Simon.

Le théorème des forêts de factorisation de Simon permet, à partir d'un calcul nécessitant a priori un nombre infini d'étapes, de se ramener à un nombre fini. Il nous permet de montrer qu'à partir de la connaissance du comportement de l'automate sur les lettres, on peut approcher le comportement sur tous les mots en un temps fini.

Il permet également de gérer la structure des automates, la combinatoire des chemins (sans se soucier des valeurs). Il permet ainsi de se ramener à des structures plus simples de matrices.

Il y a donc deux temps dans la preuve : le premier qui ne s'intéresse pas aux poids des transitions mais simplifie la structure des matrices considérées, et le deuxième qui traite les poids des transitions sur ces structures plus simples.

**Matrices uniformes.** Les structures plus simples auxquelles nous pourrions nous ramener sont semblables pour les deux théorèmes. Elles nous amèneront à introduire des matrices particulières dites uniformes, pour lesquelles la combinatoire des chemins sera simplifiée.

**Organisation du chapitre.** Ce chapitre expose donc la structure générale des deux preuves avec, tout d'abord, la notion de matrices pondérées dans la section 5.1. Sont ensuite décrits dans la section 5.2, les deux ingrédients utilisés dans la preuve : ce qu'est une bonne approximation pour notre problème et la notion d'ensembles présentables, qui sont des ensembles descriptibles de manière finie. Enfin la section 5.3 introduit un énoncé équivalent au théorème des forêts de factorisation de Simon. Sous certaines hypothèses détaillées dans la section 5.4, nous verrons alors que le théorème des forêts de factorisation permet de conclure, et de faire la preuve des deux théorèmes. La section 5.5 introduit ensuite l'outil que seront les matrices uniformes et que nous utiliserons dans les chapitres suivants.

Les descriptions précises des approximations et des ensembles présentables seront données dans les chapitres 6 et 7 au cas par cas.

Les cas min-plus et max-plus sont traités ici en parallèle en utilisant la même terminologie. Le contexte permettra dans les chapitres suivants de savoir dans quel cas on se place.

**Notations.** Dans tout le chapitre, on fixe un automate min-plus (resp. max-plus), sur un alphabet  $\mathbb{A}$ , que l'on cherche à décrire. On note  $K$  son nombre d'états,  $f$  la fonction qu'il calcule et  $\mu$  le morphisme de l'ensemble des mots dans l'ensemble des matrices carrées de taille  $K$  qui lui est associé.

## 5.1 Matrices pondérées

L'objectif est de décrire le comportement des automates vis-à-vis de la longueur des mots. Cette section introduit les matrices pondérées, un ensemble d'éléments contenant

ces deux informations, muni d'une structure de semi-groupe qui permet l'utilisation d'outils algébriques.

De plus, pour les calculs et approximations qui seront faits sur ces éléments, on se donne une marge de manœuvre supplémentaire en s'autorisant des valeurs réelles positives et plus seulement entières. On considère ainsi le semi-anneau  $(\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \min, +)$  (resp.  $(\mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\}, \max, +)$ ).

**Définition 5.1.1** (matrices pondérées).

Une **matrice pondérée** (de taille  $K$ ) est un couple  $(M, \ell)$  dans lequel :

- $M$  est une matrice carrée de taille  $K$  à valeur dans  $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  (resp.  $\mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\}$ ),
- $\ell$  est un entier strictement positif appelé **longueur** de la matrice pondérée.

Soient  $(M, \ell)$  et  $(N, k)$  deux matrices pondérées. Le produit de ces matrices (par abus de langage, on le note de la même manière que le produit entre deux matrices) est :

$$(M, \ell) \otimes (N, k) = (M \otimes N, \ell + k)$$

**Proposition 5.1.1.**

L'ensemble des matrices pondérées (de taille  $K$ ) muni du produit  $\otimes$  est un semi-groupe.

Les matrices pondérées sont utilisées pour coder les couples  $(\mu(w), |w|)$ . Le produit correspond alors à la concaténation des mots :  $\mu(w) \otimes \mu(v) = \mu(wv)$  et  $|w| + |v| = |wv|$ . C'est pour cela qu'on pourra employer le terme longueur pour désigner la deuxième composante.

**Proposition 5.1.2.**

L'application de  $\mathbb{A}^+$  dans l'ensemble des matrices pondérées qui à un mot  $w$  associe  $(\mu(w), |w|)$  est un morphisme de semi-groupes.

Dans la suite, des ensembles de matrices pondérées vont être considérés. On étend alors les notations précédentes. Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles de matrices pondérées, on note  $A \otimes B$  l'ensemble  $\{(M, \ell) \otimes (N, k) \mid (M, \ell) \in A, (N, k) \in B\}$ . On note enfin  $\langle A \rangle$  la clôture de  $A$  par produit  $\otimes$ .

**Structure sous-jacente d'une matrice.** Il y a deux problèmes distincts à prendre en compte quand on considère les automates min-plus (resp. max-plus).

Le premier concerne les poids des transitions et le fait de traiter ces valeurs numériques.

Le deuxième (dont on va parler plus précisément dans ce chapitre) concerne la combinatoire des chemins (en termes de matrices, cela correspond à savoir si un coefficient vaut  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) ou pas). Ce problème est uniquement structurel et n'a plus à voir avec les valeurs réelles que peuvent prendre les coefficients des matrices. Il est en partie traité dans ce chapitre à l'aide du théorème des forêts de factorisation de Simon, qui permet de se ramener à des structures de matrices beaucoup plus simples.

On donne ici des définitions qui nous permettent d'aborder cette question. On définit un nouveau semi-anneau :  $(\{0, +\infty\}, \min, +)$  (qui est la restriction de  $\mathbb{N}_{\min}$  à  $\{0, +\infty\}$ ) (resp.  $(\{-\infty, 0\}, \max, +)$  (qui est la restriction de  $\mathbb{N}_{\max}$  à  $\{-\infty, 0\}$ )).

On peut ainsi considérer le semi-groupe de matrices sur ce semi-anneau. On l'appelle semi-groupe des **matrices de chemins**. C'est en fait la restriction du semi-groupe des matrices aux matrices à valeurs dans  $\{0, +\infty\}$  (resp.  $\{-\infty, 0\}$ ).

### Définition 5.1.2.

Soit une matrice  $M$  à coefficients dans  $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  (resp.  $\mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\}$ ), on définit  $\varphi(M)$  la **projection** de  $M$  dans  $(\{0, +\infty\}, \min, +)$  (resp.  $(\{-\infty, 0\}, \max, +)$ ), à savoir  $\varphi(M)_{i,j} = +\infty$  si  $M_{i,j} = +\infty$  (resp.  $\varphi(M)_{i,j} = -\infty$  si  $M_{i,j} = -\infty$ ),  $\varphi(M)_{i,j} = 0$  sinon.

Ces projections sont des morphismes de semi-groupes qui nous permettront de considérer l'existence ou non de chemins entre deux états, ce qui sera utile dans les preuves.

On étend ces définitions aux matrices pondérées par  $\varphi((M, \ell)) = \varphi(M)$  et aux ensembles de matrices pondérées par  $\varphi(A) = \{\varphi(M) \mid (M, \ell) \in A\}$ .

Dans la suite, on cherche à décrire l'ensemble  $\{(\mu(w), |w|) \mid w \in \mathbb{A}^*\}$  ou encore l'ensemble  $\{(\mu(a), 1) \mid a \in \mathbb{A}\}$ .

## 5.2 Approximation et ensembles présentables

On veut décrire l'ensemble  $\{(\mu(w), |w|) \mid w \in \mathbb{A}^*\}$  par un autre ensemble de matrices pondérées finiment représenté que l'on puisse calculer. Le faire de manière exacte est impossible, mais on veut une description suffisamment proche pour qu'elle soit intéressante.

Deux notions sont donc à développer : la notion d'approximation d'ensembles de matrices pondérées, et la notion d'ensembles présentables. On donne ici les idées générales sur ces deux notions compatibles avec nos deux preuves (dans les cas min-plus et

max-plus). Les définitions exactes, qui dépendent du théorème que l'on veut démontrer, seront données dans les chapitres 6 et 7.

**Approximation.** L'approximation entre deux ensembles de matrices pondérées est une relation qui devra être suffisamment précise pour permettre de calculer la valeur  $r$  du théorème 3.1.1 à  $\varepsilon$ -près, et la valeur  $\alpha$  du théorème 4.1.1.

Elle dépend d'un paramètre réel qui donne la précision avec laquelle on approxime l'ensemble. Les propriétés et l'utilisation de ce paramètre dépendent du cas dans lequel on se place.

Dans le cadre du théorème d'approximation du rapport fonction-longueur, la précision est de nature additive. On considère donc des paramètres strictement positifs (le paramètre 0 correspondant à l'égalité des deux ensembles). De plus, on veut calculer  $r$  avec une précision arbitrairement grande. Ainsi, dans les différentes propositions, il s'agira de prouver que l'on peut approximer certains ensembles pour n'importe quel paramètre strictement positif. On appellera ce cas le **cas universel**.

Dans le cadre du théorème d'équivalence asymptotique, la précision est de nature multiplicative (cela provient de l'équivalence  $\Theta$ ). On considèrera donc des paramètres supérieurs à 1. De plus, du fait de l'utilisation de  $\Theta$ , on cherche à prouver qu'il existe un paramètre d'approximation (éventuellement très grand). On appellera ce cas le **cas existentiel**. On peut dès lors oublier le paramètre d'approximation dans les propositions puisqu'on ne cherche pas à le contrôler, le fait de savoir qu'il en existe un suffit.

D'autre part, comme on considère le comportement maximal des automates min-plus et le comportement minimal des automates max-plus, on n'a pas besoin de conserver toute l'information mais uniquement « l'enveloppe supérieure » pour les automates min-plus et « l'enveloppe inférieure » pour les automates max-plus. Cette idée sera reprise dans les chapitres 6 et 7 et est illustrée dans les figures 6.1 et 7.1 de ces chapitres.

Enfin, pour pouvoir utiliser le théorème des forêts de factorisation de Simon et démontrer qu'en un nombre fini d'étapes on peut approximer  $\langle\langle \mu(a), |a| \mid a \in \mathbb{A} \rangle\rangle$ , on utilise certaines propriétés que devront satisfaire les approximations choisies et qui sont données dans les définitions suivantes :

**Définition 5.2.1** (bonne approximation dans le cas universel).

Une **bonne approximation** est une relation entre deux ensembles de matrices pondérées, dépendant d'un paramètre réel  $\varepsilon > 0$ , notée  $\approx_\varepsilon$ , vérifiant pour tout ensemble de matrices pondérées  $A, B, C, D$  :

- transitivité : pour tout  $\varepsilon, \varepsilon', A \approx_\varepsilon B$  et  $B \approx_{\varepsilon'} C$  implique  $A \approx_{\varepsilon+\varepsilon'} C$ ,
- union : si  $A \approx_\varepsilon C$  et  $B \approx_\varepsilon D$  alors  $A \cup B \approx_\varepsilon C \cup D$ ,
- produit : si  $A \approx_\varepsilon C$  et  $B \approx_\varepsilon D$  alors  $A \otimes B \approx_\varepsilon C \otimes D$ .

Par induction sur le troisième élément, on a immédiatement la proposition suivante :

**Proposition 5.2.1.**

Si  $\approx_\varepsilon$  est une bonne approximation, et si  $A \approx_\varepsilon B$  alors  $\langle A \rangle \approx_\varepsilon \langle B \rangle$ .

**Définition 5.2.2** (bonne approximation dans le cas existentiel).

Une **bonne approximation** est une relation entre deux ensembles de matrices pondérées, notée  $\approx$ , vérifiant pour tout ensemble de matrices pondérées  $A, B, C, D$  :

- transitivité :  $A \approx B$  et  $B \approx C$  implique  $A \approx C$ ,
- union : si  $A \approx C$  et  $B \approx D$  alors  $A \cup B \approx C \cup D$ ,
- produit : si  $A \approx C$  et  $B \approx D$  alors  $A \otimes B \approx C \otimes D$ .

Par induction sur le troisième élément, on a immédiatement la proposition suivante :

**Proposition 5.2.2.**

Si  $\approx$  est une bonne approximation, et si  $A \approx B$  alors  $\langle A \rangle \approx \langle B \rangle$ .

Dans les deux chapitres suivants, il s'agira donc de vérifier deux choses pour les approximations choisies : (1) ce sont de bonnes approximations et (2) elles préservent les comportements des automates qui nous intéressent.

**Ensembles présentables.** Nous venons de voir la notion d'approximation. Nous allons maintenant nous intéresser aux ensembles par lesquels est approximé le comportement de l'automate.

Les ensembles présentables sont des ensembles de matrices pondérées, finiment représentables, calculables en un temps fini et suffisamment précis pour permettre de calculer ce qui nous intéresse.

Comme pour l'approximation, on aura besoin de certaines propriétés pour pouvoir utiliser le théorème des forêts de factorisation :

- Clôture par union finie : si  $A$  et  $B$  sont deux ensembles présentables alors  $A \cup B$  est un ensemble présentable.
- Clôture par restriction à l'image inverse par  $\varphi$  d'un idempotent : si  $A$  est un ensemble présentable et  $E$  une matrice idempotente à coefficients dans  $\{0, +\infty\}$  (resp.  $\{-\infty, 0\}$ ) alors  $A \cap \varphi^{-1}(E)$  est un ensemble présentable.

Dans les deux chapitres suivants, il s'agira donc de vérifier trois choses pour les ensembles présentables : (1) ils sont clos par union finie, (2) ils sont clos par restriction à l'image inverse par  $\varphi$  d'un idempotent et (3) ils nous permettent de calculer les valeurs qui nous intéressent.

Les définitions exactes seront données au cas par cas.

### 5.3 Théorème des forêts de factorisation de Simon

Le théorème des forêts de factorisation de Simon [50] permet, dans un semi-groupe fini, de faire un calcul en un nombre fini d'étapes, uniforme sur tous les produits aussi longs soient-ils. On ne donne pas ici la version originale du théorème en termes d'arbres de factorisation mais une version équivalente que nous allons utiliser.

**Théorème 5.3.1** (équivalent au théorème des forêts de factorisation de Simon).

Soient  $(S, \otimes)$  un semi-groupe,  $(T, \cdot)$  un semi-groupe fini (de cardinal  $|T|$  et dont on note l'ensemble des idempotents  $E(T)$ ) et  $g$  un morphisme de semi-groupes de  $S$  dans  $T$ . Étant donné  $A \subseteq S$ , si on pose  $A_0 = A$  et pour tout  $n$  :

$$A_{n+1} = A_n \cup (A_n \otimes A_n) \cup \bigcup_{e \in E(T)} \langle A_n \cap g^{-1}(e) \rangle$$

alors  $\langle A \rangle = A_{3|T|-1}$ .

Ce théorème dit qu'à partir d'une partie  $A$  d'un semi-groupe, si on sait calculer le produit de deux ensembles, la restriction d'un ensemble aux éléments qui s'envoient tous sur le même idempotent, la clôture par produit d'un ensemble d'éléments qui s'envoient tous sur le même idempotent, et l'union finie, alors en un nombre fini d'étapes on peut calculer la clôture par produit de  $A$ .

Simon avait originalement trouvé une borne de  $9|T|$ , améliorée tout d'abord en  $3|T|$  par Colcombet, puis en la borne optimale  $3|T| - 1$  dans [36].

### 5.4 Induction et preuve des théorèmes 3.1.1 et 4.1.1

On va maintenant utiliser ce théorème dans le cadre des matrices pondérées. On prend pour  $(S, \otimes)$  le semi-groupe des matrices pondérées, pour  $(T, \odot)$  le semi-groupe des matrices de chemins et pour  $g$  le morphisme  $\varphi$ . La partie  $A$  de départ est l'ensemble correspondant aux matrices pondérées de lettres  $\{(\mu(a), 1) \mid a \in \mathbb{A}\}$  dont on cherche à obtenir la clôture. Mais comme nous l'avons dit, calculer précisément la clôture de  $A$  est impossible.

On va voir maintenant comment utiliser ce théorème pour trouver un ensemble présentable équivalent à  $\langle A \rangle$ . L'idée est qu'à chaque étape de calcul, au lieu de calculer précisément les ensembles  $A_n \otimes A_n$  et  $\langle g^{-1}(e) \cap A_n \rangle$ , on va les approximer par des ensembles présentables. On va donc construire, par induction, des ensembles présentables qui approchent, à chaque étape, les ensembles donnés dans le théorème.

Comme expliqué précédemment, dans le cadre du théorème d'approximation du rapport fonction-longueur, il faudra avoir cette approximation avec une précision arbitrairement petite (cas universel), alors que dans le cadre du théorème d'équivalence asymptotique, l'existence d'un paramètre d'approximation suffira (cas existentiel).

Plus précisément, il s'agira de démontrer les propriétés suivantes :

**Propriété 5.4.1** (propriété du produit dans le cas universel).

Étant donnés deux ensembles présentables  $A$  et  $B$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un ensemble présentable  $produit(A, B, \varepsilon)$  tel que :

$$produit(A, B, \varepsilon) \approx_\varepsilon A \otimes B.$$

**Propriété 5.4.2** (propriété du produit idempotent dans le cas universel).

Étant donné un ensemble présentable  $A$  tel que  $\varphi(A) = \{e\}$  avec  $e$  idempotent, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un ensemble présentable  $idempotent(A, \varepsilon)$  tel que :

$$idempotent(A, \varepsilon) \approx_\varepsilon \langle A \rangle.$$

**Propriété 5.4.3** (propriété du produit dans le cas existentiel).

Étant donnés deux ensembles présentables  $A$  et  $B$ , il existe un ensemble présentable  $produit(A, B)$  tel que :

$$produit(A, B) \approx A \otimes B.$$

**Propriété 5.4.4** (propriété du produit idempotent dans le cas existentiel).

Étant donné un ensemble présentable  $A$  tel que  $\varphi(A) = \{e\}$  avec  $e$  idempotent, il existe un ensemble présentable  $idempotent(A)$  tel que :

$$idempotent(A) \approx \langle A \rangle.$$

Sous certaines hypothèses, dont le fait que les propriétés précédentes soient vérifiées, le théorème des forêts de factorisation de Simon nous permet de conclure. On traite successivement les cas universel et existentiel. Les preuves sont similaires, la seule différence provient du fait que dans le cas universel, comme on veut avoir à l'arrivée une



approximation à  $\varepsilon$ -près, il faudra commencer, au début de l'induction, avec une approximation suffisamment petite et ensuite contrôler à chaque étape la perte de précision. Dans le cas existentiel, on ne se soucie pas de cette perte de précision, ni de la précision de l'approximation avec laquelle on commence.

### Cas universel.

#### Théorème 5.4.1 (cas universel).

Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\approx_\varepsilon$  est une bonne approximation,
- les ensembles présentables sont clos par union finie,
- les ensembles présentables sont clos par restriction à l'image inverse d'un idempotent par  $\varphi$ ,
- les propriétés du produit et du produit idempotent dans le cas universel sont vérifiées.

Sous ces conditions, étant donné  $A$  un ensemble présentable de matrices pondérées, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un ensemble de matrices pondérées calculable et présentable  $B$  tel que  $B \approx_\varepsilon \langle A \rangle$ .

*Démonstration.* On donne l'algorithme qui calcule  $B$  pour une approximation de paramètre  $\varepsilon$  et on prouve sa correction. On note  $R = 3|T| - 1$ .

Posons  $B_0 = A$ , puis pour tout  $n$ ,

$$B_{n+1} = B_n \cup \text{produit}(B_n, B_n, 2^{n-R}\varepsilon) \cup \bigcup_{e \in E(T)} \text{idempotent}(B_n \cap \varphi^{-1}(e), 2^{n-R}\varepsilon).$$

Soit  $B = B_R$ .

Montrons la correction de l'algorithme, à savoir :  $B \approx_\varepsilon \langle A \rangle$  et  $B$  est un ensemble présentable de matrices pondérées.

Par induction sur  $n$ , pour tout  $n$ ,  $B_n$  est présentable. Cela découle directement du fait que les ensembles présentables sont clos par union finie, par restriction à l'image inverse d'un idempotent par  $\varphi$  et des propriétés 5.4.1 et 5.4.2.

Montrons maintenant par induction sur  $n$  que  $B_n \approx_{2^{n-R}\varepsilon} A_n$  où  $A_n$  est donné par le théorème 5.3.1. Tout d'abord,  $B_0 = A = A_0$ . Soit  $n$  un entier, montrons maintenant que  $B_{n+1} \approx_{2^{n+1-R}\varepsilon} A_{n+1}$ .

Par hypothèse d'induction,  $B_n \approx_{2^{n-R}\varepsilon} A_n$ . De plus,

$$\text{produit}(B_n, B_n, 2^{n-R}\varepsilon) \approx_{2^{n-R}\varepsilon} B_n \otimes B_n$$

par la propriété 5.4.1, et comme  $\approx$  est une bonne approximation,

$$B_n \otimes B_n \approx_{2^{n-R}\varepsilon} A_n \otimes A_n.$$

Enfin, par transitivité,  $\text{produit}(B_n, B_n, 2^{n-R}\varepsilon) \approx_{2^{n+1-R}\varepsilon} A_n \otimes A_n$ .

De même,  $\text{idempotent}(\varphi^{-1}(e) \cap B_n, 2^{n-R}\varepsilon) \approx_{2^{n+1-R}\varepsilon} \langle \varphi^{-1}(e) \cap A_n \rangle$ .

Enfin, comme  $\approx_\varepsilon$  est compatible avec l'union, on obtient  $B_{n+1} \approx_{2^{n+1-R}\varepsilon} A_{n+1}$ .

Ainsi,  $B_R \approx_\varepsilon A_R = \langle A \rangle$ . □

### Cas existentiel.

#### Théorème 5.4.2 (cas existentiel).

Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\approx$  est une bonne approximation,
- les ensembles présentables sont clos par union finie,
- les ensembles présentables sont clos par restriction à l'image inverse par  $\varphi$  d'un idempotent,
- les propriétés du produit et du produit idempotent dans le cas existentiel sont vérifiées.

Sous ces conditions, étant donné  $A$  un ensemble présentable de matrices pondérées, il existe un ensemble présentable  $B$  calculable de matrices pondérées tel que  $B \approx \langle A \rangle$ .

*Démonstration.* La preuve est similaire, on donne l'algorithme qui calcule  $B$  et on prouve sa correction.

Posons  $B_0 = A$ , puis pour tout  $n$ ,

$$B_{n+1} = B_n \cup \text{produit}(B_n, B_n) \cup \bigcup_{e \in E(T)} \text{idempotent}(\varphi^{-1}(e) \cap B_n).$$

Alors  $B = B_R$ .

Montrons la correction de l'algorithme, à savoir :  $B \approx \langle A \rangle$  et  $B$  est un ensemble présentable de matrices pondérées.

Par induction sur  $n$ , pour tout  $n$ ,  $B_n$  est présentable. Cela découle directement du fait que les ensembles présentables sont clos par union finie, par restriction à l'image inverse par  $\varphi$  d'un idempotent et des propriétés 5.4.3 et 5.4.4.

Montrons maintenant par induction sur  $n$  que  $B_n \approx A_n$  où  $A_n$  est donné par le théorème 5.3.1. Tout d'abord,  $B_0 = A = A_0$ . Soit  $n$  un entier, montrons maintenant que  $B_{n+1} \approx A_{n+1}$ .

Par hypothèse d'induction,  $B_n \approx A_n$ . De plus,  $\text{produit}(B_n, B_n) \approx B_n \otimes B_n$  par la propriété 5.4.3, et comme  $\approx$  est une bonne approximation,  $B_n \otimes B_n \approx A_n \otimes A_n$ . Enfin, par transitivité,  $\text{produit}(B_n, B_n) \approx A_n \otimes A_n$ .

De même,  $\text{idempotent}(\varphi^{-1}(e) \cap B_n) \approx \langle \varphi^{-1}(e) \cap A_n \rangle$ .

Enfin, comme  $\approx$  est compatible à l'union, il vient  $B_{n+1} \approx A_{n+1}$ . □

Ce qu'il reste donc à faire, dans les chapitres suivants, est de donner les définitions précises d'approximation et d'ensembles présentables telles que l'approximation soit une

bonne approximation, les ensembles présentables soient clos par union et restriction à l'image inverse d'un idempotent. De plus on veut que l'approximation préserve les comportements des automates qui nous intéressent et que les ensembles présentables décrivent de manière effective ces comportements. Il restera ensuite à démontrer les propriétés 5.4.1, 5.4.2, 5.4.3 et 5.4.4.

Nous venons de voir que l'utilisation du théorème des forêts de factorisation de Simon permet de restreindre l'étude de longs produits de matrices à des matrices qui ont toutes la même projection par  $\varphi$  idempotente. Dans les chapitres suivants, l'étude de ces longs produits sera encore simplifiée par l'utilisation de matrices particulières, introduites dans la section suivante, les matrices uniformes.

## 5.5 Matrices uniformes

Dans la section précédente, nous nous sommes ramenés au calcul de produits quelconques de matrices de projection idempotente par  $\varphi$ . Ces matrices ont ainsi une structure particulière. Cependant les valeurs réelles dans les matrices (les poids sur les transitions) ne sont pas affectées par cette simplification du problème et restent erratiques. Les matrices uniformes sont des matrices dans lesquelles les valeurs sont uniformisées en fonction de la structure de la matrice. On donne ici la définition des matrices uniformes, les propriétés principales et on explique en quoi ces matrices sont plus faciles à manipuler.

**Structure idempotente.** Considérons  $M$  une matrice telle que  $\varphi(M) = E$  est une matrice de chemins idempotente. Il convient tout d'abord de comprendre quelle est la structure de  $M$ . Étant donnés deux indices  $i$  et  $j$ , on définit  $i \leftrightarrow j$  si  $E_{i,j} = 0$  et  $E_{j,i} = 0$ , ou  $i = j$ . On commence par donner quelques propriétés de cette relation.

### Proposition 5.5.1.

$\leftrightarrow$  est une relation d'équivalence.

*Démonstration.* Il suffit de montrer la transitivité. Supposons  $i \leftrightarrow j$  et  $j \leftrightarrow k$ , alors  $E_{i,k} = (E \otimes E)_{i,k}$  par idempotence de  $E$ , et comme  $E_{i,j} + E_{j,k} = 0$  alors  $(E \otimes E)_{i,k} = 0$ . Donc  $E_{i,k} = 0$ . On procède de même pour montrer que  $E_{k,i} = 0$ .  $\square$

### Proposition 5.5.2.

Si  $i \leftrightarrow j$ , alors pour tout  $k$ ,  $E_{i,k} = E_{j,k}$  et  $E_{k,i} = E_{k,j}$ .

*Démonstration.* Pour un automate min-plus,  $E_{i,k} \leq E_{i,j} + E_{j,k} = E_{j,k}$ . Pour un automate max-plus,  $E_{i,k} \geq E_{i,j} + E_{j,k} = E_{j,k}$ .  $\square$

En termes d'existence de chemins,  $i$  et  $j$  jouent donc exactement le même rôle. D'un point de vue graphe, les classes d'équivalence de  $\leftrightarrow$  sont les composantes fortement connexes.

Un exemple de telle matrice est donné ci-dessous.

**Exemple 5.5.1.**

Dans la matrice suivante les valeurs  $\infty$  sont mises pour  $+\infty$  dans le cadre des automates min-plus et  $-\infty$  dans le cadre des automates max-plus.  $M$  est une matrice d'image idempotente par  $\varphi$ .

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 3 & 4 \\ \infty & \infty & 11 & 12 \\ \infty & \infty & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad \varphi(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & 0 & 0 \\ \infty & \infty & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si elle représente la lettre  $a$ , elle correspond à l'automate de la figure 5.1. Structuellement parlant, on voit que les états  $q_1$  et  $q_2$ , d'une part et  $q_3$  et  $q_4$  d'autre part, jouent exactement le même rôle ( $1 \leftrightarrow 2$  et  $3 \leftrightarrow 4$ ).

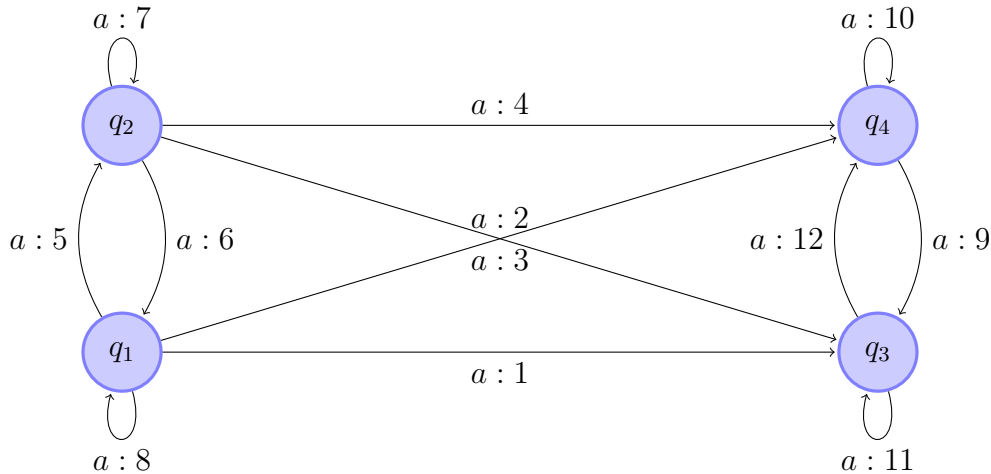


FIGURE 5.1 – Automate de structure idempotente.

Les valeurs dans la matrice ne dépendent, par contre, pas uniquement de sa structure. On va maintenant voir comment uniformiser ces valeurs.

**Uniformiser les valeurs.** L'idée, ici, est de vouloir faire jouer le même rôle aux états dans une même composante fortement connexe, y compris en termes de valeurs. Pour cela, on introduit les matrices uniformes.

**Définition 5.5.1** (matrice uniforme).

Une matrice  $M$ , telle que  $\varphi(M) = E$  idempotente, est **uniforme** si :

$$E \otimes M \otimes E = M.$$

**Remarque 5.5.1.** Si  $M$  est uniforme, on déduit de la définition que

$$\varphi(M) \otimes M = M \otimes \varphi(M) = M.$$

En effet,  $\varphi(M) \otimes M = \varphi(M) \otimes (\varphi(M) \otimes M \otimes \varphi(M)) = \varphi(M) \otimes M \otimes \varphi(M) = M$ .

Si on voit cette définition du point de vue automate, l'idée est que pour aller de  $i$  vers  $j$ , on peut utiliser gratuitement n'importe quelle transition vers un état  $k$  accessible depuis  $i$  et n'importe quelle transition depuis un état  $h$  co-accessible depuis  $j$ . On pourra donc choisir de prendre n'importe quelle transition accessible depuis  $i$  et co-accessible depuis  $j$ . Dans le cadre des automates min-plus, on utilisera ainsi systématiquement la transition de poids le plus faible et dans le cadre des automates max-plus, la transition de poids le plus fort. Cette idée est résumée dans la proposition suivante.

**Proposition 5.5.3.**

Étant donné  $M$  une matrice uniforme, et deux indices  $i$  et  $j$  tels que  $i \leftrightarrow j$ , pour tout  $k$ , on a :

$$M_{i,k} = M_{j,k} \quad \text{et} \quad M_{k,i} = M_{k,j}$$

*Démonstration.* Pour un automates min-plus :  $M_{i,k} = (E \otimes M)_{i,k} \leq E_{i,j} + M_{j,k} = M_{j,k}$  et réciproquement. Le preuve est similaire dans le cadre des automates max-plus.  $\square$

Ainsi, si  $i \leftrightarrow j$  alors  $i$  et  $j$  jouent exactement le même rôle. L'uniformisation d'une matrice  $M$  d'image idempotente par  $\varphi$  est  $\varphi(M) \otimes M \otimes \varphi(M)$ . L'exemple suivant montre l'uniformisation de la matrice de l'exemple précédent.

**Exemple 5.5.2.**

-Cas max-plus-

La matrice suivante est la matrice  $\varphi(M) \otimes M \otimes \varphi(M)$  où  $M$  est la matrice donnée dans l'exemple précédent dans le cas max-plus.

$$\begin{pmatrix} 8 & 8 & 12 & 12 \\ 8 & 8 & 12 & 12 \\ -\infty & -\infty & 12 & 12 \\ -\infty & -\infty & 12 & 12 \end{pmatrix}$$

On voit que les états  $q_1$  et  $q_2$  d'une part et  $q_3$  et  $q_4$  d'autre part peuvent maintenant être confondus comme le schématise la figure 5.2.

**Exemple 5.5.3.**

-Cas min-plus-

Dans le cas min-plus, on obtient la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & 1 \\ +\infty & +\infty & 9 & 9 \\ +\infty & +\infty & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

qui est schématisée dans la figure 5.3.

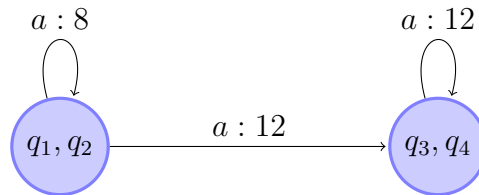


FIGURE 5.2 – Automate représentant une matrice uniforme max-plus.

Les matrices uniformes ont de bonnes propriétés, et calculer de longs produits de telles matrices est plus facile.

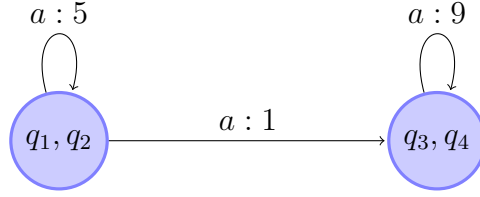


FIGURE 5.3 – Automate représentant une matrice uniforme min-plus.

**Proposition 5.5.4.**

Le produit de matrices uniformes (ayant même image par  $\varphi$ ) est uniforme.

*Démonstration.* Soient  $M$  et  $N$  deux matrices uniformes, d'image  $E$ ,

$$\begin{aligned} E \otimes M \otimes N \otimes E &= E \otimes (E \otimes M \otimes E) \otimes (E \otimes N \otimes E) \otimes E \\ &= (E \otimes M \otimes E) \otimes (E \otimes N \otimes E) \\ &= M \otimes N \end{aligned}$$

□

L'idée de la proposition 5.5.5 est la suivante : lors du calcul du produit de matrices uniformes, on peut interchanger des indices  $i$  et  $j$  tels que  $i \leftrightarrow j$ . On peut donc calculer facilement les coefficients  $(i, j)$  où  $i \leftrightarrow j$  (dont les coefficients diagonaux).

**Proposition 5.5.5** (calcul des coefficients diagonaux).

Soit  $M = M_1 \otimes \cdots \otimes M_\ell$  un produit de matrices uniformes qui ont toutes la même projection idempotente  $E$ . Alors pour tous indices  $i \leftrightarrow j \leftrightarrow k$  :

$$M_{i,j} = \sum_{h=1}^{\ell} (M_h)_{k,k}$$

*Démonstration.* Il existe  $i = p_1, p_2, \dots, p_\ell, p_{\ell+1} = j$  des indices tels que :

$$M_{i,j} = \sum_{h=1}^{\ell} (M_h)_{p_h, p_{h+1}}$$

De plus, puisque  $i \leftrightarrow j$  alors pour tout  $h$ ,  $i \leftrightarrow j \leftrightarrow p_h$ . Donc, pour tout  $k$  tel que  $k \leftrightarrow i \leftrightarrow j$ , par transitivité, pour tout  $h$ ,  $k \leftrightarrow p_h$  et  $k \leftrightarrow p_{h+1}$  et donc par la proposition 5.5.3, on a  $(M_h)_{p_h, p_{h+1}} = (M_h)_{k,k}$ . On en déduit le résultat. □

On explique maintenant comment aborder le calcul des autres coefficients. Un couple d'indices  $(i, j)$  est dit **transient** si  $E_{i,j} \neq 0$  ou  $E_{j,i} \neq 0$ . On donne maintenant des propriétés sur ces couples transients. On doit distinguer les cas min-plus et max-plus.

**Proposition 5.5.6.**

Dans le cadre des automates min-plus (resp. max-plus), étant donné  $M$  uniforme avec  $\varphi(M) = E$ , et des indices  $i, j$ , et  $k$  tels que  $E_{i,k} = E_{k,j} = 0$ , on a  $M_{i,j} \leq M_{k,k}$  (resp.  $M_{i,j} \geq M_{k,k}$ ). De plus, si  $M_{i,j} < M_{k,k}$  (resp.  $M_{i,j} > M_{k,k}$ ) alors  $(i, j)$  est transient.

*Démonstration.* On fait la preuve pour le cas min-plus, le cas max-plus est similaire.  $M_{i,j} \leq E_{i,k} + M_{k,k} + E_{k,j} = M_{k,k}$ . De plus, si  $E_{j,i} = 0$ , alors  $i \leftrightarrow k \leftrightarrow j$  et  $M_{i,j} = M_{k,k}$  par la proposition 5.5.5.  $\square$

De la même manière, on montre que :

**Proposition 5.5.7.**

Dans le cadre des automates min-plus (resp. max-plus), étant donné  $M$  uniforme avec  $\varphi(M) = E$ , et des indices  $i, j, k, \ell$  tels que  $E_{i,k} = E_{k,\ell} = E_{\ell,j} = 0$ , on a  $M_{i,j} \leq M_{k,\ell}$  (resp.  $M_{i,j} \geq M_{k,\ell}$ ).

On cherche maintenant à calculer les coefficients transients de produits de matrices uniformes. L'idée est la suivante, si dans un produit on utilise un couple transient  $(h, k)$ , alors on est sûr que l'indice  $h$  n'intervient plus dans la suite du produit. Plus précisément, étant donné  $M = M_1 \otimes \cdots \otimes M_\ell$  un produit de matrices uniformes qui ont toutes la même projection idempotente  $E$ , on cherche à calculer le coefficient  $M_{i,j}$  (avec  $E_{i,j} = 0$ ). Il existe des indices  $i = p_1, p_2, \dots, p_{\ell+1} = j$  tels que :

$$M_{i,j} = (M_1)_{i,p_2} + \cdots + (M_\ell)_{p_\ell,j}$$

S'il existe  $h$  tel que  $(p_h, p_{h+1})$  est transient, alors, pour tout  $k > h$ ,  $p_k \neq p_h$ . Sinon,  $E_{p_{h+1},p_h} = E_{p_{h+1},p_k} = 0$  et  $(p_h, p_{h+1})$  ne serait pas transient. On en déduit :

**Proposition 5.5.8.**

Soit  $M = M_1 \otimes \cdots \otimes M_\ell$  un produit de matrices uniformes de taille  $K$  qui ont toutes la même projection idempotente  $E$ . Supposons que  $M_{i,j} = (M_1)_{i,p_2} + \cdots + (M_\ell)_{p_\ell,j}$  alors il existe au plus  $K$  indices  $h$  tels que  $(p_h, p_{h+1})$  soit transient.

La figure 5.4 schématise le comportement des matrices uniformes. Les transitions de poids  $y_i$  seront utilisées au plus une fois sur un chemin de  $i$  vers  $j$ .



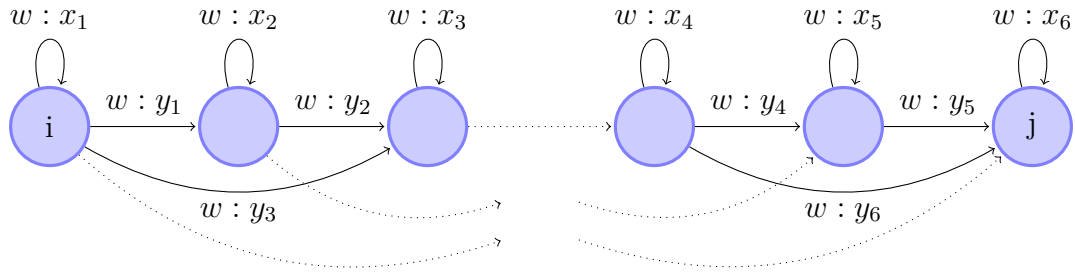


FIGURE 5.4 – Automate représentant une matrice uniforme.

## Résumé du chapitre

Ce chapitre a introduit les notions communes aux preuves des théorèmes 3.1.1 et 4.1.1. Ainsi, nous avons vu la notion de matrices pondérées, ainsi que la notion de matrices uniformes qui sont des matrices pondérées avec une structure particulière.

Nous venons aussi de voir la structure commune aux deux preuves, et les outils à mettre en place au cas par cas. Il s'agira ainsi dans chaque cas de définir une relation d'approximation entre ensembles de matrices pondérées, ainsi que des ensembles présentables de matrices pondérées qui sont des ensembles finiment représentables et calculables.

Avec ces outils, ce chapitre a montré que l'on peut se ramener à démontrer les propriétés du produit simple (approximer le produit de deux ensembles présentables par un ensemble présentable) et du produit idempotent (approximer le produit d'un nombre quelconque d'ensembles présentables dont toutes les matrices ont la même structure idempotente par un ensemble présentable).

Les chapitres suivants traitent les preuves au cas par cas, le chapitre 6 traite le théorème 3.1.1 dans le cas min-plus et le chapitre 7 traite le théorème 4.1.1 dans le cas max-plus.



# Chapitre 6

---

## Approximation du rapport fonction-longueur : preuve

L'objet de ce chapitre est la preuve du théorème 3.1.1 d'approximation du rapport fonction-longueur. Le cadre ici est donc celui des automates min-plus. Dans le chapitre 3, il est montré que le résultat équivalent dans le cas max-plus se déduit du résultat dans le cas min-plus. L'énoncé du théorème que nous allons démontrer est le suivant :

Étant donné un automate min-plus calculant une fonction  $f$ , et un réel strictement positif  $\varepsilon$ , il existe un algorithme calculant  $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  tel que :

$$r - \varepsilon \leq \sup_{w \in \mathbb{A}^*} \left\{ \frac{f(w)}{|w|} \right\} \leq r + \varepsilon.$$

La structure de la preuve de ce résultat est donnée dans le chapitre 5. Elle nécessite deux ingrédients : la notion d'approximation et la notion de présentabilité d'un ensemble.

De plus, il s'agit de démontrer le résultat pour tout  $\varepsilon > 0$ . Il s'agit ainsi d'obtenir des  $\varepsilon$ -approximations de l'ensemble des matrices pondérées qui représente le comportement de l'automate pour tout  $\varepsilon > 0$ . Cela correspond au cas universel donné au chapitre 5.

**Organisation du chapitre.** La section 6.1 explicite la notion d'approximation, puis la section 6.2 la notion d'ensembles présentables. Dans ces sections seront prouvées les propriétés utilisées dans la preuve donnée au chapitre 5.

La section 6.3 donne la preuve de la propriété de produit simple dans le cas universel, et la section 6.4 celle du produit idempotent dans le cas universel.

**Notations.** Dans tout le chapitre, on fixe un automate min-plus à  $K$  états.

Soit  $\lambda$  un réel positif et  $M$  une matrice à coefficients dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , on note  $\lambda M$  la matrice définie par  $(\lambda M)_{i,j} = \lambda M_{i,j}$  (avec  $\lambda(+\infty) = +\infty$ ). On note  $M + \lambda$ , la matrice définie par  $(M + \lambda)_{i,j} = M_{i,j} + \lambda$  (avec  $+\infty + \lambda = +\infty$ ).

Soient  $M$  et  $N$ , deux matrices à coefficients dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , on note  $M \leq N$  si pour tout  $i, j$ ,  $M_{i,j} \leq N_{i,j}$ .

## 6.1 Approximation

Dans ce chapitre, il s'agit d'approximer la fonction qui décrit le comportement maximal d'un automate min-plus. Il s'agit ainsi d'approximer les matrices pondérées représentant ce comportement maximal, comme le schématise la figure 6.1.

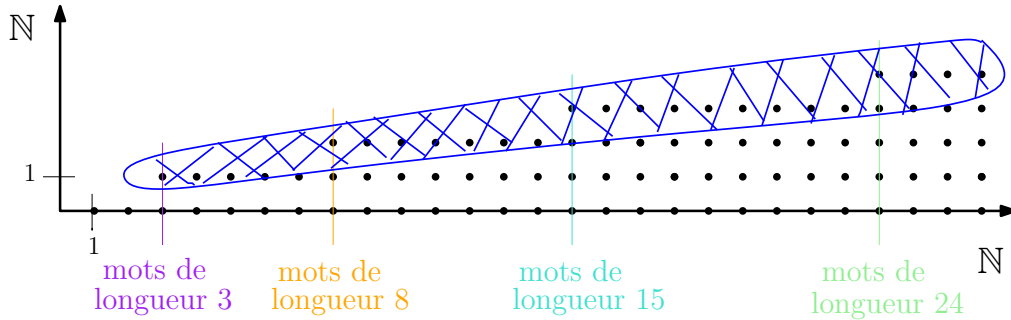


FIGURE 6.1 – Comportement maximal d'un automate min-plus.

Plus précisément, il s'agit d'obtenir une approximation, à  $\varepsilon$ -près, du ratio maximal entre le poids d'un mot et sa longueur.

L'approximation entre ensembles de matrices pondérées est définie de la manière suivante :

### Définition 6.1.1 (approximation des matrices pondérées).

Étant donné  $\varepsilon > 0$ , et deux matrices pondérées  $(M, \ell)$  et  $(N, k)$ , on définit la relation  $(M, \ell) \preceq_\varepsilon (N, k)$  si :

- $M \leq N + \varepsilon \ell$ ,
- $k \leq \ell$ ,
- $\varphi(M) = \varphi(N)$ .

Cette définition est étendue aux ensembles de matrices pondérées.

### Définition 6.1.2 (approximation d'ensembles).

Étant donnés  $A$  et  $B$  deux ensembles de matrices pondérées, on note  $A \preceq_\varepsilon B$  si pour toute matrice pondérée  $(M, \ell) \in A$ , il existe une matrice pondérée  $(N, k) \in B$  telle que  $(M, \ell) \preceq_\varepsilon (N, k)$ .

On dit que  $A$  et  $B$  sont  $\varepsilon$ -équivalents et on note  $A \approx_\varepsilon B$  si  $A \preceq_\varepsilon B$  et  $B \preceq_\varepsilon A$ .

Il s'agit maintenant de montrer que la relation ainsi définie vérifie les propriétés énoncées dans la section 5.2, et qui sont utilisées dans la preuve, à savoir : (1) il s'agit d'une bonne approximation, et (2) si deux ensembles sont équivalents pour cette relation alors la borne supérieure des rapports fonctions-longueurs est la même à  $\varepsilon$ -près. Pour cela, étant donné un ensemble  $A$  de matrices pondérées, on note  $r_A = \sup \left\{ \frac{1}{\ell} M \mid (M, \ell) \in A \right\}$ .

(1) Le premier point se déduit facilement de la définition.

**Proposition 6.1.1.**

L'approximation  $\approx_\varepsilon$  est une bonne approximation (cas universel défini p.69).

*Démonstration.*

- Si  $(M, \ell) \preceq_\varepsilon (M', \ell') \preceq_{\varepsilon'} (M'', \ell'')$ , alors on a  $\ell \geq \ell' \geq \ell''$ ,  $\varphi(M) = \varphi(M') = \varphi(M'')$  et  $M \leq M' + \varepsilon \ell \leq M'' + \varepsilon' \ell' + \varepsilon \ell \leq M'' + (\varepsilon + \varepsilon') \ell$ . Donc  $(M, \ell) \preceq_{\varepsilon + \varepsilon'} (M'', \ell'')$ . On étend ce résultat aux ensembles de matrices pondérées. Si  $A \preceq_\varepsilon A' \preceq_{\varepsilon'} A''$  alors, pour  $(M, \ell) \in A$ , il existe  $(M', \ell') \in A'$  telle que  $(M, \ell) \preceq_\varepsilon (M', \ell')$ . Il existe aussi  $(M'', \ell'') \in A''$  telle que  $(M', \ell') \preceq_{\varepsilon'} (M'', \ell'')$ . On obtient donc finalement  $(M, \ell) \preceq_{\varepsilon + \varepsilon'} (M'', \ell'')$  et  $A \preceq_{\varepsilon + \varepsilon'} A''$ .

- Supposons  $A \preceq_\varepsilon A'$  et  $B \preceq_\varepsilon B'$ . Alors, si  $(M, \ell) \in A \cup B$ , soit  $(M, \ell) \in A$  soit  $(M, \ell) \in B$ , donc il existe  $(M', \ell') \in A'$  ou  $(M', \ell') \in B'$  telle que  $(M, \ell) \preceq_\varepsilon (M', \ell')$  et donc  $A \cup B \preceq_\varepsilon A' \cup B'$ .

- Supposons que  $(M, \ell) \preceq_\varepsilon (M', \ell')$  et  $(N, k) \preceq_\varepsilon (N', k')$ . Alors,  $\ell + k \geq \ell' + k'$ ,  $\varphi(M \otimes N) = \varphi(M' \otimes N')$  et  $M \otimes N \leq (M' + \varepsilon \ell) \otimes (N' + \varepsilon k) \leq M' \otimes N' + \varepsilon(\ell + k)$ . Donc  $(M, \ell) \otimes (N, k) \preceq_\varepsilon (M', \ell') \otimes (N', k')$ . On étend ce résultat aux ensembles de matrices pondérées. Si  $A \preceq_\varepsilon A'$  et  $B \preceq_\varepsilon B'$  alors, pour  $(M, \ell) \in A$  et  $(N, k) \in B$ , il existe  $(M', \ell') \in A'$  telle que  $(M, \ell) \preceq_\varepsilon (M', \ell')$  et  $(N', k') \in B'$  telle que  $(N, k) \preceq_\varepsilon (N', k')$ . On a donc  $(M, \ell) \otimes (N, k) \preceq_\varepsilon (M', \ell') \otimes (N', k')$  et  $A \otimes B \preceq_\varepsilon A' \otimes B'$ . □

(2) Le deuxième point consiste à montrer que si  $A$  et  $B$  sont  $\varepsilon$ -équivalents, alors :

$$r_B - \varepsilon \leq r_A \leq r_B + \varepsilon$$

*Démonstration.* Si  $(M, \ell) \preceq_\varepsilon (N, k)$ , alors  $\frac{1}{\ell} M \leq \frac{1}{\ell} (N + \varepsilon \ell) \leq \frac{1}{\ell} N + \varepsilon \leq \frac{1}{k} N + \varepsilon$ . On étend cela aux ensembles : si  $A \preceq_\varepsilon B$  alors pour toute matrice  $(M, \ell) \in A$ , il existe une matrice  $(N, k) \in B$  telle que  $(M, \ell) \preceq_\varepsilon (N, k)$  et donc  $\frac{1}{\ell} M \leq \frac{1}{k} N + \varepsilon$ . D'où  $r_A \leq r_B + \varepsilon$ . Comme  $A$  et  $B$  jouent des rôles symétriques, on en déduit le résultat. □

L'approximation, ainsi définie, vérifie les propriétés utilisées dans la preuve donnée au chapitre 5. Il reste donc à décrire la notion d'ensembles présentables et à démontrer les propriétés 5.4.1 et 5.4.2.

## 6.2 Ensembles présentables

Il s'agit de calculer le rapport entre matrices et longueurs de manière aussi précise que possible. Ainsi, les ensembles présentables contiennent deux types d'information. Tout d'abord, ils contiennent une information exacte, donnée par des matrices pondérées qui représentent exactement les mots jusqu'à une certaine longueur. Cet ensemble est fini et calculable, et plus la précision demandée est grande, plus cet ensemble contient de matrices. On appelle les matrices contenues dans cet ensemble les **petites matrices**. Le deuxième type d'information est une information asymptotique, représentant des suites infinies de mots. Dans ce deuxième type d'ensembles, il s'agit de regrouper les matrices pondérées dont le rapport à la longueur est le même à  $\varepsilon$ -près.

### Définition 6.2.1.

Un ensemble de matrices pondérées est **présentable** s'il est l'union :

- d'une union finie de singletons de matrices pondérées,
- d'une union finie d'ensembles de la forme  $\{(\ell M, \ell) \mid \ell \geq k\}$  pour un certain entier positif  $k$ , et une certaine matrice  $M$  à coefficients dans  $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ .

Tout comme pour l'approximation, il s'agit maintenant de vérifier que les ensembles présentables vérifient les propriétés données au chapitre 5 et utilisées dans la preuve. Plus précisément, il s'agit de montrer (1) que l'union de deux ensembles présentables est un ensemble présentable, (2) que si  $E$  est une matrice de chemins idempotente alors la restriction d'un ensemble présentable à  $\varphi^{-1}(\{E\})$  est présentable et (3) que l'on peut calculer la valeur  $r_A$  pour un ensemble présentable  $A$ .

(1) et (2) Le premier et le deuxième points proviennent directement de la définition des ensembles présentables.

(3) Soit  $A$  un ensemble présentable, alors  $\{\frac{1}{\ell}M \mid (M, \ell) \in A\}$  est fini et on peut calculer sa borne supérieure. En faisant cela on ne prend pas en compte les états initiaux et finaux. Pour les prendre en compte, il suffit de calculer la borne supérieure de l'ensemble  $\{\frac{1}{\ell}(I \otimes M \otimes F) \mid (M, \ell) \in A\}$  qui est aussi fini. Cette valeur donne la valeur de  $r_A$ .

Montrons maintenant les propriétés du produit simple et du produit idempotent dans le cas existentiel.

## 6.3 Produit simple

On démontre ici la propriété du produit simple 5.4.1 : pour tout  $\varepsilon > 0$ , étant donné deux ensembles présentables  $A$  et  $B$ , il existe un ensemble présentable  $C$  tel que

$C \approx_\varepsilon A \otimes B$ .

Les lemmes utilisés dans cette preuve ou certaines généralisations seront réutilisés dans la preuve de la propriété du produit idempotent dans la section suivante.

Le premier lemme montre, qu'étant donné un nombre borné de matrices pondérées, deux produits entre ces matrices, à savoir le produit  $(\ell_1 M_1 \otimes \cdots \otimes \ell_p M_p, \ell)$  et le produit  $(\ell'_1 M_1 \otimes \cdots \otimes \ell'_p M_p, \ell)$ , sont proches sous réserve que les coefficients  $\ell_i$  et  $\ell'_i$  le soient aussi.

**Lemme 6.3.1.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $a > 0$ , entier positif  $p$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p, \ell'_1, \ell'_2, \dots, \ell'_p, \ell$  positifs, vérifiant pour tout  $i$ ,*

$$|\ell_i - \ell'_i| \leq \eta \ell,$$

*pour toutes matrices  $M_1, M_2, \dots, M_p$  dont les coefficients finis n'excèdent pas  $a$ , on a :*

$$(\ell_1 M_1 \otimes \ell_2 M_2 \otimes \cdots \otimes \ell_p M_p, \ell) \preceq_\varepsilon (\ell'_1 M_1 \otimes \ell'_2 M_2 \otimes \cdots \otimes \ell'_p M_p, \ell).$$

*Démonstration.* Posons  $\eta = \frac{\varepsilon}{pa}$ , on a :

$$\begin{aligned} \ell_1 M_1 \otimes \cdots \otimes \ell_p M_p &\leq (\ell'_1 + \eta \ell) M_1 \otimes \cdots \otimes (\ell'_p + \eta \ell) M_p \\ &\leq (\ell'_1 M_1 + \eta \ell M_1) \otimes \cdots \otimes (\ell'_p M_p + \eta \ell M_p) \\ &\leq (\ell'_1 M_1 + a \eta \ell) \otimes \cdots \otimes (\ell'_p M_p + a \eta \ell) \\ &\leq \ell'_1 M_1 \otimes \cdots \otimes \ell'_p M_p + (pa \eta) \ell \end{aligned}$$

□

Il faut bien remarquer que  $\eta$  dépend de  $p$ , et donc cet argument n'est utilisable que pour un nombre borné de matrices (impossible de l'utiliser pour un produit aussi long qu'on veut).

Pour faire le produit de deux ensembles présentables, il va falloir faire les produits de deux ensembles du type  $\{(xM, x), x \geq \ell\}$ . Le lemme suivant traite ce cas en introduisant la notion de barycentres de matrices. Plus précisément, le produit des ensembles  $\{(xM_i, x), x \geq \ell_i\}$  pour  $i = 1, \dots, p$  donne toutes les matrices  $(k(\lambda_1 M_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_p M_p), k)$  avec  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ , pour peu que  $k$  soit suffisamment grand. L'idée ici est encore de regarder les coefficients multiplicatifs des matrices, et d'utiliser le lemme précédent en montrant que pour tout  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  dont la somme vaut 1, et  $k$  assez grand, on peut trouver des entiers  $y_1, \dots, y_p$  plus grands que  $x_1, \dots, x_p$  et suffisamment proches de  $\lambda_1 k, \dots, \lambda_p k$ . Le fait que les  $y_i$  doivent être entiers, et qu'il faille toujours contrôler leur somme ( $k$ ) amène à une preuve assez technique.

**Lemme 6.3.2.** *Étant donné un entier positif  $x$ , pour tout  $\eta > 0$ , il existe un entier positif  $z$  tel que pour tout  $k \geq z$ , pour tout  $0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \leq 1$  tels que  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$  et pour tout  $i$ , il existe des entiers  $y_i \geq x$  tels que  $\sum_{j=1}^p y_j = k$  et  $|y_i - \lambda_i k| \leq \eta k$ .*

*Démonstration.* Soit  $z$  un entier positif tel que :

$$\eta z > px \text{ et } z \geq p(p+1)x$$

Soient  $k \geq z$  et  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in [0, 1]$  tels que  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ .

Pour construire les  $y_i$ , on commence par construire les  $z_i$  de la manière suivante :

$$z_i = \max(\lceil \lambda_i k \rceil, x) \text{ pour tout } i = 1 \dots p.$$

Remarquons que  $z_i \geq \lambda_i k$ . De plus,  $z_i < \lambda_i k + x$  car  $x$  est un entier  $\geq 1$ , et puisque  $x < \frac{\eta z}{p} \leq \eta z \leq \eta k$ , on obtient  $|z_i - \lambda_i k| \leq \eta k$  pour tout  $i = 1 \dots p$ . Remarquons aussi que :

$$k = \sum_{i=1}^p \lambda_i k \leq \sum_{i=1}^p z_i \leq \sum_{i=1}^p (\lambda_i k + x) = k + px. \quad (6.1)$$

Donc, les  $z_i$  vérifient les hypothèses voulues mise à part que leur somme peut être plus grande que  $k$  (d'au plus  $px$ ).

Soit  $m$  tel que  $\lambda_m$  est maximal parmi les  $\lambda_i$ . Soit  $y_i = z_i$  pour tout  $i \neq m$ , et  $y_m = k - \sum_{i \neq m} z_i$ . Par définition,  $\sum_{i=1 \dots p} y_i = k$ . D'après (6.1), on a :

$$y_m \leq z_m \leq k + px - \sum_{i \neq m} z_i = k - \sum_{i \neq m} z_i + px = y_m + px$$

et donc  $y_m \in [z_m - px, z_m]$ . Montrons que cela prouve le lemme.

Par le principe des tiroirs,  $\lambda_m \geq \frac{1}{p}$ , donc  $z_m \geq \lambda_m k \geq \lambda_m z \geq \frac{z}{p} \geq (p+1)x$ , d'où  $y_m \geq z_m - px \geq x$ . De plus, puisque  $\lambda_m k - \eta k \leq z_m - px \leq y_m$  (car  $\eta k \geq \eta z \geq px$ ), on a  $|y_m - \lambda_m k| \leq \eta k$ .  $\square$

On peut maintenant démontrer la propriété du produit 5.4.1.

*Démonstration.* Puisque les ensembles présentables de matrices pondérées sont clos par union finie, alors il suffit de démontrer la propriété pour les ensembles  $\{A, B\}$  avec  $A = \{(M, \ell)\}$  ou  $A = \{(xM, x) \mid x \geq \ell\}$  et  $B = \{(N, k)\}$  ou  $B = \{(yN, y) \mid y \geq k\}$ . On a donc quatre possibilités, dont deux sont symétriques :

- $A = \{(M, \ell)\}$  et  $B = \{(N, k)\}$ ,
- $A = \{(M, \ell)\}$  et  $B = \{(yN, y) \mid y \geq k\}$ ,
- $A = \{(xM, x) \mid x \geq \ell\}$  et  $B = \{(yN, y) \mid y \geq k\}$ .

On traite ces trois cas successivement. Le premier consiste à faire le produit des deux matrices pondérées, le deuxième consiste à voir que pour  $y$  assez grand, la matrice de l'ensemble  $B$  va dominer celle de l'ensemble  $A$ , dont on pourra alors considérer les coefficients comme nuls grâce au lemme 6.3.1. Le troisième consiste enfin à utiliser le lemme 6.3.2 et à montrer que l'on atteint tous les barycentres.

- Si  $A = \{(M, \ell)\}$  et  $B = \{(N, k)\}$ , alors on peut choisir

$$\text{produit}(A, B, \varepsilon) = \{(M \otimes N, \ell + k)\}.$$



- Si  $A = \{(M, \ell)\}$  et  $B = \{(yN, y) \mid y \geq k\}$ , notons  $a$  le plus grand coefficient fini dans les matrices  $\frac{1}{\ell}M$  et  $N$ . Étant donné  $\varepsilon$ ,  $a$  et  $p = 2$ , considérons  $\eta$  donné par le lemme 6.3.1. Soit  $z$  un entier tel que  $\eta z \geq \ell$ . Posons alors  $C = C_1 \cup C_2$  avec

$$C_1 = \bigcup_{k \leq y < z} \{(M \otimes yN, \ell + y)\}$$

$$\text{et } C_2 = \{(y(\varphi(M) \otimes N), y) \mid y \geq \ell + z\}.$$

L'ensemble  $C_1$  est fini et contient les produits de la matrice de  $A$  avec les matrices de  $B$  de longueur au plus  $z$ . L'ensemble  $C_2$  approxime les produits de matrices de longueur plus grande que  $\ell + z$ . L'idée est la suivante : si la longueur de la matrice dans  $B$  est beaucoup plus grande que la longueur de la matrice dans  $A$ , alors on peut appliquer le lemme 6.3.1 et approcher la seconde longueur par 0. Plus formellement,  $C$  est présentable et on va vérifier que  $A \otimes B \approx_\varepsilon C$ .

*Première direction* : Soit  $(M, \ell) \otimes (yN, y) = (M \otimes yN, \ell + y) \in A \otimes B$  avec  $y \geq k$ . Si  $k \leq y < z$ , alors  $(M, \ell) \otimes (yN, y) \in C_1$ . Si  $y \geq z$  alors  $\eta y \geq \eta z \geq \ell$ , donc par le lemme 6.3.1, on a :

$$(M, \ell) \otimes (yN, y) \preceq_\varepsilon (\varphi(M) \otimes (y + \ell)N, y + \ell) = ((y + \ell)(\varphi(M) \otimes N), y + \ell) \in C_2.$$

*Deuxième direction* : Inversement, tout d'abord  $C_1 \subseteq A \otimes B$ . De plus, pour  $y \geq \ell + z$ , on a :

$$(y(\varphi(M) \otimes N), y) = (\varphi(M) \otimes yN, y)$$

et par le lemme 6.3.1,

$$(\varphi(M) \otimes yN, y) \preceq_\varepsilon (M \otimes (y - \ell)N, y) = (M, \ell) \otimes ((y - \ell)N, y - \ell) \in A \otimes B.$$

- Si  $A = \{(xM, x) \mid x \geq \ell\}$  et  $B = \{(yN, y) \mid y \geq k\}$ , soit  $a$  le plus grand coefficient fini dans les matrices  $M$  et  $N$ . Étant donné  $\varepsilon > 0$ ,  $a$ , et  $p = 2$ , considérons  $\eta$  donné par le lemme 6.3.1. Étant donné  $\eta$ , considérons  $z$  l'entier donné par le lemme 6.3.2 pour  $x = \max(\ell, k)$ . Finalement, posons  $C = C_1 \cup C_2$  avec :

$$C_1 = \{(xM \otimes yN, x + y) \mid \ell \leq x < z, k \leq y < z\}$$

$$\text{et } C_2 = \bigcup_{\lambda \in ([0, 1] \cap \eta\mathbb{N})} \{(t(\lambda M \otimes (1 - \lambda)N), t) \mid t \geq z\}.$$

L'ensemble  $C_1$  est fini, correspond à toutes les matrices de longueur inférieure à  $z$  dans  $A \otimes B$ . L'ensemble  $C_2$  correspond à tous les barycentres des matrices  $M$  et  $N$ , couplés aux longueurs plus grande que  $z$ . Pour rendre  $C_2$  présentable, au lieu de prendre tous les barycentres  $\lambda M \otimes (1 - \lambda)N$  pour tous les  $\lambda \in [0, 1]$ , on discrétise les  $\lambda$  avec un intervalle de longueur  $\eta$ . Donc  $C$  est présentable et nous allons vérifier que  $A \otimes B \approx_\varepsilon C$ .

*Première direction* : Soit  $(xM, x) \otimes (yN, y) \in A \otimes B$ . Si  $x < z$  et  $y < z$ ,  $(xM, x) \otimes (yN, y) \in C_1$ . Sinon  $(xM, x) \otimes (yN, y) = ((x+y)(\frac{x}{x+y}M \otimes \frac{y}{x+y}N), x+y)$  avec  $x+y \geq z$ . Alors il existe  $\lambda \in ([0, 1] \cap \eta\mathbb{N})$  tel que  $|\frac{x}{x+y} - \lambda| \leq \eta$  et donc  $|\frac{y}{x+y} - (1-\lambda)| \leq \eta$ . Donc par le lemme 6.3.1,

$$(xM, x) \otimes (yN, y) \preceq_\varepsilon ((x+y)(\lambda M \otimes (1-\lambda)N), x+y) \in C_2.$$

*Deuxième direction* : Inversement, tout d'abord  $C_1 \subseteq A \otimes B$ . Considérons  $(t(\lambda M \otimes (1-\lambda)N), t) \in C_2$  avec  $t \geq z$ . Par le lemme 6.3.2, il existe  $x \geq \ell$  et  $y \geq k$  tels que  $x+y = t$ ,  $|x - \lambda t| \leq \eta t$  et  $|y - (1-\lambda)t| \leq \eta t$ . Par le lemme 6.3.1, on obtient :

$$(t(\lambda M \otimes (1-\lambda)N), t) \preceq_\varepsilon ((x+y)(\frac{x}{x+y}M \otimes \frac{y}{x+y}N), x+y) \in A \otimes B.$$

□

On vient de démontrer la propriété du produit de deux ensembles présentables de matrices pondérées. Dans l'optique de démontrer la propriété du produit idempotent d'un nombre quelconque de matrices pondérées, on va avoir besoin de généraliser ce résultat à un produit d'un nombre borné de matrices pondérées. La preuve de ce résultat est une induction reposant sur le produit de deux ensembles.

**Lemme 6.3.3** (généralisation de la propriété 5.4.1). *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , et tout ensemble présentable  $A_1, \dots, A_p$ , il existe un ensemble présentable  $C$  calculable tel que :*

$$C \approx_\varepsilon A_1 \otimes \dots \otimes A_p .$$

*Démonstration.* C'est vrai pour  $p = 2$  (propriété 5.4.1). Supposons la propriété vérifiée pour un entier  $p \geq 2$ , alors  $A_1 \otimes \dots \otimes A_{p+1} \approx_{\frac{\varepsilon}{2}} \text{produit}(A_1, A_2, \frac{\varepsilon}{2}) \otimes A_3 \otimes \dots \otimes A_{p+1}$  puisque  $\approx_\varepsilon$  est une bonne approximation. Alors par hypothèse d'induction, il existe un ensemble présentable calculable  $C$  tel que  $\text{produit}(A_1, A_2, \frac{\varepsilon}{2}) \otimes \dots \otimes A_{p+1} \approx_{\frac{\varepsilon}{2}} C$ . Finalement par transitivité,  $A_1 \otimes \dots \otimes A_{p+1} \approx_\varepsilon C$ . □

Nous venons de traiter la cas du produit simple, traitons maintenant le cas du produit idempotent.

## 6.4 Produit idempotent

On démontre ici la propriété du produit idempotent : pour tout  $\varepsilon > 0$ , étant donné un ensemble présentable  $A$  dont toutes les matrices pondérées ont la même projection idempotente, il existe un ensemble présentable  $B$  tel que  $\langle A \rangle \approx_\varepsilon B$ .

Dans toute la suite, on fixe une matrice de chemins  $E$  idempotente et un ensemble présentable  $A$  tel que  $A \subseteq \varphi^{-1}(E)$ .

La preuve est divisée en quatre parties. Tout d'abord, on donne une description générale des éléments de preuves, en énonçant les propositions clés et en les utilisant pour démontrer la propriété 5.4.2. Les sections suivantes 6.4.2, 6.4.3 et 6.4.4 sont ensuite consacrées à démontrer ces propositions.

### 6.4.1 Structure et preuve de la propriété 5.4.2

L'objectif est d'approximer  $\langle A \rangle$  pour  $A \subseteq \varphi^{-1}(E)$ . Ainsi les matrices de l'ensemble  $A$  ont toutes la même structure idempotente. La preuve se fait en plusieurs temps, avec l'utilisation des matrices uniformes introduites dans la section 5.5.

Tout d'abord, on va voir que la clôture d'un ensemble présentable de matrices uniformes est approximable par un ensemble présentable. C'est le point (1).

Ensuite, un autre argument clé est la définition de la notion de **petit produit**. Il s'agit essentiellement d'un produit (éventuellement très long) de matrices dont seul un petit nombre compte. Il s'agira aussi de définir des petits produits uniformes et d'être capable de les approximer par des matrices uniformes. C'est le point (2).

Finalement, on montrera que dans tout long produit de matrices, on peut extraire des produits de petits produits uniformes. C'est le point (3).

(1) Le premier point est le suivant :

#### Proposition 6.4.1.

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , et tout ensemble présentable de matrices uniformes  $A \subseteq \varphi^{-1}(E)$ , il existe un ensemble calculable  $B$  tel que :

$$B \approx_\varepsilon \langle A \rangle$$

La preuve de cette proposition est le sujet de la section 6.4.3.

(2) Le deuxième point introduit la notion de **petit produit**. Ces produits sont paramétrés par un réel  $\eta > 0$  et un certain entier  $p$ . Essentiellement, ce sont des produits de longueur totale  $\ell$  dans lesquels au plus  $p$  matrices contribuent pour plus de  $(1 - \eta)\ell$  de la longueur. Plus formellement :

**Définition 6.4.1.**

Soit  $p$  un entier strictement positif, et  $\eta > 0$ . On définit  $\langle A \rangle_{p,\eta}$  l'ensemble des matrices pondérées  $(M, \ell)$  telles que :

$$(M, \ell) = (M_1, \ell_1) \otimes \cdots \otimes (M_k, \ell_k)$$

où pour tout  $i$ ,  $(M_i, \ell_i)$  appartient à  $A$ , et il existe  $1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq k$  avec  $s \leq p$  tels que :

$$\sum_{j=1}^s \ell_{i_j} \geq (1 - \eta)\ell$$

L'ensemble  $\langle A \rangle_{p,\eta}$  est une sous-approximation de  $\langle A \rangle$  qui contient tous les produits de longueur inférieure à  $p$ , et qui est robuste à l'insertion de matrices (potentiellement beaucoup) de longueurs petites.

La proposition suivante énonce le fait qu'on peut approximer cet ensemble.

**Proposition 6.4.2.**

Pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $a > 0$ , il existe  $\eta > 0$  calculable tel que pour tout ensemble présentable  $A \subseteq \varphi^{-1}(E)$ , dont les coefficients finis des matrices n'excèdent pas  $a$ , et tout  $p \geq 1$ , il existe un ensemble présentable  $B$  tel que :

$$\langle A \rangle_{p,\eta} \preceq_{\varepsilon} B \preceq_{\varepsilon} \langle A \rangle$$

La preuve de cette proposition est donnée dans la section 6.4.2.

On va maintenant combiner la notion d'uniformité avec la notion de petits produits. Pour cela, on définit  $\langle A \rangle_{p,\eta}^u$  comme  $\langle A \rangle_{p,\eta}$ , mis à part le fait que les indices  $i_1, \dots, i_s$  doivent satisfaire  $1 < i_1 < \cdots < i_s < k$ , c'est-à-dire que  $i_1$  est différent de 1 et  $i_s$  est différent de  $k$ . Cela signifie que la première et la dernière matrices du produit ont une longueur petite. De ce fait, les matrices de  $\langle A \rangle_{p,\eta}^u$  sont presque uniformes dans le sens où elles sont proches à  $\varepsilon$ -près de matrices uniformes. On utilise cet ensemble en adaptant la proposition précédente.

**Proposition 6.4.3.**

Pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $a > 0$ , il existe  $\eta > 0$  calculable tel que pour tout ensemble présentable  $A \subseteq \varphi^{-1}(E)$  dont les coefficients finis des matrices n'excèdent pas  $a$ , et tout  $p \geq 1$ , il existe un ensemble présentable  $B$  tel que :

$$\langle A \rangle_{p,\eta}^u \preceq_\varepsilon B \preceq_\varepsilon \langle A \rangle$$

De plus,  $B$  ne contient que des matrices uniformes.

(3) Pour l'instant, on sait donc comment approximer des petits produits, et leurs variantes uniformes et comment approximer la clôture par produit d'ensembles de matrices uniformes. La dernière chose à faire est de prouver qu'on peut se ramener d'un long produit de matrices ayant la même image idempotente, au produit des ensembles définis ci-dessus.

**Proposition 6.4.4.**

Pour tout  $A \subseteq \varphi^{-1}(E)$  et tout  $\eta > 0$ , il existe un entier  $p$  tel que :

$$\langle A \rangle = \langle A \rangle_{p,\eta} \cup \langle A \rangle_{p,\eta} \otimes \langle \langle A \rangle_{p,\eta}^u \rangle \otimes \langle A \rangle_{p,\eta}$$

La preuve de ce résultat est donnée dans la section 6.4.4.

La combinaison des propositions précédentes donne une preuve directe de la propriété du produit idempotent dans le cas existentiel 5.4.2.

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Les propositions 6.4.2 et 6.4.3 donnent un certain réel  $\eta > 0$  (on prend le minimum des valeurs des  $\eta$  données par ces propositions). Par la proposition 6.4.4, on obtient alors un entier  $p$  tel que :

$$\langle A \rangle = \langle A \rangle_{p,\eta} \cup \langle A \rangle_{p,\eta} \otimes \langle \langle A \rangle_{p,\eta}^u \rangle \otimes \langle A \rangle_{p,\eta}$$

Par les propositions 6.4.2 et 6.4.3 (avec le valeur  $p$ ), il existe des ensembles présentables calculables  $C$  et  $D$ , avec  $D$  ne contenant que des matrices uniformes, tels que :

$$\langle A \rangle_{p,\eta} \preceq_{\frac{\varepsilon}{4}} C \preceq_{\frac{\varepsilon}{4}} \langle A \rangle \quad \text{et} \quad \langle A \rangle_{p,\eta}^u \preceq_{\frac{\varepsilon}{4}} D \preceq_{\frac{\varepsilon}{4}} \langle A \rangle$$

Ensuite, puisque que l'approximation est une bonne approximation, on obtient :

$$\langle A \rangle \preceq_{\frac{\varepsilon}{4}} C \cup C \otimes \langle D \rangle \otimes C \preceq_{\frac{\varepsilon}{4}} \langle A \rangle \cup \langle A \rangle \otimes \langle \langle A \rangle \rangle \otimes \langle A \rangle = \langle A \rangle$$

et donc  $\langle A \rangle \approx_{\frac{\varepsilon}{4}} C \cup C \otimes \langle D \rangle \otimes C$ .

De plus, puisque toutes les matrices de  $D$  sont uniformes, par la proposition 6.4.1, il existe un ensemble présentable  $F$  tel que  $\langle D \rangle \approx_{\frac{\varepsilon}{4}} F$ .

Finalement, par bonne approximation, on obtient,

$$\langle A \rangle \approx_{\frac{\varepsilon}{2}} C \cup C \otimes F \otimes C$$

Enfin, par la proposition 6.3.3 et la clôture des ensembles présentables par union, il existe un ensemble présentable  $B$  tel que  $C \cup C \otimes F \otimes C \approx_{\frac{\varepsilon}{2}} B$ . Finalement,  $\langle A \rangle \approx_{\varepsilon} B$ .  $\square$

## 6.4.2 Approximer les petits produits : preuves des propositions 6.4.2 et 6.4.3

On prouve tout d'abord la proposition 6.4.2

*Démonstration.* Étant donné  $\varepsilon > 0$  et  $a \geq 0$ , posons  $\eta = \frac{\varepsilon}{2a}$ . Soit un ensemble présentable  $A$  et un entier  $p$ , définissons  $C$  l'ensemble des produits d'au moins une et d'au plus  $2p + 1$  matrices pondérées de  $A$ , c'est-à-dire :

$$C = \bigcup_{1 \leq r \leq 2p+1} A^r$$

Tout d'abord,  $C \subseteq \langle A \rangle$ . Ensuite, d'après la proposition 6.3.3, il existe un ensemble présentable calculable  $B$  tel que  $B \approx_{\frac{\varepsilon}{2}} C$ . On prouve maintenant que cet ensemble  $B$  vérifie les conclusions de la propriété. Pour cela il suffit de vérifier que  $\langle A \rangle_{p,\eta} \preccurlyeq_{\frac{\varepsilon}{2}} C$ . En effet, on aura alors  $\langle A \rangle_{p,\eta} \preccurlyeq_{\frac{\varepsilon}{2}} C \preccurlyeq_{\frac{\varepsilon}{2}} B \preccurlyeq_{\frac{\varepsilon}{2}} C \subseteq \langle A \rangle$ , ce qui, par bonne approximation, implique le résultat :  $\langle A \rangle_{p,\eta} \preccurlyeq_{\varepsilon} B \preccurlyeq_{\varepsilon} \langle A \rangle$ .

Prouvons donc que  $\langle A \rangle_{p,\eta} \preccurlyeq_{\frac{\varepsilon}{2}} C$ . Soit une matrice  $(M, \ell)$  de  $\langle A \rangle_{p,\eta}$ . On peut écrire :

$$(M, \ell) = (M_1, \ell_1) \otimes \cdots \otimes (M_k, \ell_k)$$

où  $(M_1, \ell_1), \dots, (M_k, \ell_k)$  appartiennent à  $A$ , et où il existe  $1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq k$  avec  $1 \leq s \leq p$  tels que  $\ell_{i_1} + \cdots + \ell_{i_s} \geq (1 - \eta)\ell$ .

Notons  $i_0 = 0$  et  $i_{s+1} = k + 1$ . L'idée est de factoriser le produit comme suit :

$$(M, \ell) = (N_0, n_0) \otimes (M_{i_1}, \ell_{i_1}) \otimes (N_1, n_1) \otimes \cdots \otimes (M_{i_s}, \ell_{i_s}) \otimes (N_s, n_s)$$

où pour tout  $j = 0 \dots s$ ,

$$(N_j, n_j) = (M_{i_{j-1}+1}, \ell_{i_{j-1}+1}) \otimes \cdots \otimes (M_{i_j-1}, \ell_{i_j-1})$$

Remarquons que la définition de  $(N_j, n_j)$  peut correspondre à un produit vide. Dans ce cas, on pose  $(N, n_j) = 1$  où 1 est un élément neutre ajouté à l'ensemble des matrices pondérées (il correspond virtuellement à  $(I_n, 0)$  où  $I_n$  est la matrice identité pour le semi-anneau considéré).

Définissons maintenant  $(N'_j, n'_j) = 1$  si  $(N_j, n_j) = 1$  et  $(N'_j, n'_j) = (S, m)$  sinon, où  $(S, m)$  est la matrice de longueur minimale dans  $A$ .

On a maintenant,

$$(M', \ell') = (N'_0, n'_0) \otimes (M_{i_1}, \ell_{i_1}) \otimes (N'_1, n'_1) \otimes \cdots \otimes (M_{i_s}, \ell_{i_s}) \otimes (N'_s, n'_s)$$

appartient à  $C$ . Montrons que  $(M, \ell) \preceq_{\frac{\varepsilon}{2}} (M', \ell')$ .

Pour cela, remarquons que pour tout  $j = 0 \dots s$  tel que  $N_j \neq 1$ , tous les coefficients finis de  $N_j$  sont au plus égaux à  $an_j$  (ils ne peuvent pas être égaux à  $+\infty$  puisque  $N_j$  et  $N'_j$  sont tous les deux d'images  $E$  par  $\varphi$ ). Donc,  $N_j \leq N'_j + an_j$ . De plus, puisque  $\sum_{j=1}^s n_j \leq \eta\ell$ , il s'ensuit que  $M \leq M' + a\eta\ell = M' + \frac{\varepsilon\ell}{2}$ . Et puisque pour tout  $j = 0 \dots s$ ,  $n'_j \leq n_j$ , on a  $\ell' \leq \ell$ .

Finalement,  $\langle A \rangle_{p,\eta} \preceq_{\frac{\varepsilon}{2}} C$ . □

Le lemme suivant montre qu'il y a un nombre fini de matrices uniformes maximales plus petites qu'une matrice donnée. On utilise ce lemme pour prouver le lemme 6.4.2.

**Lemme 6.4.1.** *Étant donnée une matrice  $M$ , il existe un ensemble fini de matrices  $U$  tel que :*

- toutes les matrices dans  $U$  sont uniformes,
- $N \leq M$  pour tout  $N \in U$ ,
- pour toute matrice uniforme  $P \leq M$ , il existe  $N \in U$  telle que  $P \leq N$ .

*Démonstration.* Soit  $M$  une matrice, et  $S$  l'ensemble des valeurs de ses coefficients. On définit :

$$U = \{N \mid \varphi(N) = E, E \otimes N \otimes E = N, \\ N \leq M, \text{ tous les coefficients de } N \text{ sont dans } S \cup \{+\infty\}\}.$$

Bien-sur, puisque tous les coefficients des matrices de  $U$  sont dans un ensemble fini  $S$ , alors  $U$  est fini. De plus, il est calculable. Le fait que toutes les matrices  $N$  de  $U$  sont uniformes et que  $N \leq M$  provient de la définition. Il reste donc à montrer le dernier point.

Considérons donc une matrice uniforme  $P$  telle que  $P \leq M$ . Considérons la fonction :

$$f : \rightarrow S \cup \{+\infty\} \\ x \mapsto \inf\{y \in S \mid y \geq x\}.$$

Soit  $N$  l'image de  $P$  par  $f$  (on applique  $f$  coefficient par coefficient). Tout d'abord,  $P \leq N$ . Il reste à montrer que  $N \in U$ . Chaque coefficient de  $N$  est dans  $S \cup \{+\infty\}$  par construction. Puisque  $f$  conserve l'ordre, on a  $N = f(P) \leq f(M) = M$ . Puisque  $f$  préserve l'ordre et que la multiplication par  $E$  fait uniquement intervenir le calcul de minima (qui sont préservés par  $f$ ),

$$E \otimes N \otimes E = E \otimes f(P) \otimes E = f(E \otimes P \otimes E) = f(P) = N$$

Finalement, puisque  $P \leq N \leq M$ ,  $E = \varphi(P) \leq \varphi(N) \leq \varphi(M) = E$ . Alors  $\varphi(N) = E$ . En utilisant toutes les remarques précédentes, on obtient  $N \in U$ . □

Si on applique le lemme 6.4.1 à toutes les matrices utilisées dans la définition des ensembles présentables, on obtient le lemme suivant.

**Lemme 6.4.2.** *Étant donné un ensemble présentable  $B$ , il existe un ensemble présentable  $C$  tel que :*

- *toutes les matrices pondérées de  $C$  sont uniformes,*
- *pour toute matrice pondérée  $(P, \ell) \in C$ , il existe  $(M, \ell) \in B$  avec  $P \leq M$ ,*
- *pour toute matrice pondérée uniforme  $(P, \ell)$  telle que  $(M, \ell) \in B$  pour une certaine matrice  $M \geq P$ , il existe  $(N, \ell) \in C$  telle que  $P \leq N$ .*

On peut maintenant donner la preuve de la proposition 6.4.3.

*Démonstration.* L'idée est d'utiliser le lemme 6.4.2 pour obtenir un ensemble  $B$ , puis d'utiliser le lemme 6.4.2 afin de l'approximer par un ensemble ne contenant que des matrices uniformes.

Tout d'abord, pour  $\eta$  tel que  $a\eta \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , pour tout  $p$  et pour toute matrice pondérée  $(M, \ell) \in \langle A \rangle_{p, \eta}^u$ , on a  $(M, \ell) \preceq_{\frac{\varepsilon}{2}} (E \otimes M \otimes E, \ell)$  (en fait on a même  $\approx_{\frac{\varepsilon}{2}}$ , mais on n'a besoin que d'une direction). En effet, la matrice pondérée  $(M, \ell)$  peut être décomposée comme :

$$(M, \ell) = (M_1, \ell_1) \otimes (M_2, \ell_2) \otimes (M_3, \ell_3) ,$$

où  $(M_1, \ell_1), (M_3, \ell_3) \in A$ ,  $(M_2, \ell_2) \in \langle A \rangle_{p, \eta}$  et  $\ell_1 + \ell_3 \leq \eta \ell$ . On a :

$$\begin{aligned} M &= M_1 \otimes M_2 \otimes M_3 \leq (E \otimes M_1) \otimes M_2 \otimes (M_3 \otimes E) + a(\ell_1 + \ell_3) \\ &\leq E \otimes M \otimes E + a\eta \ell \leq E \otimes M \otimes E + \frac{\varepsilon}{2} \ell . \end{aligned}$$

On peut maintenant faire la preuve. Soit  $\varepsilon > 0$  et  $a > 0$ . En appliquant la proposition 6.4.2 avec les paramètres  $\frac{\varepsilon}{2}$  et  $a$ , on obtient  $\eta > 0$ . Soit maintenant un ensemble présentable  $A$ , on sait qu'il existe un ensemble présentable  $B$  tel que  $\langle A \rangle_{p, \eta} \preceq_{\frac{\varepsilon}{2}} B \preceq_{\frac{\varepsilon}{2}} \langle A \rangle$ . Appliquons le lemme 6.4.2 à  $B$ . On obtient un ensemble  $C$ . Montrons que cet ensemble vérifie les conclusions de la proposition.

Pour cela, soit  $(P, k) \in \langle A \rangle_{p, \eta}^u$ , montrons que  $(P, k) \preceq_{\varepsilon} C$ . D'après ce qui précède,  $(P, k) \approx_{\frac{\varepsilon}{2}} (P', k)$  où  $P' = E \otimes P \otimes E$  est uniforme. Par construction de  $B$ , on a  $(P', k) \preceq_{\frac{\varepsilon}{2}} (M, \ell)$  pour  $(M, \ell) \in B$ .

$$P' - \frac{\varepsilon}{2} k \leq M$$

Donc, d'après le lemme 6.4.2, il existe  $(N, \ell) \in C$  avec  $P' - \frac{\varepsilon}{2} k \leq N$ . On a donc  $(P, k) \preceq_{\frac{\varepsilon}{2}} (P', k) \preceq_{\frac{\varepsilon}{2}} (N, \ell) \in C$ . Finalement,

$$\langle A \rangle_{p, \eta}^u \preceq_{\varepsilon} C \preceq_0 B \preceq_{\varepsilon} \langle A \rangle$$

où  $\preceq_0$  provient du lemme 6.4.2. □



### 6.4.3 Produit de matrices uniformes : preuve de la proposition 6.4.1

L'objectif de cette section est de prouver qu'on peut calculer un ensemble présentable équivalent à la clôture par produit d'un ensemble présentable de matrices uniformes.

Pour cela on introduit une notion encore plus forte que la notion de matrices uniformes : la notion de **matrice uniforme normalisée**.

On commence par décrire cette notion, pour ensuite faire la preuve de la proposition 6.4.1.

#### Définition 6.4.2.

Une matrice uniforme  $M$  est dite uniforme normalisée si  $M^2 = 2M$ .

Les lemmes suivants donnent des propriétés de ces matrices uniformes normalisées.

**Lemme 6.4.3.** *Étant donnée une matrice  $M$  d'image idempotente  $E$  par  $\varphi$ , les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $M$  est uniforme normalisée,
2. pour tous indices  $g, h$  tels que  $E_{g,h} = 0$ , il existe  $i$  tel que  $E_{g,i} = 0$ ,  $E_{i,h} = 0$  et  $M_{g,h} = M_{i,i}$ ,
3.  $(aM) \otimes (bM) = (a+b)M$  pour tous réels strictement positifs  $a, b$ ,
4.  $M^r = rM$  pour tout entier strictement positif  $r$ .

*Démonstration.*

1 implique 2 : Supposons que  $M$  est uniforme normalisée. Considérons  $g, h$  tels que  $E_{g,h} = 0$ .

Tout d'abord pour  $k$  une puissance de 2,  $M^k = kM$ . En effet, c'est vrai pour  $k = 1$  et par induction, pour tout puissance de 2, on a :

$$M^{2k} = M^k \otimes M^k = (kM) \otimes (kM) = k(M \otimes M) = k(2M) = (2k)M$$

Considérons maintenant  $k$  une puissance de 2 plus grande que  $K$ . Par ce qui précède on a  $(M^k)_{g,h} = kM_{g,h}$ . Puisque  $(M^k)_{g,h}$  est calculé comme un minimum, il existe une suite  $g = i_0, i_1, \dots, i_k = h$  telle que  $M_{i_0,i_1} + \dots + M_{i_{k-1},i_k} = kM_{g,h}$ . D'après la proposition 5.5.7,  $M_{i_{j-1},i_j} \leq M_{g,h}$  pour tout  $j = 1 \dots k$ . Supposons que  $M_{i_{j-1},i_j} < M_{g,h}$  pour un certain  $j$  de  $1 \dots k$ , alors on aurait  $M_{i_0,i_1} + \dots + M_{i_{k-1},i_k} < kM_{g,h}$ , ce qui contredit l'hypothèse. Donc,  $M_{i_0,i_1} = \dots = M_{i_{k-1},i_k} = M_{g,h}$ . Par le principe des tiroirs, on a  $i_j = i_{j'}$  pour certains  $j' > j$ . L'indice  $i_j$  est alors un témoin de la seconde condition.

2 implique 3 : Soient  $g, h$  des indices tels que  $E_{g,h} = 0$ . On a  $M_{g,h} = M_{i,i}$  pour un certain  $i$  tel que  $E_{g,i} = E_{i,h} = 0$ . Remarquons que  $M_{g,h} \leq M_{g,i} \leq M_{i,i}$ , et donc  $M_{g,h} = M_{g,i}$ . De manière similaire  $M_{g,h} = M_{i,h}$ .

On peut maintenant calculer :

$$(a + b)M_{g,h} = aM_{g,h} + bM_{g,h} = aM_{g,i} + bM_{i,h} \geq ((aM) \otimes (bM))_{g,h}$$

Inversement, il existe  $i$  tel que  $((aM) \otimes (bM))_{g,h} = (aM)_{g,i} + (bM)_{i,h}$ . On a :

$$((aM) \otimes (bM))_{g,h} = aM_{g,i} + bM_{i,h} \geq aM_{g,h} + bM_{g,h} = (a + b)M_{g,h}$$

3 implique 4 : La preuve se fait par induction sur  $r$ . Pour  $r = 1$ , on a  $M^r = rM$ . Et pour  $r \geq 1$ , on a  $M^{r+1} = M^r \otimes M = (rM) \otimes M = (r + 1)M$ .

4 implique 1 : Il suffit de prendre  $r = 2$ . □

On montre maintenant qu'étant donnée une matrice uniforme  $M$ , la suite  $\frac{1}{r}M^r$  converge vers une certaine matrice uniforme normalisée, notée  $\bar{M}$ .

**Lemme 6.4.4.** *Étant donnée une matrice uniforme  $M$ , il existe une unique matrice uniforme normalisée qui coïncide avec  $M$  sur la diagonale. On la note  $\bar{M}$ . De plus, on a :*

1. pour toute matrice uniforme  $M$ ,  $M \leq \bar{M}$ ,
2. pour toutes matrices  $M, N$  avec  $M_{i,i} \leq N_{i,i}$  pour  $i = 1 \dots m$ ,  $\bar{M} \leq \bar{N}$ ,
3. pour tout  $\varepsilon > 0$ , et tout  $a > 0$ , il existe un entier  $r$  tel que pour toute matrice uniforme  $M$  dont les coefficients finis sont plus petits que  $a$ ,  $r\bar{M} \leq M^r + \varepsilon r$ .

*Démonstration.* Définissons  $\bar{M}$  pour tous indices  $g, h$  par :

$$\bar{M}_{g,h} = \min\{M_{i,i} \mid E_{g,i} = E_{i,h} = 0\}$$

Montrons que  $\bar{M}$  est uniforme.

$$\begin{aligned} (E \otimes \bar{M} \otimes E)_{g,h} &= \inf\{\bar{M}_{g',h'} \mid E_{g,g'} = E_{h',h} = 0\} \\ &= \inf\{M_{i,i} \mid E_{g,g'} = E_{g',i} = E_{i,h'} = E_{h',h} = 0\} \\ &= \inf\{M_{i,i} \mid E_{g,i} = E_{i,h} = 0\} \\ &= \bar{M}_{g,h} \end{aligned}$$

Montrons que  $\bar{M}$  et  $M$  coïncident sur la diagonale. Soit  $j$  un indice, on a :

$$\bar{M}_{j,j} = \inf\{M_{i,i} \mid i \leftrightarrow j\} = M_{j,j}$$

Montrons que  $\bar{M}$  est uniforme normalisée. On utilise la seconde caractérisations du lemme 6.4.3. Soit  $g, h$  tels que  $E_{g,h} = 0$ . Par définition de  $\bar{M}$ , il existe  $i$  tel que  $E_{g,i} = E_{i,h} = 0$  et  $\bar{M}_{g,h} = M_{i,i}$ , qui est égal à  $\bar{M}_{i,i}$  du fait que  $M$  et  $\bar{M}$  coïncident sur la diagonale. Donc,  $\bar{M}$  est uniforme normalisée.

*Premier élément* : Montrons maintenant que  $M \leq \bar{M}$ . Cela vient du fait que pour  $E_{g,h} = 0$ , il existe  $i$  tel que  $E_{g,i} = E_{i,h} = 0$  et  $\bar{M}_{g,h} = M_{i,i}$ . De plus, puisque  $M_{g,h} \leq M_{i,i}$  par la proposition 5.5.6. Ainsi  $M \leq \bar{M}$ .

Démontrons l'unicité. Pour cela on montre que si deux matrices uniformes normalisées  $M$  et  $N$  coïncident sur la diagonale alors elles sont égales. En effet, étant donnés  $g, h$  tels que  $E_{g,h} = 0$ , il existe  $i$  tel que  $E_{g,i} = E_{i,h} = 0$  et  $\bar{M}_{g,h} = M_{i,i}$ . Donc,  $M_{g,h} = M_{i,i} = N_{i,i} \geq N_{g,h}$ . Puisque  $M$  et  $N$  jouent un rôle symétrique, on a finalement  $M = N$ .

*Deuxième élément* : C'est immédiat par la définition de  $\bar{M}$ .

*Troisième élément* : Étant donnés  $\varepsilon > 0$  et  $a > 0$ , on choisit  $r$  tel que

$$r\varepsilon \geq Ka \tag{6.2}$$

Soit  $M$  une matrice uniforme dont les coefficients finis n'excèdent pas  $a$ . Soient  $g, h$  tels que  $E_{g,h} = 0$ . Par définition, il existe une suite  $g = i_0, i_1, \dots, i_r = h$  telle que  $(M^r)_{g,h} = M_{i_0,i_1} + \dots + M_{i_{r-1},i_r}$ . Tout d'abord, puisque  $E_{g,h} = 0$ ,  $(M^r)_{g,h} < +\infty$ . Donc  $M_{i_{j-1},i_j} < +\infty$  pour tout  $j = 1 \dots r$ , c'est-à-dire  $E_{i_{j-1},i_j}$ . Soit  $j$  de  $1 \dots r$ . Deux cas peuvent se produire :

- $i_{j-1} \leftrightarrow i_j$ . Dans ce cas, on a  $E_{g,i_j} = E_{i_j,h} = 0$  et  $M_{i_{j-1},i_j} = M_{i_j,i_j}$  par le lemme 5.5.6. Ce qui signifie que  $M_{i_j,i_j}$  apparait dans le calcul de l'infimum définissant  $\bar{M}_{g,h}$ . Ainsi,  $M_{i_{j-1},i_j} = M_{i_j,i_j} \geq \bar{M}_{g,h}$ .
- $(i_{j-1}, i_j)$  est transient, c'est-à-dire  $E_{i_{j-1},i_j} = 0$  et  $E_{i_j,i_{j-1}} = +\infty$ . Par le lemme 5.5.8, il y a au plus  $K$  indices dans ce cas. Pour chacun d'eux, on utilisa l'inégalité  $M_{i_{j-1},i_j} \geq 0$ .

En combinant ces inégalités on obtient :

$$\begin{aligned} (M^r)_{g,h} + r\varepsilon &= M_{i_0,i_1} + \dots + M_{i_{r-1},i_r} + r\varepsilon && \text{(par choix des } i_0, \dots, i_r) \\ &\geq (r - K)M_{i,i} + Ka && \text{(remarque précédente et (6.2))} \\ &\geq r\bar{M}_{g,h} && \text{(puisque } a \geq M_{i,i}) \end{aligned}$$

On a donc  $r\bar{M} \leq M^r + r\varepsilon$ . □

On peut maintenant établir la proposition 6.4.1.

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$  et  $A$  un ensemble présentable. On peut écrire :

$$A = \bigcup_{1 \leq i \leq p} \{(x_i M_i, x_i)\} \cup \bigcup_{p+1 \leq i \leq m} \{(x M_i, x) \mid x \geq x_i\}$$

Comme précédemment, on va approximer  $\langle A \rangle$  par l'union de deux ensembles : un ensemble de produits exacts jusqu'à une certaine longueur, et un ensemble asymptotique de matrices qui sera le produit des barycentres des matrices de  $A$ . L'ensemble présentable est l'ensemble  $C$  définit dans l'équation (6.5) ci-dessous. On introduit tout d'abord un certain nombre de paramètres.

*Construction de l'ensemble présentable  $C$*  : Soit  $a$  le plus grand coefficient fini des matrices  $M_i$  (on pose  $a = 1$  si ce coefficient est 0). Par le lemme 6.4.4 appliqué avec les paramètres  $\frac{\varepsilon}{2}$  et  $a$ , on obtient un entier  $r$ . On choisit alors un entier  $z$  suffisamment grand pour avoir :

$$rx_i \leq \frac{\varepsilon z}{2am}, \quad (6.3)$$

On choisit aussi  $\gamma > 0$ , inverse d'un entier tel que :

$$ma\gamma \leq \varepsilon. \quad (6.4)$$

On peut maintenant définir  $C$  de la manière suivante :

$$C = C_1 \cup C_2 \quad (6.5)$$

$$\text{où } C_1 = \{(M, \ell) \in \langle A \rangle \mid \ell < z\} \quad (6.6)$$

$$\text{et } C_2 = \bigcup_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_m \in [0,1] \cap \gamma\mathbb{N} \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1}} \left\{ \left( \ell \overline{\lambda_1 M_1 \otimes \dots \otimes \lambda_m M_m}, \ell \right) \mid \ell \geq z \right\} \quad (6.7)$$

Tout d'abord  $C$  est présentable et calculable. Il reste à prouver que  $C \approx_\varepsilon \langle A \rangle$ . On fait successivement les deux directions.

*Première direction  $C \preceq_\varepsilon \langle A \rangle$*  : Remarquons que puisque  $C_1 \subseteq \langle A \rangle$ , on a  $C_1 \preceq_\varepsilon \langle A \rangle$ . Il reste donc à établir que  $C_2 \preceq_\varepsilon \langle A \rangle$ . Soit  $(M, \ell) \in C_2$ . Par définition de  $C_2$ ,  $M$  est de la forme :

$$M = \ell \overline{\lambda_1 M_1 \otimes \dots \otimes \lambda_m M_m},$$

pour un certain  $\ell \geq z$  et des coefficients positifs  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  dont la somme vaut 1. On va construire  $(N, \ell') \in \langle A \rangle$  telle que  $(M, \ell) \preceq_\varepsilon (N, \ell')$ . Pour cela, on construit  $(P, k) \in \langle A \rangle$  qui est proche de  $\frac{\ell}{r}(\lambda_1 M_1 \otimes \dots \otimes \lambda_m M_m)$  sur la diagonale. Ensuite, on l'itère  $r$  fois en utilisant le lemme 6.4.4 pour la rendre proche de  $\ell \overline{\lambda_1 M_1 \otimes \dots \otimes \lambda_m M_m}$ , c'est-à-dire  $M$ .

Plus formellement, puisque  $\ell \geq z$  et par (6.3), on a  $rx_i \leq \frac{\varepsilon z}{2am} \leq \frac{\varepsilon \ell}{2am}$ . Il existe ainsi des entiers  $y_1, \dots, y_m$  tels que  $ry_i x_i \in \left[ \lambda_i \ell - \frac{\varepsilon \ell}{2am}, \lambda_i \ell \right]$  pour tout  $i = 1 \dots m$ . Ces entiers ont la propriété suivante :

$$ry_i x_i + \dots + ry_m x_m \leq \ell \quad \text{et} \quad \lambda_i \ell \leq ry_i x_i + \frac{\varepsilon \ell}{2am} \quad \text{pour tout } i = 1 \dots m. \quad (6.8)$$

Considérons alors :

$$(P, k) = (x_1 M_1, x_1)^{y_1} \otimes \dots \otimes (x_m M_m, x_m)^{y_m}$$

On a  $(P, k) \in \langle A \rangle$  puisque  $(x_1 M_1, x_1), \dots, (x_m M_m, x_m)$  appartiennent à  $A$ . Une autre conséquence est que  $P_{i,i} = x_1 y_1 (M_1)_{i,i} + \dots + x_m y_m (M_m)_{i,i}$  par la proposition 5.5.5.

Montrons maintenant que  $(M, \ell) \preceq_\varepsilon (P, k)^r$ . En ce qui concerne les longueurs,  $rk \leq \ell$  par (6.8). Il reste à voir que  $M \leq P^r + \varepsilon\ell$ . On le montre tout d'abord pour les coefficients diagonaux pour  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Pour tout  $i = 1 \dots m$ , on a :

$$\begin{aligned}
M_{i,i} &= \lambda_1 \ell (M_1)_{i,i} + \dots + \lambda_m \ell (M_m)_{i,i} && \text{(par la proposition 5.5.5)} \\
&\leq \left( rx_1 y_1 + \frac{\varepsilon \ell}{2am} \right) (M_1)_{i,i} + \dots + \left( rx_m y_m + \frac{\varepsilon \ell}{2am} \right) (M_m)_{i,i} && \text{(par (6.8))} \\
&\leq r (x_1 y_1 (M_1)_{i,i} + \dots + x_m y_m (M_m)_{i,i}) + \frac{\varepsilon \ell}{2} \\
&\leq r P_{i,i} + \frac{\varepsilon \ell}{2} . && \text{(par la proposition 5.5.5)}
\end{aligned}$$

En le combinant avec le lemme 6.4.4, on obtient :

$$M = \bar{M} \leq r\bar{P} + \frac{\varepsilon \ell}{2} \leq \left( P^r + \frac{\varepsilon \ell}{2} \right) + \frac{\varepsilon \ell}{2} = P^r + \varepsilon \ell$$

Finalement, on a prouvé que  $(M, \ell) \preceq_\varepsilon (P, k)^r \in \langle A \rangle$ . Ainsi,  $C \preceq_\varepsilon \langle A \rangle$ .

*Seconde direction  $\langle A \rangle \preceq_\varepsilon C$  :* Cette partie de la preuve utilise la structure uniforme des matrices. Soit  $(M, \ell)$  dans  $\langle A \rangle$  :

$$(M, \ell) = (\ell_1 M_{i_1}, \ell_1) \otimes \dots \otimes (\ell_k M_{i_k}, \ell_k) .$$

Par définition de  $C_1$ , si  $\ell < z$  alors  $(M, \ell) \in C_1$ . Supposons donc que  $\ell \geq z$ , et montrons que  $(M, \ell) \preceq_\varepsilon (P, \ell)$  pour une certaine matrice pondérée  $(P, \ell) \in C_2$ .

Chaque matrice  $M_i$  pour  $i = 1 \dots m$  peut apparaître ou pas dans le produit qui définit  $(M, \ell)$ . Pour tout  $i = 1 \dots m$ , on définit  $\beta_i$  le ratio des longueurs correspondant aux matrices impliquant  $M_i$ , par rapport au poids total. On le formalise de la manière suivante :

$$\beta_i = \frac{1}{\ell} \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, k\} \\ i_j = i}} \ell_j .$$

Remarquons que la somme des  $\beta_i$  vaut 1. On doit construire une matrice pondérée  $(P, \ell)$  de  $C_2$  telle que  $(M, \ell) \preceq_\varepsilon (P, \ell)$ . Deux arguments indépendants interviennent dans la preuve : 1) montrer que le produit précédent peut être transformé en un produit plus régulier (plus précisément, la répétition du même produit), et 2) montrer que les  $\beta_i$  peuvent être approximés par des multiples de  $\gamma$ , ce qui définit les  $\lambda_i$  dans la définition de  $C_2$ . La preuve se fait alors en deux temps.

La première étape consiste à remarquer que :

$$M \leq \ell \overline{\beta_1 M_1 \otimes \dots \otimes \beta_m M_m} .$$

Cela vient directement du lemme 6.4.4, puisque  $M = \bar{M}$  et  $\ell(\beta_1 M_1 \otimes \cdots \otimes \beta_m M_m)$  coïncident sur la diagonale. Cette présentation est très proche de celle de  $C_2$ . Le seul point manquant est que les coefficients  $\beta_i$  doivent être des multiples de  $\gamma$ . Pour corriger cela, on choisit pour tout  $i = 1 \dots m$  des valeurs  $\lambda_i$ , multiples de  $\gamma$ , de somme 1 tels que  $\beta_i \leq \lambda_i + \gamma$  pour tout  $i = 1 \dots m$ . (C'est possible en choisissant  $\lambda_i = \lfloor \frac{\beta_i}{\gamma} \rfloor \gamma$  pour  $i = 1 \dots m-1$ , et  $\lambda_m$  tel que  $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$ .) On a alors :

$$\begin{aligned} \beta_1 M_1 \otimes \cdots \otimes \beta_m M_m &\leq (\lambda_1 + \gamma) M_1 \otimes \cdots \otimes (\lambda_m + \gamma) M_m && \text{(choix des } \lambda) \\ &\leq (\lambda_1 M_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_m M_m) + m a \gamma \\ &\leq (\lambda_1 M_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_m M_m) + \varepsilon . && \text{(par (6.4))} \end{aligned}$$

Ainsi,  $M \leq \ell \overline{\beta_1 M_1 \otimes \cdots \otimes \beta_m M_m} \leq \ell \overline{\lambda_1 M_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_m M_m} + \varepsilon \ell$  (en utilisant le lemme 6.4.4). Finalement, on a  $(M\ell) \preceq_\varepsilon C_2$ , et donc  $\langle A \rangle \preceq_\varepsilon C$ .  $\square$

#### 6.4.4 Extraire des produits de matrices uniformes : preuve de la proposition 6.4.4

On montre ici la proposition 6.4.4, qui dit que tout produit de matrices de  $A$  peut être décomposé en produits particuliers. Plus formellement, étant donné  $\eta$ , on peut trouver  $p$  tel que :

$$\langle A \rangle = \langle A \rangle_{p,\eta} \cup \langle A \rangle_{p,\eta} \otimes \langle \langle A \rangle_{p,\eta}^u \rangle \otimes \langle A \rangle_{p,\eta}$$

Ce résultat donne qu'étant donné un produit de matrices de  $A$ , ou bien le produit est dans  $\langle A \rangle_{p,\eta}$ , ou bien il peut être factorisé comme  $(N_1, n_1) \otimes \cdots \otimes (N_m, n_m)$  tels que  $(N_1, n_1), (N_m, n_m) \in \langle A \rangle_{p,\eta}$  et  $(N_2, n_2), \dots, (N_{m-1}, n_{m-1}) \in \langle A \rangle_{p,\eta}^u$ . Ces preuves font uniquement intervenir les longueurs des matrices pondérées et pas le contenu des matrices elles-mêmes.

On peut ainsi énoncer le résultat uniquement en terme de suites d'entiers. Pour cela, on redonne la définition de petit produit : une suite de nombres  $\ell_1, \dots, \ell_k$  de somme  $\ell$  est  $p, \eta$ -petite si il existe  $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq k$  avec  $r \leq p$  tels que  $\sum_{j=1}^r \ell_{i_j} \geq (1 - \eta)\ell$ . Elle est **uniforme**  $p, \eta$ -petite si  $1 < i_1 < \cdots < i_r < k$  dans la définition précédente.

Notre problème peut alors être reformulé comme ceci : étant donné  $\eta > 0$ , on doit trouver un entier  $p$  tel que toute suite d'entiers :

$$\bar{\ell} = \ell_1, \dots, \ell_k ,$$

est  $p, \eta$ -petite, ou peut être factorisée en sous-suite  $\bar{\ell}^1, \dots, \bar{\ell}^m$  telles que  $\bar{\ell}^1, \bar{\ell}^m$  sont  $p, \eta$ -petite, et  $\bar{\ell}^2, \dots, \bar{\ell}^{m-1}$  sont uniformes  $p, \eta$ -petites.

Le premier résultat est un critère pour prouver qu'une suite est  $p, \eta$ -petite.

**Lemme 6.4.5.** *Soit  $\eta > 0$ , il existe  $p$  tel que toute suite d'entiers positifs  $\bar{\ell} = \ell_1, \dots, \ell_k$  telle que pour tout  $i = 1 \dots k$ ,*

$$\frac{\ell_i}{\ell_1 + \cdots + \ell_i} \geq \eta , \quad \left( \text{ou encore } \ell_i \geq \frac{\ell_1 + \cdots + \ell_{i-1}}{1 - \eta} \right)$$

*est  $p, \eta$ -petite.*

*Démonstration.* Soit  $\eta$ , fixons  $p \geq \frac{1}{\eta}$ . Soit une suite d'entiers positifs  $\bar{\ell} = \ell_1, \dots, \ell_k$ . Remarquons tout d'abord que si  $k \leq p$ , alors on a la conclusion. Sinon, on factorise cette suite en  $\bar{\ell} = \bar{\ell}^1, \bar{\ell}^2$  où  $\bar{\ell}^2$  a longueur  $p$ . Soit  $s_1$  la somme des entiers de la suite  $\bar{\ell}^1$  et  $s_2$  la somme des entiers de la suite  $\bar{\ell}^2$ . Par hypothèse, tout entier de  $\bar{\ell}^2$  est au moins égal à  $\frac{s_1}{1-\eta}$ . Ainsi  $s_2 \geq \frac{ps_1}{1-\eta}$ , ce qui signifie :

$$s_1 \leq \frac{1-\eta}{p} s_2 \leq \eta s_2 \leq \eta(s_1 + s_2)$$

Donc,  $\bar{\ell}$  est  $p, \eta$ -petite. □

On veut extraire des suites  $p, \eta$ -petites. L'uniformité est une notion symétrique à gauche et à droite, puisque elle requiert qu'à la fois le premier et le dernier entier soient petits. C'est pour cela que l'on a une étape intermédiaire qui considère la notion d'uniformité à droite. Formellement, une suite d'entiers positifs  $\ell_1, \dots, \ell_k$  de somme  $\ell$  est **uniforme à droite**  $p, \eta$ -**petite** (resp. **uniforme à gauche**  $p, \eta$ -**petite**) s'il existe  $1 \leq i_1 < \dots < i_m < k$  (resp.  $1 < i_1 < \dots < i_m \leq k$ ) pour  $m \leq p$  tels que  $\sum_{j=1}^m \ell_{i_j} \leq \eta \ell$ .

On peut maintenant prouver la variante à droite de la proposition 6.4.4.

**Lemme 6.4.6.** *Soit  $\eta > 0$ , il existe un entier  $p$  tel que toute suite d'entiers positifs  $\bar{\ell}$  peut être factorisée en  $\bar{\ell} = \bar{\ell}^1, \dots, \bar{\ell}^k$  telles que :*

- $\bar{\ell}^1, \dots, \bar{\ell}^{k-1}$  sont uniformes à droite  $p, \eta$ -petites,
- $\bar{\ell}^k$  est  $p, \eta$ -petite.

*Démonstration.* Soit  $\eta > 0$  et  $p$  obtenu par le lemme 6.4.5 pour la valeur  $\frac{\eta}{2}$ . Prouvons d'abord (★) : Étant donnée une suite  $\bar{\ell}$  d'entiers positifs, alors

- soit  $\bar{\ell}$  est  $p, \eta$ -petite,
- soit elle a un préfixe non vide uniforme à droite  $p, \eta$ -petit.

Soit  $\bar{\ell}$  une suite d'entiers positifs. Deux cas se présentent. Si, pour tout  $k \geq 1$  :

$$\frac{\ell_k}{\ell_1 + \dots + \ell_k} \geq \frac{\eta}{2}$$

alors par le lemme 6.4.5,  $\bar{\ell}$  est  $p, \frac{\eta}{2}$ -petite et ainsi  $p, \eta$ -petite. Sinon soient  $\ell_1, \dots, \ell_k$  le plus petit préfixe non vide tel que :

$$\frac{\ell_k}{\ell_1 + \dots + \ell_k} < \frac{\eta}{2}$$

Par minimalité de la construction, cette suite  $\ell_1, \dots, \ell_{k-1}$  satisfait l'hypothèse du lemme 6.4.5 pour la valeur  $\frac{\eta}{2}$ . Ainsi, elle est  $p, \frac{\eta}{2}$ -petite. De plus, puisque  $\ell_k \leq \frac{\eta}{2}(\ell_1 + \dots + \ell_k)$ , il s'ensuit que  $\ell_1, \dots, \ell_k$  est uniforme à droite  $p, \eta$ -petite. Ce qui prouve (★). Le lemme est obtenu par induction en utilisant (★). □

On peut maintenant étendre ce qui précède dans une version droite-gauche.

**Lemme 6.4.7.** Soit  $\eta > 0$ , il existe un entier  $p$  tel que toute suite d'entiers positifs  $\bar{\ell}$  peut être factorisée en  $\bar{\ell}^1, \dots, \bar{\ell}^k$  telles que :

- $\bar{\ell}^1$  et  $\bar{\ell}^k$  sont  $p, \eta$ -petits, et
- $\bar{\ell}^2, \dots, \bar{\ell}^{k-1}$  sont uniformes  $p, \eta$ -petits.

*Démonstration.* Le principe consiste à composer le lemme 6.4.6 avec lui-même, et plus précisément avec sa variante symétrique. Pour cela, on utilise la propriété suivante (★) : Étant donnée  $\bar{\ell}$  factorisée en  $\bar{\ell} = \bar{\ell}^1, \dots, \bar{\ell}^k$ , de somme respective  $s_1, \dots, s_k = \bar{s}$ ,

- si ces suites  $\bar{\ell}^1, \dots, \bar{\ell}^k$  sont toutes  $p, \eta$ -petites, et  $\bar{s}$  est  $p, \eta$ -petite, alors  $\bar{\ell}$  est  $p^2, 2\eta$ -petite,
- si les suites  $\bar{\ell}^1, \dots, \bar{\ell}^k$  sont uniformes à droite  $p, \eta$ -petites, et  $\bar{s}$  est uniforme à gauche  $p, \eta$ -petite, alors  $\bar{\ell}$  est uniforme  $p^2, 2\eta$ -petite.

Pour le premier point, soit  $i_1 < \dots < i_r$  avec  $r \leq p$  des indices témoins du fait que  $\bar{s}$  est  $p, \eta$ -petite. Puisque chaque  $\bar{\ell}^i$  est  $p, \eta$ -petite, il existe une sous-suite  $\bar{b}^i$  de  $\bar{\ell}^i$  de longueur au plus  $p$  et de somme au moins  $(1 - \eta)s_i$ . Considérons maintenant :

$$\bar{b} = \bar{b}^{i_1}, \dots, \bar{b}^{i_r}$$

C'est une sous-suite  $\bar{\ell}$ , de longueur au plus  $p^2$ , et de somme au plus :

$$\begin{aligned} (1 - \eta)s_{i_1} + \dots + (1 - \eta)s_{i_r} &\leq (1 - \eta)(s_{i_1} + \dots + s_{i_r}) \\ &\leq (1 - \eta)^2 t \leq (1 - 2\eta)t, \end{aligned}$$

où  $t$  est la somme totale de la suite  $\bar{\ell}$ . Ainsi  $\bar{b}$  est témoin du fait que  $\bar{\ell}$  est  $p^2, 2\eta$ -petite. Pour le second élément, la preuve est similaire, avec la remarque supplémentaire que la suite  $(\bar{\ell}^1), \dots, (\bar{\ell}^k)$  est uniforme à droite  $p, \eta$ -petite et  $\bar{s}$  est uniforme à gauche  $p, \eta$ -petite, alors ni le premier élément de  $\bar{\ell}^1$ , ni le dernier élément de  $\bar{\ell}^k$  ne sont utilisés pour la construction de  $\bar{b}$ . Ainsi, cette fois-ci  $\bar{b}$  est témoin du fait  $\bar{\ell}$  est uniforme  $p^2, 2\eta$ -petite. (★) est établi.

Soit la suite  $\bar{\ell}$ . D'après le lemme 6.4.6 utilisé avec le paramètre  $\frac{\varepsilon}{2}$ , elle peut être décomposée en  $\bar{\ell} = \bar{\ell}^1, \dots, \bar{\ell}^m$  où  $(\bar{\ell}^1), \dots, (\bar{\ell}^{m-1})$  est uniforme à droite  $p, \frac{\eta}{2}$ -petite, et  $\bar{\ell}^m$  est  $p, \frac{\eta}{2}$ -petite.

Soient  $s_1, \dots, s_m$  les sommes respectives de  $(\bar{\ell}^1), \dots, (\bar{\ell}^m)$ . On applique le lemme 6.4.6, dans sa version miroir, à la suite  $\bar{s} = s_1, \dots, s_m$ , et on obtient  $\bar{s}^1, \dots, \bar{s}^n$ , où  $\bar{s}^1$  est  $p, \eta$ -petite, et  $\bar{s}^2, \dots, \bar{s}^n$  sont uniformes à gauche  $p, \eta$ -petites. Maintenant rappelons que chaque  $\bar{s}^i$  est de la forme  $s_x, s_{x+1}, \dots, s_y$ . Soit  $\bar{t}^i$  la suite  $\bar{\ell}^x, \bar{\ell}^{x+1}, \dots, \bar{\ell}^y$ . Clairement,  $t^1, \dots, t^n = \bar{\ell}$ . En utilisant le premier élément de (★), on obtient que  $\bar{t}^1$  et  $\bar{t}^n$  sont  $p^2, \eta$ -petite. En utilisant finalement le deuxième élément de (★), on obtient que  $(\bar{t}^2), \dots, (\bar{t}^{n-1})$  sont uniformes  $p^2, \eta$ -petites.  $\square$

Faisons maintenant la preuve de la proposition.

*Démonstration.* Étant donné un produit de  $\langle A \rangle$ , il suffit d'appliquer le lemme 6.4.7 à la suite des longueurs des matrices.  $\square$



## Résumé du chapitre

Dans ce chapitre nous avons vu la preuve du théorème 3.1.1. Le chapitre suivant donne la preuve du théorème 4.1.1.



# Chapitre 7

---

## Équivalence asymptotique : preuve

L'objet de ce chapitre est la preuve du théorème 4.1.1 d'équivalence asymptotique. Ce théorème ainsi que ces applications ont été donnés au chapitre 4.

Le cadre ici est celui des automates max-plus et il s'agit de donner un équivalent asymptotique de la fonction minorante  $g$  (dont la définition est rappelée ci-dessous) calculée par un tel automate.

Plus formellement, le théorème énonce qu'étant donné un automate max-plus calculant une fonction  $f$ , la fonction  $g$  définie par :

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$$
$$n \mapsto \min\{f(w) \mid |w| \geq n\}$$

est soit identiquement égale à  $-\infty$ , soit  $\Theta(n^\alpha)$  pour un rationnel  $\alpha \in [0, 1]$  calculable.

Une première remarque sur ce théorème est que l'on peut décider directement si  $g$  est identiquement égale à  $-\infty$ . En effet, le langage des mots de poids  $-\infty$  est régulier, et l'on sait construire un automate qui le reconnaît (voir section 1.1). On peut alors décider si ce langage est infini. S'il l'est,  $g$  est identiquement égale à  $-\infty$ , sinon ce n'est pas le cas.

L'algorithme que nous allons donner permet néanmoins de le décider aussi.

**Traduction du théorème en termes de matrices.** Supposons que  $g$  n'est pas identiquement égale à  $-\infty$ , et qu'à partir d'un certain entier,  $g$  est positive ( $g$  est croissante par définition). Nous avons vu à la section 1.2 que les automates max-plus ont une définition matricielle. Nous allons donc reformuler le théorème en termes de matrices.

Pour cela, notons  $\mu$  le morphisme représentant l'automate et  $I$  et  $F$  les vecteurs des états initiaux et finaux, comme définis à la section 1.2. Le théorème revient alors à dire deux choses :

- il existe une suite de mots  $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de longueurs strictement croissantes et une constante  $c$  tels que  $I \otimes \mu(w_i) \otimes F \leq c|w_i|^\alpha$ ,

- il existe une constante  $d$  et un entier  $\ell$  tels que pour tout mot  $w$ , si  $|w| \geq \ell$  alors  $|w|^\alpha \leq d(I \otimes \mu(w) \otimes F)$ .

**Traduction en termes de matrices pondérées.** Le théorème peut encore être reformulé en termes de matrices pondérées.

Posons  $A = \{(\mu(w), |w|) \mid w \in \mathbb{A}^*\}$ , l'ensemble des matrices pondérées représentant le comportement de l'automate sur tous les mots. Soit il existe une infinité de matrices pondérées  $(M, \ell) \in A$  telles que  $I \otimes M \otimes F = -\infty$ , soit :

- il existe une constante  $c$  et une suite de matrices pondérées  $(M_i, \ell_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A$ , telles que  $(\ell_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante et  $I \otimes M_i \otimes F \leq c\ell_i^\alpha$ ,
- et il existe une constante  $d$  et un entier  $k$  tels que pour toute matrice pondérée  $(M, \ell) \in A$ , si  $\ell \geq k$  alors  $\ell^\alpha \leq d(I \otimes M \otimes F)$ .

**Preuve.** L'objectif est donc d'approximer  $A$ , de manière à pouvoir détecter les comportements décrits ci-dessus. La structure de la preuve est donnée dans le chapitre 5. Comme pour le chapitre précédent, elle nécessite deux ingrédients : la notion d'approximation d'un ensemble de matrices pondérées et la notion d'ensembles présentables de matrices pondérées.

**Organisation du chapitre.** La section 7.1 donne la définition de l'approximation. La section 7.2 donne la définition d'ensembles présentables. On vérifie aussi dans ces deux sections que les propriétés données au chapitre 5 et utilisées dans la preuve sont vérifiées.

La section 7.3 donne ensuite la preuve de la propriété du produit simple, et la section 7.4 la preuve de la propriété du produit idempotent.

**Notations.** Dans tout le chapitre, on considère un automate max-plus à  $K$  états.

Soit  $\lambda$  un réel positif et  $M$  une matrice à coefficients dans  $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ , on note  $\lambda M$  la matrice définie par  $(\lambda M)_{i,j} = \lambda M_{i,j}$  (avec  $\lambda(-\infty) = -\infty$ ).

Soient  $M$  et  $N$  deux matrices à coefficients dans  $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ , on note  $M \leq N$  si pour tout  $i, j$ ,  $M_{i,j} \leq N_{i,j}$ .

## 7.1 Approximation

Dans ce chapitre, contrairement au précédent, nous cherchons à approximer la fonction qui décrit le comportement minimal d'un automate max-plus. Il s'agit donc d'approximer les matrices pondérées représentant ce comportement minimal, comme le schématise la figure 7.1.

Une matrice pondérée  $(M, \ell)$  est donc « plus intéressante » qu'une matrice pondérée  $(N, k)$  si  $M$  est plus petite que  $N$  et si  $\ell$  est plus grand que  $k$ .

De plus, comme il s'agit d'obtenir une  $\Theta$ -équivalence, il n'est pas nécessaire de se soucier des coefficients multiplicatifs. Ainsi,  $M$  peut être plus petite que  $N$  à un

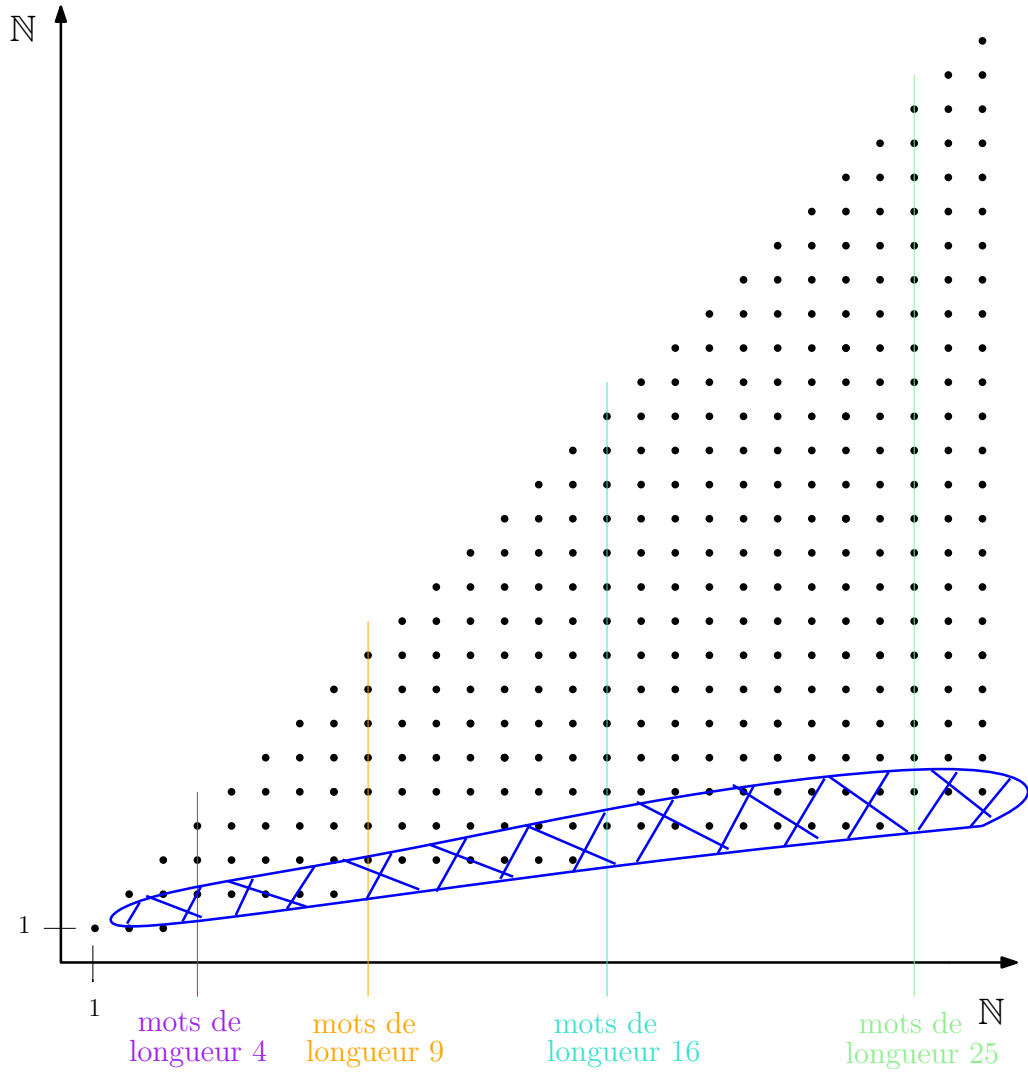


FIGURE 7.1 – Approximer le comportement minimal d’un automate max-plus.

coefficient multiplicatif près, et  $\ell$  peut être plus grand que  $k$  à un coefficient multiplicatif près. Il faudra néanmoins veiller à ce que les coefficients multiplicatifs utilisés restent bornés.

Ces considérations donnent les deux premières conditions dans la définition de l'approximation des matrices pondérées, donnée ci-dessous. La troisième condition provient de la structure générale de la preuve qui a été discutée au chapitre 5 : on ne veut comparer que des matrices qui ont la même structure (qui s'envoient sur la même matrice de chemins).

**Définition 7.1.1** (approximation des matrices pondérées).

Étant donnés  $s \geq 1$ , et deux matrices pondérées  $(M, \ell)$  et  $(N, k)$ , on définit la relation  $(M, \ell) \preceq_s (N, k)$  par :

- $M \leq sN$ ,
- $k \leq s\ell$ ,
- $\varphi(M) = \varphi(N)$ .

On étend maintenant cette définition aux ensembles de matrices pondérées. L'objectif est d'obtenir un ensemble  $B$  de matrices pondérées qui minore, à coefficient multiplicatif  $s$  près, un ensemble  $A$  de matrices pondérées. Ainsi, pour toute matrice pondérée de  $A$ , il faut qu'il existe une matrice pondérée de  $B$  qui lui soit inférieure (à  $s$  près). Symétriser cette relation nous donne alors une relation d'équivalence dépendant du paramètre  $s$ . Finalement, comme  $s$  peut-être choisi arbitrairement grand, deux ensembles sont équivalents s'il existe un tel paramètre.

**Définition 7.1.2** (approximation des ensembles de matrices pondérées).

Étant donnés  $A$  et  $B$  deux ensembles de matrices pondérées, on note  $A \preceq_s B$  si pour toute matrice pondérée  $(N, k) \in B$ , il existe une matrice pondérée  $(M, \ell) \in A$  telle que  $(M, \ell) \preceq_s (N, k)$ .

On dit que  $A$  et  $B$  sont  **$s$ -équivalents** et on note  $A \approx_s B$  si  $A \preceq_s B$  et  $B \preceq_s A$ .

Enfin, on dit que  $A$  et  $B$  sont **équivalents** et on note  $A \approx B$  s'il existe  $s \geq 1$  tel que  $A \approx_s B$ .

**Remarque 7.1.1.** Si  $A \preceq_s B$  alors  $A \preceq_{s'} B$  pour tout  $s' \geq s$ .

Il s'agit maintenant de montrer que l'approximation ainsi définie vérifie les propriétés énoncées dans la section 5.2, et qui sont utilisées dans la preuve, à savoir : (1) il s'agit d'une bonne approximation, et (2) si deux ensembles sont équivalents pour cette approximation alors ils ont le même comportement asymptotique.

(1) Le premier point se déduit facilement de la définition.

**Proposition 7.1.1.**

L'approximation  $\approx$  est une bonne approximation. (cas existentiel défini p.69)

*Démonstration.*

■ Si  $(M, \ell) \preceq_s (M', \ell') \preceq_{s'} (M'', \ell'')$  alors  $\ell'' \leq s'\ell' \leq s's\ell$ ,  $\varphi(M) = \varphi(M') = \varphi(M'')$  et  $M \leq sM' \leq ss'M''$ . Donc  $(M, \ell) \preceq_{ss'} (M'', \ell'')$ .

On étend ce résultat aux ensembles de matrices : supposons que  $A \preceq_s A' \preceq_{s'} A''$  alors, si  $(M'', \ell'') \in A''$ , il existe  $(M', \ell') \in A'$  telle que  $(M', \ell') \preceq_{s'} (M'', \ell'')$ . Il existe de même  $(M, \ell) \in A$  telle que  $(M, \ell) \preceq_s (M', \ell')$ . On a donc  $(M, \ell) \preceq_{ss'} (M'', \ell'')$  et  $A \preceq_{ss'} A''$ .

Finalement, si  $A \preceq A'$  et  $A' \preceq A''$  alors  $A \preceq A''$ .

■ Supposons que  $A \preceq_s A'$  et  $B \preceq_{s'} B'$  alors si  $(M', \ell') \in A' \cup B'$ , on a  $(M', \ell') \in A'$  ou  $(M', \ell') \in B'$ , donc il existe  $(M, \ell) \in A$  ou  $(M, \ell) \in B$  telle que  $(M, \ell) \preceq_{\max(s, s')} (M', \ell')$  et donc  $A \cup B \preceq_{\max(s, s')} A' \cup B'$ .

Finalement, si  $A \preceq A'$  et  $B \preceq B'$  alors  $A \cup B \preceq A' \cup B'$ .

■ Si  $(M, \ell) \preceq_s (M', \ell')$  et  $(N, k) \preceq_{s'} (N', k')$ , alors on a  $\ell' + k' \leq \max(s, s')(\ell + k)$ ,  $\varphi(M \otimes N) = \varphi(M' \otimes N')$  et  $M \otimes N \leq sM' \otimes s'N' \leq \max(s, s')(M' \otimes N')$ . Donc  $(M, \ell) \otimes (N, k) \preceq_{\max(s, s')} (M', \ell') \otimes (N', k')$ .

On étend ce résultat aux ensembles de matrices : supposons que  $A \preceq_s A'$  et  $B \preceq_{s'} B'$  alors, si  $(M', \ell') \in A'$  et  $(N', k') \in B'$ , il existe  $(M, \ell) \in A$  telle que  $(M, \ell) \preceq_s (M', \ell')$  et  $(N, k) \in B$  telle que  $(N, k) \preceq_{s'} (N', k')$ , d'où  $(M, \ell) \otimes (N, k) \preceq_{\max(s, s')} (M', \ell') \otimes (N', k')$  et  $A \otimes B \preceq_{\max(s, s')} A' \otimes B'$ .

Finalement, si  $A \preceq A'$  et  $B \preceq B'$  alors  $A \otimes B \preceq A' \otimes B'$ . □

(2) Le deuxième point consiste à montrer que si deux ensembles sont équivalents alors ils ont le même comportement asymptotique c'est-à-dire que le rationnel  $\alpha$  défini dans le théorème est le même pour les deux ensembles.

Plus précisément, étant donnés deux ensembles de matrices pondérées  $A$  et  $B$  tels que  $A \approx B$  et  $\alpha \in [0, 1]$  rationnel, on doit vérifier les équivalences suivantes :

- Il existe une infinité de matrices pondérées  $(M, \ell) \in A$  telles que  $I \otimes M \otimes F = -\infty$  si et seulement si il existe une infinité de matrices pondérées  $(N, k) \in B$  telles que  $I \otimes N \otimes F = -\infty$ .
- Il existe une suite de matrices pondérées  $(M_i, \ell_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A$ , avec les  $\ell_i$  distincts deux à deux, et une constante  $c$ , telles que  $I \otimes M_i \otimes F \leq c\ell_i^\alpha$  si et seulement si il existe une suite de matrices pondérées  $(N_i, k_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B$ , avec les  $k_i$  distincts deux à deux, et une constante  $d$  telles que  $I \otimes N_i \otimes F \leq dk_i^\alpha$ .
- Il existe une constante  $c$  et un entier  $\ell$  tels que pour toute suite de matrices pondérées  $(M_i, \ell_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A$ , si  $\ell_i \geq \ell$  alors  $\ell_i^\alpha \leq c(I \otimes M_i \otimes F)$  si et seulement

si il existe une constante  $d$  et un entier  $k$  tels que pour toute suite de matrices pondérées  $(N_i, k_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B$ , si  $k_i \geq k$  alors  $k_i^\alpha \leq d(I \otimes N_i \otimes F)$ .

*Démonstration.* Il existe  $s$  tel que  $A \approx_s B$ .

■ Supposons qu'il existe une infinité de matrices pondérées  $(M_i, \ell_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A$  telles que  $I \otimes M_i \otimes F = -\infty$ . Par définition de l'approximation, il existe  $(N_i, k_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B$  telles que  $(N_i, k_i) \preceq_s (M_i, \ell_i)$ . Donc pour tout  $i$ ,  $N_i \leq sM_i$ , d'où  $I \otimes N_i \otimes F \leq s(I \otimes M_i \otimes F)$ . On en déduit que  $I \otimes N_i \otimes F = -\infty$  pour tout  $i$ .

■ Supposons qu'il existe une suite de matrices pondérées  $(M_i, \ell_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A$ , avec les  $\ell_i$  distincts deux à deux, et une constante  $c$ , telles que  $I \otimes M_i \otimes F \leq c\ell_i^\alpha$ . Par définition de l'approximation, il existe  $(N_i, k_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B$  telles que  $(N_i, k_i) \preceq_s (M_i, \ell_i)$  et donc pour tout  $i$ ,  $N_i \leq sM_i$  et  $\ell_i \leq sk_i$ . D'où  $I \otimes N_i \otimes F \leq s(I \otimes M_i \otimes F) \leq scl_i^\alpha \leq s^2ck_i^\alpha$ . Il suffit donc de poser  $d = s^2c$ . De plus, comme les  $\ell_i$  sont distincts deux à deux et que pour tout  $i$ ,  $\ell_i \leq sk_i$ , on peut extraire une suite où les  $k_i$  sont distincts deux à deux.

■ Supposons qu'il existe une constante  $c$  et un entier  $\ell$  tels que pour toute suite de matrices pondérées  $(M_i, \ell_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A$ , si  $\ell_i \geq \ell$  alors  $\ell_i^\alpha \leq c(I \otimes M_i \otimes F)$ . Posons  $k = s\ell$  et  $d = s^2c$ . Soit une suite de matrices pondérées  $(N_i, k_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B$ . Par définition de l'approximation, il existe une suite de matrices pondérées  $(M_i, \ell_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A$  telles que pour tout  $i$ ,  $(M_i, \ell_i) \preceq_s (N_i, k_i)$ . Soit  $i$  tel que  $k_i \geq k$  (et donc  $\ell_i \geq (1/s)k_i \geq \ell$ ) alors  $k_i^\alpha \leq s\ell_i^\alpha \leq sc(I \otimes M_i \otimes F) \leq d(I \otimes N_i \otimes F)$ . □

L'approximation, ainsi définie, vérifie les propriétés utilisées dans la preuve donnée au chapitre 5. Il reste donc à décrire la notion d'ensembles présentables et à démontrer les propriétés 5.4.3 et 5.4.4.

## 7.2 Ensembles présentables

Nous allons voir maintenant la notion d'ensembles présentables. Comme l'objectif est de calculer le comportement asymptotique de l'automate, les ensembles que nous allons considérer vont représenter des suites de mots et garder en mémoire les comportements asymptotiques de l'automate sur ces suites de mots, et plus précisément une fonction  $\Theta$ -équivalente à ces comportements. Nous allons en fait voir qu'il suffit de considérer des fonctions de la forme  $n \mapsto n^\alpha$  pour  $\alpha \in [0, 1]$  rationnel. Ce sont donc ces fonctions qui vont être représentées dans les matrices.

Tout d'abord, elles seront représentées par leur exposant  $\alpha$ . Dans un premier temps, il s'agit donc d'introduire les notions d'exposants et de matrices d'exposants. Deux valeurs sont alors particulières,  $-\infty$  qui sera représenté par l'exposant  $\perp$  et  $0$  qui sera représenté par l'exposant  $-\infty$ .

L'ensemble des exposants est défini par  $Exps = \{\perp, -\infty\} \cup ([0, 1] \cap \mathbb{Q})$ , et possède deux lois  $\max$  et  $\odot$ . La loi  $\max$  est donnée par la relation d'ordre  $\perp < -\infty < a$  pour tout  $a \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  et  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  est ordonné de manière usuelle. La loi  $\odot$  est définie par  $\perp \odot a = a \odot \perp = \perp$  pour tout  $a$ ,  $a \odot b = \max(a, b)$  pour tout  $a, b \neq \perp$ .



**Proposition 7.2.1.**

$(Exps, \max, \odot)$  est un semi-anneau.

L'idée ici est de transposer les calculs du semi-anneau  $\mathbb{N}_{\max}$  dans le semi-anneau  $(Exps, \max, \odot)$ . En effet, si on pose  $n^\perp = -\infty$  et  $n^{-\infty} = 0$ , alors pour  $\alpha, \beta$  dans  $Exps$ ,  $n^\alpha + n^\beta$  est  $\Theta$ -équivalent à  $n^{\alpha \odot \beta}$  et  $\max(n^\alpha, n^\beta)$  est  $\Theta$ -équivalent à  $n^{\max(\alpha, \beta)}$ . Plus précisément :

**Proposition 7.2.2.**

Pour tout  $\alpha, \beta \in Exps$ , pour tout  $n$ , on a :

$$n^{\alpha \odot \beta} \leq n^\alpha + n^\beta \leq 2n^{\alpha \odot \beta} \text{ et } \max(n^\alpha, n^\beta) = n^{\max(\alpha, \beta)}$$

La preuve de cette proposition est directe en utilisant les définitions. On introduit maintenant la notion de matrices d'exposants.

**Définition 7.2.1** (matrices d'exposants).

Une **matrice d'exposants** est une matrice carrée de taille  $K$  à coefficients dans l'ensemble  $Exps$ . On note  $\otimes$  la loi de monoïde définie sur ces matrices à partir du semi-anneau  $(Exps, \max, \odot)$ .

Les matrices d'exposants ont pour but d'être l'image de matrices pondérées dans les exposants et les lois sont définies pour être compatibles.

**Coefficients  $-\infty$ , nuls ou non nuls.** Dans ce qui précède, nous nous sommes intéressés à l'existence de chemins dans l'automate ou plus précisément en termes de matrices, au fait qu'un coefficient soit  $-\infty$  ou non. Ici on raffine encore cette idée, en différenciant les coefficients  $-\infty$ ,  $0$  et ceux supérieurs à  $1$ . En termes d'automates, cela revient à différencier les chemins de poids nuls de ceux de poids strictement positifs. Pour une matrice d'exposants  $X$ , on définit la **projection** de  $X$ ,  $\psi(X)$  par :

$$\psi(X)_{i,j} = \begin{cases} \perp & \text{si } X_{i,j} = \perp \\ -\infty & \text{si } X_{i,j} = -\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une **petite matrice d'exposants** est une matrice d'exposants à valeurs uniquement dans  $\{\perp, -\infty, 0\}$ .

**Polytopes de matrices d'exposants.** Nous allons maintenant pouvoir définir les ensembles présentables à l'aide des matrices d'exposants. Introduisons tout d'abord la notion de polytope. Un polytope dans  $\mathbb{R}^n$  est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. Nous allons utiliser cette notion pour définir un polytope de matrices d'exposants. La seule différence est que l'on fixe les coefficients qui ont valeurs  $\perp$  et  $-\infty$ . Un **polytope de matrices d'exposants** est un ensemble de matrices ayant même image par  $\psi$  et dont les coefficients différents de  $\perp$  et de  $-\infty$  forment un polytope au sens usuel de  $\mathbb{R}$ .

Introduisons quelques notations utilisées pour donner la définition formelle. Pour  $X$  une matrice d'exposants et  $\lambda$  un réel,  $\lambda X$  est la matrice où tous les coefficients ont été multipliés par  $\lambda$ , avec  $\lambda \perp = \perp$  et  $\lambda(-\infty) = -\infty$ . Pour deux matrices d'exposants  $X, Y$ , telles que  $\psi(X) = \psi(Y)$ ,  $X + Y$  est la matrice somme coefficient par coefficient, avec  $\perp + \perp = \perp$ ,  $-\infty + (-\infty) = -\infty$  et la somme usuelle de  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  (a priori, le résultat n'est plus forcément dans  $[0, 1]$ , mais dans toute la suite cette somme est utilisée de telle sorte que  $X + Y$  reste une matrice d'exposants).

**Définition 7.2.2** (polytope de matrices d'exposants).

Un **polytope de matrices d'exposants** est un ensemble de la forme :

$$\{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_\ell X_\ell \mid \lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in [0, 1] \text{ et } \lambda_1 + \dots + \lambda_\ell = 1\}$$

où  $X_1, \dots, X_\ell$  sont des matrices d'exposants telles que  $\psi(X_1) = \dots = \psi(X_\ell)$ .

Ces polytopes ont des propriétés telles que la stabilité par barycentre et par projection, qui découlent directement de leur définition, et données dans les deux propositions ci-dessous.

**Proposition 7.2.3.**

Soit  $\Lambda$  et  $\Delta$  deux polytopes de matrices d'exposants dont les matrices ont la même projection. Alors l'ensemble des barycentres de ces polytopes, à savoir

$$\{\lambda X + (1 - \lambda)Y \mid \lambda \in [0, 1], X \in \Lambda, Y \in \Delta\}$$

est un polytope.

**Proposition 7.2.4.**

Soit  $\Lambda$  un polytope de matrices d'exposants, et  $X$  une petite matrice d'exposants. Alors l'ensemble  $\{X\} \circledast \Lambda$  est une union finie de polytopes.

Les ensembles présentables vont être définis à l'aide de la notion de polytopes de matrices d'exposants, et ces deux propositions permettront de montrer que les ensembles que l'on construit restent présentables.

**Exponentiation de matrices.** On voit ici comment passer d'une matrice d'exposants à une matrice pondérée.

Soit  $n$  un entier, pour une matrice d'exposants  $X$ , on note  $X[n]$  la matrice à coefficients dans  $\mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\}$  définie par :

$$X[n]_{i,j} = n^{X_{i,j}}$$

où  $n^\perp = -\infty$  et  $n^{-\infty} = 0$ .

On relie les opérations sur les matrices d'exposants et sur les matrices pondérées de la manière suivante :

**Proposition 7.2.5.**

Pour tout  $n$ ,  $\{(X \circledast Y)[n], n\} \approx_2 \{(X[n] \otimes Y[n], n)\}$ .

*Démonstration.* Montrons que  $(X \circledast Y)[n] \leq X[n] \otimes Y[n] \leq 2(X \circledast Y)[n]$ . On a :

$$(X \circledast Y)[n]_{i,j} = n^{(X \circledast Y)_{i,j}} \text{ et } (X \circledast Y)_{i,j} = \max_{1 \leq r \leq K} (X_{i,r} \odot Y_{r,j}).$$

Donc par la propriété 7.2.2,

$$n^{(X \circledast Y)_{i,j}} \leq \max_{1 \leq r \leq K} (n^{X_{i,r}} + n^{Y_{r,j}}) \leq 2n^{(X \circledast Y)_{i,j}}.$$

On a donc  $((X \circledast Y)[n], n) \preceq_1 (X[n] \otimes Y[n], n) \preceq_2 ((X \circledast Y)[n], n)$ , ce qui prouve le résultat.  $\square$

On en déduit directement la proposition suivante :

**Proposition 7.2.6.**

$\{(X \circledast Y)[n], n \mid n \geq 1\} \approx \{(X[n] \otimes Y[n], n) \mid n \geq 1\}$ .

**Remarque 7.2.1.** Pour tout  $n$  et toute matrice d'exposants,  $\psi(X)[n] = X[1]$ .

Étant donnée un entier  $n$  et une matrice  $M = X[n]$ , par abus de notation, on notera  $\psi(M) = \psi(X)[n] = X[1]$ . La matrice  $\psi(M)$  est la matrice  $M$  dans laquelle on a remplacé tous les coefficients strictement positifs par 1.

**Ensembles présentables.** Nous allons maintenant voir la définition d'ensembles présentables. Ils sont l'union finie de singletons, représentant le comportement sur des mots de longueur bornée, et d'ensembles correspondant à des polytopes de matrices d'exposants, représentant le comportement asymptotique sur des suites de mots.

**Définition 7.2.3.**

Un **ensemble présentable** de matrices pondérées est un ensemble de la forme :

$$\bigcup_{X \in S} \{(X[1], 1)\} \cup \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{P}} \{(X[n], n) \mid n \geq 1, X \in \Lambda\}$$

où  $S$  est un ensemble (nécessairement fini) de petites matrices d'exposants et  $\mathcal{P}$  un ensemble fini de polytopes de matrices d'exposants.

Les propriétés de clôture des polytopes donnent des propriétés de clôture pour les ensembles présentables.

**Proposition 7.2.7.**

Soit  $X$  une petite matrice d'exposants et  $A$  un ensemble présentable de matrices pondérées, alors  $\{(X[1], 1)\} \otimes A$  et  $A \otimes \{(X[1], 1)\}$  sont équivalents à des ensembles présentables.

*Démonstration.* Démontrons que  $\{(X[1], 1)\} \otimes A$  est équivalent à un ensemble présentable. L'autre cas est symétrique. Comme les ensembles présentables sont clos par union finie, il suffit de le démontrer pour  $A = \{(Y[1], 1)\}$  avec  $Y$  une petite matrice d'exposants et pour  $A = \{(Y[n], n) \mid n \geq 1, Y \in \Lambda\}$  avec  $\Lambda$  un polytope de matrices d'exposants.

Dans le premier cas,

$$\begin{aligned} \{(X[1], 1)\} \otimes A &= \{(X[1], 1)\} \otimes \{(Y[1], 1)\} \\ &= \{(X[1] \otimes Y[1], 2)\} \\ &\approx_2 \{(X[1] \otimes Y[1], 1)\} && \text{(par définition de l'approximation)} \\ &\approx \{(X \otimes Y)[1], 1\} && \text{(par la proposition 7.2.5)} \end{aligned}$$

Dans le deuxième cas,

$$\begin{aligned}
\{(X[1], 1)\} \otimes A &= \{(X[1], 1)\} \otimes \{(Y[n], n) \mid n \geq 1, Y \in \Lambda\} \\
&= \{(X[1] \otimes Y[n], n+1) \mid n \geq 1, Y \in \Lambda\} \\
&= \{(\psi(X)[n] \otimes Y[n], n+1) \mid n \geq 1, Y \in \Lambda\} \quad (\text{par la remarque 7.2.1}) \\
&\approx \{(\psi(X)[n] \otimes Y[n], n) \mid n \geq 1, Y \in \Lambda\} \\
&\approx \{((\psi(X) \otimes Y)[n], n) \mid n \geq 1, Y \in \Lambda\} \quad (\text{par la proposition 7.2.6}) \\
&\approx \{(Z[n], n) \mid n \geq 1, Z \in \Lambda'\}
\end{aligned}$$

où  $\Lambda' = \{\psi(X)\} \otimes \Lambda$  est présentable par la proposition 7.2.4.  $\square$

Tout comme pour l'approximation, il s'agit maintenant de vérifier que les ensembles présentables vérifient les propriétés données au chapitre 5 et utilisées dans la preuve. Plus précisément, il s'agit de montrer (1) que l'union de deux ensembles présentables est un ensemble présentable, (2) que si  $E$  est une matrice de chemins idempotente alors la restriction d'un ensemble présentable à  $\varphi^{-1}(\{E\})$  est présentable et (3) que l'on peut décider si  $g$  (donnée dans le théorème) est identiquement égale à  $-\infty$  et dans le cas contraire, calculer  $\alpha$ .

**(1) et (2)** Le premier et le deuxième points proviennent directement de la définition des ensembles présentables.

**(3)** Le troisième point découle de l'utilisation des ensembles polytopes de  $\mathbb{R}^n$  pour lesquels on peut calculer l'infimum sur les composantes. Ainsi, si on a un ensemble présentable de la forme

$$\bigcup_{X \in S} \{(X[1], 1)\} \cup \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{P}} \{(X[n], n) \mid n \geq 1, X \in \Lambda\}$$

on peut calculer l'infimum des valeurs  $I \otimes X \otimes F$  pour  $X \in \Lambda$  et  $\Lambda \in \mathcal{P}$ . Ainsi, s'il vaut  $\perp$  alors la fonction  $g$  du théorème est identiquement égale à  $-\infty$ . S'il vaut  $-\infty$ , il y a une suite de mots de poids 0, et si c'est un rationnel de  $[0, 1]$  alors ce rationnel correspond à la valeur  $\alpha$  du théorème.

Il ne reste donc plus qu'à démontrer les propriétés 5.4.3 et 5.4.4.

## 7.3 Produit simple

Nous allons voir ici la preuve de la propriété du produit simple 5.4.3 : étant donnés deux ensembles présentables  $A$  et  $B$ , il existe un ensemble présentable  $C$  tel que  $C \approx A \otimes B$ .

Un ensemble présentable est une union finie d'ensembles de la forme  $\{(X[1], 1)\}$  où  $X$  est une petite matrice d'exposants et  $\{(X[n], n) \mid n \geq 1, X \in \Lambda\}$  où  $\Lambda$  est un polytope de matrices d'exposants.

Comme les ensembles présentables sont clos par union finie, il suffit de démontrer qu'il existe des ensembles présentables équivalents à :

- $\{(X[1], 1)\} \otimes \{(Y[1], 1)\}$
- $\{(X[1], 1)\} \otimes \{(Y[n], n) \mid n \geq 1, Y \in \Lambda\}$
- $\{(X[n], n) \mid n \geq 1, X \in \Lambda\} \otimes \{(Y[1], 1)\}$
- $\{(X[n], n) \mid n \geq 1, X \in \Lambda\} \otimes \{(Y[n], n) \mid n \geq 1, Y \in \Delta\}$

Traisons les différents cas :

- Les premier, deuxième et troisième cas découlent directement de la propriété 7.2.7.
- Pour le dernier cas, montrons que

$$A = \{(X[n], n) \mid n \geq 1, X \in \Lambda\} \otimes \{(Y[n], n) \mid n \geq 1, Y \in \Delta\}$$

est équivalent à

$$B = \{(X[n], n) \mid n \geq 1, X \in \Lambda\} \otimes \{(\psi(Y)[1], 1)\} \\ \cup \{(\psi(X)[1], 1)\} \otimes \{(Y[n], n) \mid n \geq 1, Y \in \Delta\}$$

qui est présentable par la propriété 7.2.7 et la clôture par union finie.

*Démonstration.* Tout d'abord, pour tout  $n$ ,

$$(X[n], n) \otimes (\psi(Y)[1], 1) = (X[n], n) \otimes (Y[1], 1).$$

On en déduit que  $B \subseteq A$ .

Inversement, soient  $X \in \Lambda$ ,  $Y \in \Delta$ ,  $n \geq 1$  et  $m \geq 1$ . Supposons que  $n \geq m$ , et montrons que :

$$(X[n], n) \otimes (\psi(Y)[1], 1) \preceq_2 (X[n], n) \otimes (Y[m], m)$$

D'une part,

$$\varphi(X[n] \otimes \psi(Y)[1]) = \varphi(X[n] \otimes Y[m])$$

d'autre part,

$$X[n] \otimes \psi(Y)[1] = X[n] \otimes \psi(Y)[m] \leq X[n] \otimes Y[m]$$

enfin,

$$n + m \leq 2(n + 1).$$

On procède symétriquement si  $m \geq n$ . □

Nous venons de traiter la cas du produit simple, traitons maintenant le cas du produit idempotent.

## 7.4 Produit idempotent

Nous allons voir ici la preuve de la propriété du produit idempotent : étant donné un ensemble présentable  $A$  dont toutes les matrices pondérées ont la même image idempotente par  $\varphi$ , il existe un ensemble présentable  $B$  tel que  $\langle A \rangle \approx B$ .

La preuve se fait par trois réductions successives du problème.

Tout d'abord, il s'agit de démontrer qu'on peut se ramener au cas où  $A$  est un ensemble de matrices uniformes. La définition et les propriétés de ces matrices particulières ont été données dans la section 5.5. Cette simplification du problème est donnée dans la section 7.4.1.

Ensuite, il s'agit de montrer qu'on peut se ramener du cas des longs produits de matrices uniformes au cas de l'itération d'une seule matrice. Cette réduction est traitée dans la section 7.4.2.

Enfin, la section 7.4.3 traite le cas de l'itération d'une unique matrice.

### 7.4.1 Réduire le problème au cas des matrices uniformes

On prouve ici que l'on peut se ramener à l'étude des produits de matrices uniformes.

#### Définition 7.4.1 (uniformisation).

Étant donnée une matrice  $M$  d'image idempotente  $\varphi(M) = E$ , on définit l'**uniformisation** de  $M$  notée  $unif(M)$  par :

$$unif(M) = E \otimes M \otimes E.$$

**Remarque 7.4.1.**  $unif(M)$  est une matrice uniforme.

On étend cette notation aux matrices pondérées et aux ensembles de matrices pondérées par  $unif((M, m)) = (unif(M), m)$  et  $unif(A) = \{unif((M, m)) \mid (M, m) \in A\}$ .

#### Proposition 7.4.1.

Si un ensemble  $A$  de matrices pondérées est présentable alors  $unif(A)$  est approximable par un ensemble présentable.

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned} unif(A) &= \{(E \otimes M \otimes E, m) \mid (M, m) \in A\} \\ &\approx \{(E \otimes M \otimes E, m+2) \mid (M, m) \in A\} = \{(E, 1)\} \otimes A \otimes \{(E, 1)\}, \end{aligned}$$

qui est présentable par la propriété 7.2.7.  $\square$

**Remarque 7.4.2.**  $\text{unif}(A)$  est un ensemble de matrices uniformes.

On donne maintenant la propriété principale qui permet de se ramener à des matrices uniformes. (On rappelle que  $K$  correspond au nombre d'états ou encore à la taille des matrices.)

**Proposition 7.4.2.**

Étant donné un ensemble présentable  $A$  tel que  $\varphi(A) = E$  avec  $E$  idempotente, on a :

$$\begin{aligned} \langle A \rangle \approx_{3K} \bigcup_{i=1}^6 A^i \\ \cup A \otimes \langle \text{unif}(A) \rangle \otimes A \\ \cup A \otimes \langle \text{unif}(A) \rangle \otimes A^2 \\ \cup A^2 \otimes \langle \text{unif}(A) \rangle \otimes A \\ \cup A^2 \otimes \langle \text{unif}(A) \rangle \otimes A^2. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Notons  $B$  le deuxième ensemble de la proposition.

*Première direction :* Tout d'abord, montrons que  $B \preceq_3 \langle A \rangle$ . Soit un produit  $(M, \ell) = (M_1, \ell_1) \cdots (M_q, \ell_q)$  tel que pour tout  $i$ ,  $(M_i, \ell_i) \in A$ . Si  $q \in \{1, \dots, 6\}$  alors  $(M, \ell)$  appartient à  $\bigcup_{i=1}^6 A^i$ . On suppose donc à partir de maintenant que  $q \geq 7$ . L'idée est la suivante : on va remplacer certaines matrices dans le produit par  $E$  afin de construire des uniformisations de matrices de  $A$ . Le produit des matrices sera alors forcément plus petit. Il faut uniquement faire en sorte de garder une proportion non négligeable de matrices en termes de longueurs. C'est ce que nous donne le lemme suivant.

Ce lemme est indépendant des matrices et traite n'importe quelle suite d'entiers. On l'appliquera alors à la suite des longueurs des matrices dans le produit.

**Lemme 7.4.1.** *Soit  $q$  un entier positif. On dit que deux indices  $s$  et  $s'$  dans  $\{1, \dots, q\}$  sont **voisins** si  $s = s' + 1$  ou  $s' = s + 1$ . Étant donnée une suite d'entiers  $\ell_1, \dots, \ell_q$  de somme  $\ell$ , il existe un sous-ensemble  $I \subseteq \{1, \dots, q\}$  qui ne contient pas deux indices voisins tel que  $3 \sum_{i \in I} \ell_i \geq \ell$ .*

*Démonstration.* L'idée de la preuve est très simple : on prend l'entier le plus grand, on élimine ses deux voisins et on recommence. Plus formellement, on construit  $I$  inductivement :  $I_0 = \emptyset$ , et à l'étape  $n + 1$ , on prend un indice  $i$  dans  $\{1, \dots, q\}$  qui n'est pas dans  $I_n$ , qui n'est pas voisin d'un élément de  $I_n$  et tel que  $\ell_i$  est maximal parmi tous les entiers  $\ell_j$  d'indice  $j$  défini ainsi. On construit  $I_{n+1} = I_n \cup \{i\}$ .  $I$  est l'ensemble obtenu quand le processus s'arrête. Par construction  $I$  ne contient pas deux indices voisins. Si  $i \in I$ , notons  $h(i) = i$ . Si  $i \notin I$  alors il existe  $j$  voisin de  $i$  tel que  $\ell_j \geq \ell_i$ , notons



$h(i) = j$ . Puisqu'un indice a au plus deux voisins, au plus trois indices ont la même valeur par  $h$ . On a donc :

$$\ell = \sum_{i=1}^q \ell_i \leq \sum_{i=1}^q \ell_{h(i)} \leq 3 \sum_{i \in I} \ell_i.$$

□

On peut maintenant appliquer ce lemme à la suite des longueurs des matrices du produit. On obtient un ensemble  $I = \{i_1 < \dots < i_r\}$ . Comme  $q \geq 7$  alors  $I - \{i_1, i_r\}$  est non vide. Dans le produit  $(M_1, \ell_1) \cdots (M_q, \ell_q)$ , on remplace alors toutes les matrices  $M_i$  telles que  $i \notin I$  par  $E$ , sauf  $M_1$  et  $M_q$ . Différents cas se présentent alors en fonction de l'appartenance de 1 et  $q$  à  $I$ .

Si  $1, q \in I$ , on obtient  $(M_1 \otimes (\otimes_{i \in I - \{1, q\}} (E \otimes M_i \otimes E)) \otimes M_q, \sum_{i \in I} \ell_i)$  qui est dans  $A \otimes \langle \text{unif}(A) \rangle \otimes A$ .

Si  $1 \in I$  et  $q \notin I$ , on obtient  $(M_1 \otimes (\otimes_{i \in I - \{1, i_r\}} (E \otimes M_i \otimes E)) \otimes M_{i_r} \otimes M_q, \sum_{i \in I} \ell_i + \ell_q)$  qui est dans  $A \otimes \langle \text{unif}(A) \rangle \otimes A^2$ .

Si  $q \in I$  et  $1 \notin I$ , on obtient  $(M_1 \otimes M_{i_1} \otimes (\otimes_{i \in I - \{i_1, q\}} (E \otimes M_i \otimes E)) \otimes M_q, \ell_1 + \sum_{i \in I} \ell_i)$  qui est dans  $A^2 \otimes \langle \text{unif}(A) \rangle \otimes A$ .

Si  $1, q \notin I$ , on a  $(M_1 \otimes M_{i_1} \otimes (\otimes_{i \in I - \{i_1, i_r\}} (E \otimes M_i \otimes E)) \otimes M_{i_r} \otimes M_q, \ell_1 + \sum_{i \in I} \ell_i + \ell_q)$  qui est dans  $A^2 \otimes \langle \text{unif}(A) \rangle \otimes A^2$ .

De plus, chacun de ces produits de matrices est inférieur à  $M$  puisque pour tout  $j$ ,  $E \otimes E = E \leq M_j$ , l'image par  $\varphi$  de ces produits est  $E = \varphi(M)$ , et enfin  $\ell \leq 3 \sum_{i \in I} \ell_i$  d'après le lemme précédent.

*Deuxième direction* : Montrons maintenant que  $\langle A \rangle \preceq_{3K} B$ . Tout d'abord,  $\cup_{i=1}^6 A^i$  est incluse dans  $\langle A \rangle$ . Il reste à montrer que  $\langle A \rangle \preceq_{3K} A \otimes \langle \text{unif}(A) \rangle \otimes A$ , ce qui suffit à conclure la preuve.

Soit donc un produit de  $A \otimes \langle \text{unif}(A) \rangle \otimes A$ ,

$$(M, \ell) = (M_1, \ell_1) \otimes \left( \bigotimes_{s=2}^{q-1} (E \otimes M_s \otimes E, \ell_s) \right) \otimes (M_q, \ell_q)$$

avec  $(M_i, \ell_i) \in A$ .

Par présentabilité de  $A$ , pour tout  $s$ ,  $(\psi(M_s), 1) \in A$ . Considérons alors le produit

$$(M', \ell') = (M_1, \ell_1) \otimes \left( \bigotimes_{s=2}^{q-1} ((\psi(M_s), 1) \otimes (M_s, \ell_s) \otimes (\psi(M_s), 1)) \right) \otimes (M_q, \ell_q)$$

qui est donc dans  $\langle A \rangle$ .

On va montrer que :

$$(M', \ell') \preceq_{3K} (M, \ell)$$

Tout d'abord  $\varphi(M') = E = \varphi(M)$  et  $\ell' = \ell + 2(q-2) \leq 3\ell$ . Enfin montrons que  $M' \leq 3KM$ .

Soit  $i$  et  $j$  deux états.

- Si  $M_{i,j} = -\infty$  alors  $E_{i,j} = -\infty$  et  $M'_{i,j} = -\infty$ .
- Si  $M_{i,j} = 0$ , alors pour tout  $t, v$  tels que  $E_{i,t} = E_{v,j} = 0$ , on a pour tout  $s$ ,  $(M_s)_{t,v} = 0$  ou  $-\infty$ . En effet,  $M_{i,j} \geq E_{i,t} + (M_s)_{t,v} + E_{v,j}$ , par définition de  $M$  (il suffit de remplacer toutes les matrices autres que  $M_s$  par  $E$ ). Donc, pour tout  $t, v$  tels que  $E_{i,t} = E_{v,j} = 0$ ,  $\psi(M_s)_{t,v} = 0$ . Par un raisonnement similaire, on montre aussi que pour tout  $t$  tel que  $E_{i,t} = E_{t,j} = 0$ , on a  $(M_1)_{i,t} = (M_q)_{t,j} = 0$ . On en déduit que  $M'_{i,j} = 0$ .
- Sinon  $M_{i,j} \geq 1$ . Notons  $M_{i,j} = (M_1)_{i,j_1} + \sum_{s=2}^{q-1} (E \otimes M_s \otimes E)_{i_s, j_s} + (M_q)_{i_q, j_q}$ . Pour tout  $s$ ,  $(\psi(M_s) \otimes M_s \otimes \psi(M_s))_{i_s, j_s} \leq (E \otimes M_s \otimes E)_{i_s, j_s} + 2$ . Notons  $\Omega$  l'ensemble des indices  $s$  tels que  $(E \otimes M_s \otimes E)_{i_s, j_s} = 0$  et  $(\psi(M_s) \otimes M_s \otimes \psi(M_s))_{i_s, j_s} \neq 0$ .
  - Si  $s \notin \Omega$  alors,  $(\psi(M_s) \otimes M_s \otimes \psi(M_s))_{i_s, j_s} \leq 3(E \otimes M_s \otimes E)_{i_s, j_s}$ .
  - Si  $s \in \Omega$ , montrons que  $(i_s, j_s)$  est transient. Comme  $(E \otimes M_s \otimes E)_{i_s, j_s} = 0$  alors pour tout  $t, v$  tels que  $E_{i_s, v} = E_{t, v} = E_{t, j_s} = 0$ , on a  $(M_s)_{t, v} = 0$ . Donc, comme  $(\psi(M_s) \otimes M_s \otimes \psi(M_s))_{i_s, j_s} \neq 0$  alors il existe  $t$  tel que  $E_{i_s, t} = E_{t, j_s} = 0$  et  $\psi(M_s)_{i_s, t} = 1$  ou  $\psi(M_s)_{t, j_s} = 1$ . Supposons par exemple que  $\psi(M_s)_{i_s, t} = 1$ . Comme on a :

$$0 = (E \otimes M_s \otimes E)_{i_s, j_s} \geq E_{i_s, i_s} + (M_s)_{i_s, t} + E_{t, j_s} \geq E_{i_s, i_s} + 1$$

on en déduit que  $E_{i_s, i_s} = -\infty$ . Finalement comme  $E_{i_s, j_s} = 0$ , il vient que  $E_{j_s, i_s} = -\infty$ , et  $(i_s, j_s)$  est transient. Par la proposition 5.5.8,  $\Omega$  a alors au plus  $K$  éléments. Finalement,  $M'_{i,j} \leq 3M_{i,j} + 2K$ , et comme  $M_{i,j} \geq 1$ , alors  $M'_{i,j} \leq 3KM_{i,j}$ . □

Comme on sait calculer des ensembles présentables équivalents à l'union et au produit d'ensembles présentables, alors la proposition précédente montre qu'il reste à savoir approximer la clôture d'un ensemble présentable de matrices uniformes.

## 7.4.2 Du produit de matrices uniformes au produit d'une seule matrice

On montre ici que l'on peut passer d'un produit de matrices uniformes au produit d'une unique matrice. L'idée est la suivante : si une matrice pondérée  $(M, \ell)$  est le produit de matrices uniformes alors il existe, parmi ces matrices uniformes, une matrice pondérée qui, itérée le bon nombre de fois, sera inférieure à  $(M, \ell)$ .

La preuve se fait en deux temps. Tout d'abord, il s'agit de calculer à approximation près, les coefficients du produit de matrices uniformes, et ensuite de montrer qu'une seule matrice itérée améliore ces coefficients.

La premier point est donnée par la proposition suivante. On réutilise ici des idées expliquées dans la section 5.5 où les matrices uniformes ont été introduites.

**Proposition 7.4.3.**

Soit  $M = M_1 \otimes \cdots \otimes M_\ell$  un produit de matrices uniformes qui ont toutes la même projection idempotente  $E$ . Pour tout indice  $i, j$  tel que  $E_{i,j} = 0$ , on note :

$$y_{i,j} = \max\{(M_1 \otimes M_k \otimes M_\ell)_{i,j} \mid 2 \leq k \leq \ell - 1\}$$

et

$$x_{i,j} = \max\left\{\sum_{k=2}^{\ell-1} (M_k)_{p,p} \mid E_{i,p} = E_{p,j} = 0\right\}.$$

On a alors :

$$M_{i,j} \leq (K + 1)(y_{i,j} + x_{i,j}) \leq 2(K + 1)M_{i,j}$$

*Démonstration. Deuxième inégalité :* Tout d'abord, soit  $2 \leq k \leq \ell - 1$ . En remplaçant toutes les matrices autres que  $M_k$ ,  $M_1$  et  $M_\ell$  par  $E$  dans le produit, on a :

$$M \geq M_1 \otimes E \otimes M_k \otimes E \otimes M_\ell = M_1 \otimes M_k \otimes M_\ell \text{ par uniformité.}$$

Donc,  $M_{i,j} \geq y_{i,j}$ . De plus, soit  $p$  tel que  $E_{i,p} = E_{p,j} = 0$ , on a :

$$M_{i,j} \geq (M_1)_{i,p} + \sum_{k=2}^{\ell-1} (M_k)_{p,p} + (M_\ell)_{p,j} \geq \sum_{k=2}^{\ell-1} (M_k)_{p,p}.$$

Donc,  $M_{i,j} \geq x_{i,j}$ . Et finalement,  $2M_{i,j} \geq y_{i,j} + x_{i,j}$ .

*Première inégalité :* Notons  $M_{i,j} = \sum_{s=1}^{\ell} (M_s)_{i_s, j_s}$ . Supposons qu'il existe  $s$ , tel que pour tout  $p$  tel que  $E_{i_s, p} = E_{p, j_s} = 0$ , on a  $(M_s)_{i_s, j_s} > (M_s)_{p,p}$ . Alors par la proposition 5.5.6,  $(i_s, j_s)$  est transient. Ainsi par la proposition 5.5.8, il existe au plus  $K$  indices  $s$  dans ce cas-là.

Soit finalement une portion de produit  $\sum_{s=h}^k (M_s)_{i_s, j_s}$  telle qu'aucun couple  $(i_s, j_s)$  ne soit transient. Alors, par la proposition 5.5.5,  $\sum_{s=h}^k (M_s)_{i_s, j_s} = \sum_{s=h}^k (M_s)_{p,p}$  pour  $p$  tel que  $E_{i_s, p} = E_{p, j_s} = 0$ . Il y a au plus  $K + 1$  telles portions.

On a donc  $M_{i,j} \leq Ky_{i,j} + (K + 1)x_{i,j}$ . □

La deuxième partie de la preuve consiste à montrer qu'on peut se ramener à l'itération d'une seule matrice. C'est ce qu'énonce la proposition suivante.

**Proposition 7.4.4.**

Il existe  $s \geq 1$  tel que pour tout produit  $(M, \ell) = (M_1, \ell_1) \otimes \cdots \otimes (M_q, \ell_q)$  avec  $q \geq 3$ , de matrices pondérées uniformes qui ont toutes la même projection idempotente  $E$ , il existe  $k \in \{2, \dots, q - 1\}$  et un entier positif  $m$  tel que :

$$(M_1, \ell_1) \otimes (M_k, \ell_k)^m \otimes (M_q, \ell_q) \preceq_s (M, \ell).$$

*Démonstration.* Soit  $(N, x) = (M_2, \ell_2) \otimes \cdots \otimes (M_{q-1}, \ell_{q-1})$ . Étant donné  $p$  tel que  $E_{p,p} = 0$ , et  $k \in \{2, \dots, q-1\}$ , on dit que  $k$  est  $p$ -**mauvais** si  $(M_k)_{p,p} > \frac{K\ell_k}{x} N_{p,p}$ . S'il existe  $p$  tel que  $k$  est  $p$ -mauvais, alors  $k$  est dit **mauvais**. Sinon  $k$  est dit **bon**.

On va montrer qu'il existe  $k$  bon, en sommant les longueurs des indices  $k$  mauvais. Pour tout  $p$  tel que  $E_{p,p} = 0$ , posons  $z_p = \sum_{k \text{ } p\text{-mauvais}} \ell_k$ . On a :

$$N_{p,p} \geq \sum_{k \text{ } p\text{-mauvais}} (M_k)_{p,p} > \sum_{k \text{ } p\text{-mauvais}} \frac{K\ell_k}{x} N_{p,p} \geq \frac{Kz_p}{x} N_{p,p} .$$

Donc, comme  $N_{p,p} \geq E_{p,p} = 0$ , on a  $Kz_p < x$ . On obtient alors  $\sum_p \text{ mauvais } \ell_k \leq \sum_p z_p < x$ . Il existe donc un indice  $k$  bon.

On va montrer que l'indice  $k$  avec l'entier  $m = \lceil \frac{x}{\ell_k} \rceil$  conviennent.

Soit  $(R, z) = (M_1, \ell_1) \otimes (M_k, \ell_k)^m \otimes (M_q, \ell_q)$ . Tout d'abord  $z = \ell_1 + m\ell_k + \ell_q \geq \ell$  par définition de  $m$ . Montrons maintenant que  $R \leq 4K(K+1)M$ .

Soit  $i, j$  des indices tels que  $E_{i,j} = 0$ . Puisque  $k$  est bon, alors pour tout  $p$  tel que  $E_{p,p} = 0$ , on a  $((M_k)^m)_{p,p} \leq \frac{mK\ell_k}{x} N_{p,p} \leq 2K N_{p,p}$ .

Donc :

$$\begin{aligned} & \max\{((M_k)^m)_{p,p} \mid E_{i,p} = E_{p,j} = 0\} \\ & \leq 2K \max\{N_{p,p} \mid E_{i,p} = E_{p,j} = 0\} \\ & \leq 2K \max\left\{\sum_{s=2}^{\ell-1} (M_s)_{p,p} \mid E_{i,p} = E_{p,j} = 0\right\} \quad \text{par la proposition 5.5.5} \\ & \leq 4K N_{i,j} \quad \text{par la proposition précédente} \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant la proposition précédente,

$$\begin{aligned} & (M_1 \otimes ((M_k)^m) \otimes M_q)_{i,j} \\ & \leq (K+1)((M_1 \otimes M_k \otimes M_q)_{i,j} + \max\{((M_k)^m)_{p,p} \mid E_{i,p} = E_{p,j} = 0\}) \\ & \leq (K+1)(N_{i,j} + 4K N_{i,j}) \end{aligned}$$

□

D'après ces propriétés, on a donc uniquement besoin d'itérer une seule matrice. Ainsi, si  $A$  est un ensemble présentable de matrices pondérées uniformes et de même projection idempotente,

$$A = \bigcup_{X \in S} \{(X[1], 1)\} \cup \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{P}} \{(X[n], n) \mid n \geq 1, X \in \Lambda\}$$

où  $S$  est un ensemble (nécessairement fini) de petites matrices d'exposants et  $\mathcal{P}$  un ensemble fini de polytopes de matrices d'exposants, alors :

$$\langle A \rangle \approx A \otimes \left( \bigcup_{X \in S} \langle (X[1], 1) \rangle \cup \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{P}} \{(X[n], n)^m \mid n \geq 1, m \geq 1, X \in \Lambda\} \right) \otimes A$$

On a déjà vu comment approximer le produit de deux ensembles présentables, il ne reste donc plus qu'à approximer  $\langle (X[1], 1) \rangle$  et  $\{(X[n], n)^m \mid n \geq 1, m \geq 1, X \in \Lambda\}$ , ce qui est fait dans la section suivante.

### 7.4.3 Itération d'une unique matrice

On calcule ici un ensemble présentable équivalent à l'itération d'une unique matrice uniforme et dont la projection est idempotente. D'après les sections précédentes, cela suffit pour conclure. Il y a deux cas à traiter, le cas d'une petite matrice pondérée : trouver un ensemble présentable équivalent à  $\langle\langle X[1], 1 \rangle\rangle$  et le cas d'un polytope : trouver un ensemble présentable équivalent à  $\{(X[n], n)^m \mid n \geq 1, m \geq 1, X \in \Lambda\}$ .

**Itération d'une petite matrice pondérée.** On considère donc  $(X[1], 1)$  avec  $X$  une petite matrice d'exposants. On note  $E = \varphi(X[1])$ .  $E$  est idempotente.

Essayons d'expliquer d'un point de vue graphe ce qu'il se passe lorsqu'on itère  $X[1]$ . S'il n'y a pas de transition de  $i$  vers  $j$  dans  $X[1]$ , il n'y en pas non plus dans  $X[1]^m$  par idempotence de  $E$ . S'il existe des chemins, trois cas se présentent en fonction de l'existence de transitions de poids non nuls sur les chemins de  $i$  vers  $j$ .

Tout d'abord, si toutes les transitions accessibles depuis  $i$  et co-accessibles depuis  $j$  sont de poids nuls alors tous les chemins de longueur  $m$  de  $i$  vers  $j$  sont de poids 0. Par uniformité de  $X[1]$  et idempotence de  $E$ , cela se traduit par le fait que  $X[1]_{i,j}$  vaut 0.

S'il y a une transition de poids non nul de  $i$  vers  $j$ , deux cas de figure se présentent. Soit tous les cycles sur les chemins de  $i$  à  $j$  sont de poids nuls, et alors, malgré l'itération, il n'y a que des chemins de poids non nuls mais bornés de  $i$  vers  $j$ ; soit il existe un cycle de poids non nul sur un chemin de  $i$  à  $j$  et dans ce cas, plus on va itérer la matrice, plus le poids du chemin de  $i$  vers  $j$  va augmenter. Il va en fait augmenter proportionnellement à la longueur du produit. Comme  $E$  est idempotente et  $X[1]$  uniforme, cela se lit directement dans les coefficients de  $X[1]$ .

C'est ce que nous formalisons dans la suite.

Notons  $\Omega$  l'ensemble des couples d'indices  $(i, j)$  tels qu'il existe un indice  $p$  tel que  $X_{i,p} \neq \perp$ ,  $X_{p,j} \neq \perp$  et  $X_{p,p} = 0$ . D'un point de vue graphe, c'est l'ensemble des états  $i, j$ , tels qu'il existe un état  $p$  accessible depuis  $i$ , co-accessible depuis  $j$ , et tel qu'il y a une transition autour de  $p$  de poids non nul.

Définissons  $Y$  une matrice d'exposants définie par  $Y_{i,j} = X_{i,j}$  si  $(i, j) \notin \Omega$  et  $Y_{i,j} = 1$  sinon.

L'ensemble  $\{(Y[n], n) \mid n \geq 1\}$  est présentable (la matrice  $Y$  est un polytope réduit à un seul élément). Le coefficient 1 dans  $Y$  fait apparaître des termes de la forme  $n$  dans  $Y[n]$ . Il ne reste donc plus qu'à montrer la proposition suivante :

**Proposition 7.4.5.**

$$\langle\langle X[1], 1 \rangle\rangle \approx \{(Y[n], n) \mid n \geq 1\}.$$

*Démonstration.* Tout d'abord pour tout  $n \geq 1$ ,  $(X[1], 1)^n = (X[1]^n, n)$ .

Montrons que  $(X[1]^n, n) \preceq_{K+1} (Y[n], n)$  et  $(Y[n], n) \preceq_3 (X[1]^n, n)$ .

Tout d'abord,  $\varphi(X[1]^n) = \varphi(Y[n]) = E$  pour tout  $n \geq 1$ , par définition.

D'autre part, si  $n = 1$ ,  $(X[1]^1, 1) = (Y[1], 1)$ , et si  $n = 2$ ,  $(X[1]^2, 2) \preceq_1 (Y[2], 2)$  et  $(Y[2], 2) \preceq_2 (X[1]^2, 2)$ . Supposons donc  $n \geq 3$ .

On démontre les inégalités sur les matrices en traitant tous les cas :

- si  $X_{i,j} = \perp$  alors, d'une part, par idempotence de  $E$ ,  $(X[1]^n)_{i,j} = -\infty$  et, d'autre part, par définition  $(Y[n])_{i,j} = -\infty$ ,

- de même si  $X_{i,j} = -\infty$  alors, d'une part, par idempotence de  $E$  et uniformité de  $X[1]$ , toutes les transitions accessibles et co-accessibles ont poids 0, donc  $(X[1]^n)_{i,j} = 0$  et, d'autre part, par définition  $(Y[n])_{i,j} = 0$ ,

- enfin si  $X_{i,j} = 0$ , deux cas sont à traiter.

Soit il existe un indice  $p$  tel que  $X_{i,p} \neq \perp$ ,  $X_{p,j} \neq \perp$  et  $X_{p,p} = 0$ . Dans ce cas, par définition  $(Y[n])_{i,j} = n$ , et  $(X[1]^n)_{i,j} \geq (X[1])_{i,p} + (X[1]^{n-2})_{p,p} + (X[1])_{p,j} \geq n - 2$ . On en déduit que  $3(X[1]^n)_{i,j} \geq (Y[n])_{i,j}$  (car  $n \geq 3$ ).

Soit il n'existe pas d'indice  $p$  tel que  $X_{i,p} \neq \perp$ ,  $X_{p,j} \neq \perp$  et  $X_{p,p} = 0$ . Dans ce cas, par définition  $(Y[n])_{i,j} = 1$ , et  $(X[1]^n)_{i,j} \leq K + 1$ . En effet, supposons par l'absurde que  $(X[1]^n)_{i,j} > K + 1$ . On en déduit alors qu'il existe des indices  $i_1, i_2, \dots, i_\ell$  tels que  $(X[1])_{i,i_1} + (X[1])_{i_1,i_2} + \dots + (X[1])_{i_\ell,j} > K + 1$ . Chacun de ces termes vaut au plus 1 donc  $\ell \geq K + 1$ . Ainsi il existe  $p < q$  tels que  $i_p = i_q$  et  $(X[1])_{i_p,i_{p+1}} + \dots + (X[1])_{i_{q-1},i_q} \geq 1$  (et  $i_p$  est accessible depuis  $i$  et co-accessible depuis  $j$ ). Donc,  $X_{i,i_p} \neq \perp$ ,  $X_{i_p,j} \neq \perp$  et  $X_{i_p,i_p} = 0$  par uniformité de  $X[1]$ , ce qui contredit l'hypothèse. □

**Itération d'un polytope.** On considère l'ensemble  $\{(X[n], n) \mid n \geq 1, X \in \Lambda\}$  où  $\Lambda$  est un polytope de matrices d'exposants. L'objectif ici est d'approximer l'ensemble des matrices itérées  $\{(X[n], n)^m \mid n \geq 1, m \geq 1, X \in \Lambda\}$  par un ensemble présentable.

Deux paramètres indépendants interviennent dans le calcul de  $(X[n], n)^m$ , la longueur  $n$  et le nombre d'itérations  $m$ . L'approximation du produit  $(X[n], n)^m$  va en fait dépendre du lien entre les deux. On introduit donc un nouveau paramètre  $\lambda \in [0, 1]$  pour représenter un certain ratio entre  $n$  et  $m$ . Plus  $\lambda$  est petit, plus la longueur est petite par rapport au nombre d'itérations et à l'inverse plus  $\lambda$  est grand, plus la longueur domine le nombre d'itérations.

L'idée est la suivante : si on note  $p = mn$  la longueur du produit  $X[n]^m$ , alors on choisit  $\lambda$  tel que  $n = p^\lambda$  et  $m = p^{1-\lambda}$ . Prendre une transition de poids  $n^\alpha$  une fois, revient à prendre une transition de poids  $p^{\lambda\alpha}$  et la prendre  $m$  fois donne un poids de  $p^{1-\lambda+\lambda\alpha}$ . La suite formalise cette idée.

Soit donc  $\lambda \in [0, 1]$ , définissons la matrice d'exposants  $X^{(\lambda)}$  par :

$$X^{(\lambda)} = \psi(X)' \otimes ((1 - \lambda)J + \lambda X) \otimes \psi(X)'$$

où  $J$  est définie par :

$$J_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ et } \psi(X)_{i,j} = 0 \\ \psi(X)_{i,j} & \text{sinon} \end{cases}$$

et  $\psi(X)'$  par :

$$\psi(X)'_{i,j} = \begin{cases} -\infty & \text{si } i = j \text{ et } \psi(X)_{i,j} = \perp \\ \psi(X)_{i,j} & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit  $A = \{(X^{(\lambda)}[n], n) \mid n \geq 1, \lambda \in [0, 1], X \in \Lambda\}$ . Il reste à montrer deux choses :  $A$  est présentable et approxime  $\{(X[n], n)^m \mid n \geq 1, m \geq 1, X \in \Lambda\}$ . C'est ce que nous faisons dans les deux propositions suivantes.

**Proposition 7.4.6.**

L'ensemble  $A$  est présentable.

*Démonstration.* Les propriétés des polytopes de matrices d'exposants permettent de montrer que l'ensemble  $A$  est présentable. Par la propriété 7.2.3, l'ensemble des barycentres  $\{(1 - \lambda)J + \lambda X \mid X \in \Lambda\}$  est un polytope de matrices d'exposants. Notons le  $\Lambda'$ . D'autre part, par la propriété 7.2.4, l'ensemble  $\{\psi(X)' \circledast Y \circledast \psi(X)' \mid Y \in \Lambda'\}$  est également un polytope de matrices d'exposants. Notons le  $\Lambda''$ . Finalement, l'ensemble  $\{(Z[n], n) \mid n \geq 1, Z \in \Lambda''\} = A$  est bien un ensemble présentable.  $\square$

**Proposition 7.4.7.**

$\{(X^{(\lambda)}[n], n) \mid n \geq 1, \lambda \in [0, 1], X \in \Lambda\} \approx \{(X[n], n)^m \mid n \geq 1, m \geq 1, X \in \Lambda\}$ .

*Démonstration.* Pour tout  $X \in \Lambda$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $n \geq 1$ ,  $n' \geq 1$ ,  $\varphi(X^{(\lambda)}[n']) = \varphi(X[n])$ .

*Première direction :* Si  $m = 1$  ou  $m = 2$  alors  $(X[n], n) \preceq_2 (X[n], n)^m$ . Supposons maintenant que  $m \geq 3$ . Montrons que :  $(X^{(\lambda)}[nm], nm) \preceq_3 (X[n], n)^m$  pour tout  $n \geq 1$  et  $m \geq 3$ , où  $\lambda = \ln_{nm}(n)$ . Il suffit de montrer que  $X^{(\lambda)}[nm] \leq 3X[n]^m$ .

Étant donné  $i$  et  $j$ , notons :

$$y_{p,q} = X[1]_{i,p} + (nm)^{\lambda X_{p,q}} + X[1]_{q,j}$$

et  $x_p = X[1]_{i,p} + (nm)^{1-\lambda+\lambda X_{p,p}} + X[1]_{p,j}$

alors par définition de  $\lambda$  :

$$y_{p,q} = X[1]_{i,p} + n^{X_{p,q}} + X[1]_{q,j}$$

et  $x_p = X[1]_{i,p} + mn^{X_{p,p}} + X[1]_{p,j}$

et par définition de  $X^\lambda$  :

$$X^{(\lambda)}[nm]_{i,j} = \max_{p,q} (y_{p,q}, x_p)$$

D'autre part, pour tout  $p, q$ ,

$$\begin{aligned} (X[n]^m)_{i,j} &\geq X[n]_{i,p} + X[n]_{p,q} + X[n]_{q,j} \\ \text{et } (X[n]^m)_{i,j} &\geq X[n]_{i,p} + (m-2)X[n]_{p,p} + X[n]_{p,j} \end{aligned}$$

D'où  $3(X[n]^m)_{i,j} \geq \max_{p,q}(y_{p,q}, x_p)$ .

*Deuxième direction* : Pour tout  $n \geq 1$  et  $\lambda \in [0, 1]$ , notons  $x = \lfloor n^\lambda \rfloor$  et montrons que :

$$(X[x], x)^{\lfloor n^{1-\lambda} \rfloor} \preccurlyeq_{4(K+1)} (X^{(\lambda)}[n], n).$$

Tout d'abord,  $(2x)(2\lfloor n^{1-\lambda} \rfloor) \geq n^\lambda n^{1-\lambda} = n$ . Il reste donc à montrer que :

$$X[x]^{\lfloor n^{1-\lambda} \rfloor} \leq 4(K+1)X^{(\lambda)}[n].$$

Étant donné  $i$  et  $j$ , notons :

$$\begin{aligned} y_{i,j} &= \max\{X[x]_{p,q} \mid (E_{i,p} = 0 \text{ ou } p = i) \text{ et } (E_{q,j} = 0 \text{ ou } q = j)\} \\ \text{et } x_{i,j} &= \max\{\lfloor n^{1-\lambda} \rfloor X[x]_{p,p} \mid E_{i,p} = E_{p,j} = 0\} \end{aligned}$$

Alors par la propriété 7.4.3,

$$(X[x]^{\lfloor n^{1-\lambda} \rfloor})_{i,j} \leq 3(K+1)(y_{i,j} + x_{i,j})$$

De plus, par définition,

$$\begin{aligned} y_{i,j} &= \max\{\lfloor n^\lambda \rfloor^{X_{p,q}} \mid (E_{i,p} = 0 \text{ ou } p = i) \text{ et } (E_{q,j} = 0 \text{ ou } q = j)\} \\ \text{et } x_{i,j} &= \max\{\lfloor n^{1-\lambda} \rfloor \lfloor n^\lambda \rfloor^{X_{p,p}} \mid E_{i,p} = E_{p,j} = 0\} \end{aligned}$$

D'autre part, par définition, pour tout  $p$  tels que  $E_{i,p} = E_{p,j} = 0$  ou  $p = i$ , et tout  $q$  tels que  $E_{q,j} = 0$  ou  $q = j$ , on a :

$$(X^{(\lambda)}[n])_{i,j} \geq \max(n^{\lambda X_{p,q}}, n^{1-\lambda+\lambda X_{p,p}})$$

On en déduit que  $3(K+1)(X^{(\lambda)}[n])_{i,j} \geq X[x]^{\lfloor n^{1-\lambda} \rfloor}$ .

□

## Résumé du chapitre

Dans ce chapitre nous avons vu la preuve du théorème 4.1.1. Le chapitre suivant donne les preuves des théorèmes de domination affine 2.5.1 et de comparaison approchée 3.3.1.



# Chapitre 8

---

## Comparaison approchée et domination affine : preuves

Ce dernier chapitre est consacré à donner les preuves des théorèmes de domination affine 2.5.1 et de comparaison approchée 3.3.1. Ces théorèmes sont énoncés pour des automates min-plus.

Ces deux théorèmes utilisent une même méthode de preuve : l'idée est de découper un chemin de l'automate en portions de chemins de poids nuls ou n'utilisant qu'une seule transition de poids non nul. Par le théorème de la limite supérieure 8.1.1, on est alors capable de contrôler la taille de telles portions de chemins.

Le théorème de domination affine énonce qu'étant données deux fonctions  $f$  et  $g$  calculées par automates min-plus, s'il existe un polynôme  $P$  tel que  $f \leq P \circ g$  alors il existe un polynôme  $P$  de degré 1 vérifiant la même condition. La preuve de ce théorème se fait par une analyse fine de la taille des portions de chemin, dans l'automate calculant  $g$ , n'utilisant qu'une seule transition de poids non nul. La preuve donnée dans ce chapitre est indépendante des chapitres précédents.

Le théorème de comparaison approchée permet de comparer de manière approchée deux fonctions  $f$  et  $g$  calculées par automates min-plus. Ce théorème a été prouvé au chapitre 3 dans le cas où  $g$  est la fonction longueur, en utilisant le théorème d'approximation du rapport fonction-longueur 3.1.1. La preuve du théorème de comparaison approchée se ramène à ce cas-là en codant la fonction  $g$  dans la fonction longueur, en compactant les portions de chemins dont une unique transition a un poids non nul. Ce codage est possible si on contrôle la taille de ces portions de chemins. La preuve utilise un énoncé donné dans la preuve du théorème 3.1.1, faisant appel aux notions de présentabilité et d'approximation développées dans le chapitre précédent (chapitre 7). Le lecteur pourra se reporter à ce chapitre pour plus de précisions.

Les deux théorèmes démontrés ici ne sont pas symétriques en  $f$  et  $g$ . L'utilisation de la loi min et la relation d'ordre entraînent différents statuts pour  $f$  et  $g$ . En effet, il s'agit de montrer que pour tout chemin de  $g$  sur un mot  $w$ , il existe un chemin de  $f$  sur  $w$  de poids inférieur. Les différents chemins sur un mot  $w$  dans l'automate calculant  $g$  seront donc considérés indépendamment les uns des autres, alors qu'il faudra considérer simultanément tous les chemins sur  $w$  dans l'automate calculant  $f$ .

**Organisation du chapitre.** La section 8.1 donne les outils permettant de considérer et de contrôler la taille des portions de chemins dont une des transitions est de poids non nul.

La section 8.2 donne la preuve du théorème de domination affine.

Enfin, la section 8.3 donne la preuve du théorème de comparaison approchée.

**Notations.** Dans la suite, on fixe l'alphabet  $\mathbb{A}$ . Si  $f$  est une fonction calculée par un automate min-plus, on note  $\mathcal{A}_f$  un automate qui la calcule,  $Q_f$  son ensemble d'état,  $I_f$  son vecteur ligne d'états initiaux,  $F_f$  son vecteur colonne d'états finaux, et  $T_f$  le morphisme de l'ensemble des mots dans l'ensemble des matrices associé à  $\mathcal{A}_f$ .

## 8.1 Chemins d'un automate min-plus

Cette section donne des notations et un théorème utile dans l'étude des chemins d'un automate min-plus.

**Chemins d'un automate.** Soit une fonction  $g$  calculée par un automate min-plus.

On définit  $R_{p,0,q}^g \subseteq \mathbb{A}^*$  l'ensemble des mots étiquetant un chemin de poids nul de l'état  $p$  vers l'état  $q$  dans  $\mathcal{A}_g$ .

Soit  $\ell$  un entier non nul, poids d'une transition de  $\mathcal{A}_g$ . On définit  $R_{p,\ell,q}^g \subseteq \mathbb{A}^*$  l'ensemble des mots étiquetant un chemin utilisant exactement une transition de poids  $\ell$  et des transitions de poids 0, de l'état  $p$  vers l'état  $q$  dans  $\mathcal{A}_g$ .

**Limite supérieure d'un ensemble de matrices.** On définit une topologie sur l'ensemble des matrices de  $\mathbb{N}_{\min}$ . La distance entre deux matrices est  $\frac{1}{n}$  si  $n$  est l'entier positif maximal tel que les coefficients des deux matrices inférieurs à  $n$  soient les mêmes. Si un tel entier  $n$  n'existe pas, la distance est de 1.

Étant donné un ensemble  $B$  de matrices sur  $\mathbb{N}_{\min}$ , une matrice  $M$  appartient à la **limite supérieure** de  $B$  si :

- $M$  est la limite d'une suite de matrices de  $B$ ,
- il n'existe pas  $N \in B$  tel que  $N > M$ .

### **Théorème 8.1.1** (limite supérieure).

Étant donné un ensemble  $B$  de matrices sur  $\mathbb{N}_{\min}$ , la limite supérieure de  $B$  est finie.

Ce théorème vient d'une généralisation du lemme de Dickson. L'ordre  $\leq$  est un bel ordre sur  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ . L'ordre produit  $\leq$  sur les matrices est donc lui aussi un bel ordre. Ainsi, il n'existe pas d'antichaine infinie, et par conséquent la limite supérieure de  $B$  est finie.

## 8.2 Preuve du théorème de domination affine

Nous allons maintenant voir la preuve du théorème 2.5.1.

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions calculées par automates min-plus telles qu'il existe un polynôme  $P$  tel que  $f \leq P \circ g$ . Le but est de montrer qu'il existe un entier  $a$  tel que  $f \leq a(g + 1)$ .

Soit  $K$  le coefficient maximal d'une matrice appartenant aux limites supérieures des ensembles  $T_f(R_{p,\ell,q}^g)$  pour tous les états  $p, q$  de  $\mathcal{A}_g$  et tous les poids  $\ell$  apparaissant sur une transition de  $\mathcal{A}_g$ . Cet entier existe par le théorème 8.1.1.

L'ensemble  $R_{p,\ell,q}^g$  donne un ensemble de mots particuliers pour  $g$ , qui étiquettent les chemins utilisant exactement une transition de poids  $\ell$  de  $p$  vers  $q$ . En appliquant  $T_f$ , on considère l'ensemble des matrices décrivant le comportement de  $\mathcal{A}_f$  sur ces mots.

**Expansion.** Étant donnée une matrice  $M$ , on appelle  $m$ -**expansion** de  $M$  une matrice  $M' \geq M$  telle que pour tout  $i, j$ , si  $M_{i,j} > K$  alors  $M'_{i,j} \geq m$ .

**Lemme 8.2.1.** *Pour tout  $M \in T_f(R_{p,\ell,q}^g)$ , pour tout  $m$ , il existe une  $m$ -expansion de  $M$ ,  $M' \in T_f(R_{p,\ell,q}^g)$ .*

*Démonstration.* Par définition de la limite supérieure, d'une part, il existe  $N \geq M$  dans la limite supérieure de  $R_{p,\ell,q}^g$ , et d'autre part, il existe une suite de matrices de  $R_{p,\ell,q}^g$  de limite  $N$ .

Comme  $K$  est l'entier maximal des coefficients des matrices de la limite supérieure de  $T_f(R_{p,\ell,q}^g)$ , alors pour tout  $i, j$ ,  $M_{i,j} > K$  implique  $N_{i,j} = +\infty$ . On en déduit qu'il existe une  $m$ -expansion de  $M$  dans la suite de matrices de  $T_f(R_{p,\ell,q}^g)$  de limite  $N$ .  $\square$

Montrons maintenant que  $f \leq K(g + 1)$  ce qui prouvera le théorème de domination affine.

Par contraposition, supposons qu'il existe  $w$  tel que  $f(w) > Kg(w) + K$ .

■ Si  $g(w) = 0$ , alors  $w \in R_{p,0,q}^g$  avec  $p$  initial et  $q$  final. Par ce qui précède, pour tout  $m$ , il existe un mot  $w_m \in R_{p,0,q}^g$  tel que  $T_f(w_m)$  est une  $m$ -expansion de  $T_f(w)$ . Puisque  $f(w) > K$ , alors pour tout état initial  $r$  et tout état final  $s$  de  $\mathcal{A}_f$ ,  $T_f(w_m)_{r,s} \geq m$ . Ainsi,  $g(w_m) = 0$  et  $f(w_m) \geq m$  pour tout  $m$ . Ce qui contredit l'hypothèse  $f \leq P \circ g$ .

■ Si  $g(w) \neq 0$ , remarquons tout d'abord que  $g(w)$  est fini car  $f(w) > Kg(w) + K$ . Il existe donc  $p_0, \dots, p_k$ , avec  $p_0$  initial et  $p_k$  final, tel que

$$w = w^{(1)} \dots w^{(k)} \text{ avec } w^{(1)} \in R_{p_0, \ell_1, p_1}^g, \dots, w^{(k)} \in R_{p_{k-1}, \ell_k, p_k}^g,$$

où  $\ell_1, \dots, \ell_k$  sont des poids non nuls de  $\mathcal{A}_g$ , dont la somme vaut  $g(w)$ . Par un raisonnement similaire au cas précédent, pour tout  $m$ , pour tout  $i = 1, \dots, k$ , il existe  $w_m^{(i)} \in R_{p_{i-1}, \ell_i, p_i}$  tel que  $T_f(w_m^{(i)})$  soit une  $m$ -expansion de  $T_f(w^{(i)})$ . Considérons maintenant le mot  $w_m = w_m^{(1)} \dots w_m^{(k)}$ . On a  $g(w_m) \leq g(w)$ . D'autre part, par l'absurde, supposons qu'il existe  $m$ , tel que  $f(w_m) < m$ . Alors, il existe  $q_0, \dots, q_k$  avec  $q_0$  initial et  $q_k$  final tels que  $T_f(w_m^{(i)})_{q_{i-1}, q_i} < m$  pour tout  $i = 1, \dots, k$ . Puisque  $T_f(w_m^{(i)})$  est une

$m$ -expansion de  $T_f(w^{(i)})$ , alors  $T_f(w^{(i)})_{q_{i-1}, q_i} \leq K$ . Et donc,  $f(w) \leq Kk \leq Kg(w)$ , ce qui contredit l'hypothèse. Finalement, pour tout  $m$ ,  $f(w_m) \geq m$ . On a donc pour tout  $m$ ,  $g(w_m) \leq g(w)$  et  $f(w_m) \geq m$ , ce qui contredit l'existence de  $P$  tel que  $f \leq P \circ g$ .

### 8.3 Preuve du théorème de comparaison approchée

Nous allons maintenant voir la preuve du théorème 3.3.1. Étant données  $f$  et  $g$  calculées par automates min-plus, il s'agit de comparer de manière approchée  $f$  et  $g$ . Plus précisément, étant donné  $\varepsilon > 0$  (qui représente la marge d'erreur), il s'agit d'exhiber un algorithme qui répond *oui* si  $f \leq g$ , *non* s'il existe un mot  $w$  tel que  $f(w) > (1 + \varepsilon)g(w)$ , et indifféremment *oui* ou *non* dans les autres cas.

Nous allons ainsi construire un ensemble de matrices qui, étant donné un mot  $w$ , capturent le comportement de  $\mathcal{A}_f$  sur  $w$  (tous les chemins simultanément) avec le comportement d'un chemin de  $g$  étiqueté par  $w$  (en réutilisant les notations  $R_{p,\ell,q}^g$ ).

Plus précisément, chaque matrice  $M$  est associée à un entier  $\ell$  et représente un ensemble de chemins de  $\mathcal{A}_g$ , qui commence dans un état  $p$  donné, termine dans un état  $q$  donné et utilise exactement une transition de poids  $\ell$  et des transitions de poids 0.  $M$  simule le comportement de  $\mathcal{A}_f$  sur les mots étiquétant ces chemins (il peut y en avoir un nombre infini, mais on ne va considérer que ceux dans le limite supérieure qui est finie), et garde en mémoire les états  $p$  et  $q$  et le chemin dans  $\mathcal{A}_g$ .

Le lemme suivant donne la construction de la partie d'une matrice en charge de contrôler le chemin dans  $\mathcal{A}_g$ .

**Lemme 8.3.1.** *Il existe des matrices carrées de taille  $|Q_g|+2$ ,  $(C^{p,q})_{p,q \in Q_g}$  sur  $\{0, +\infty\}$  et des vecteurs ligne  $I_C$  et colonne  $F_C$  tels que pour tout  $p_1, q_1, \dots, p_k, q_k \in Q_g$ ,*

$$I_C \otimes C^{p_1, q_1} \otimes \dots \otimes C^{p_k, q_k} \otimes F_C = \begin{cases} +\infty & \text{si } p_1 \in I_g, q_1 = p_2, \dots, q_{k-1} = p_k \text{ et } q_k \in F_g, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* Pour tout  $p, q$  tels que  $p, q \in Q_g$ , posons la matrice  $C^{p,q}$  d'indices  $Q_g \cup \{i, \perp\}$ , telle que :

$$(C^{p,q})_{p', q'} = \begin{cases} 0 & \text{si } p' = i, p \in I_g \text{ et } q' = q, \\ 0 & \text{si } p' = i, p \notin I_g \text{ et } q' = \perp, \\ 0 & \text{si } p' = p \text{ et } q' = q, \\ 0 & \text{si } p' \neq i \text{ et } p' \neq p \text{ et } q' = \perp, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit de plus le vecteur ligne  $I_C$  tel que  $(I_C)_i = 0$  et  $(I_C)_p = +\infty$  si  $p \neq i$ . Enfin, on définit le vecteur colonne  $F_C$  tel que  $(F_C)_p = +\infty$  si  $p \in F_g$ ,  $(F_C)_i = +\infty$  s'il existe un état à la fois initial et final dans  $\mathcal{A}_g$  et  $(F_C)_p = 0$  dans tous les autres cas.  $\square$

L'idée du lemme est de coder un automate déterministe qui lit des mots sur l'alphabet  $Q_g^2$ , et accepte un mot  $(p_1, q_1) \dots (p_k, q_k)$  si  $p_1$  n'est pas initial ou  $q_k$  n'est pas final ou si  $q_{i-1} \neq p_i$  pour un certain  $i$ . L'automate rejette donc les chemins de  $\mathcal{A}_g$  acceptants.

Réutilisons maintenant la notion de matrices pondérées développée dans les chapitres précédents. L'ensemble  $B$  et les vecteurs  $I$  et  $F$  sont définis par :

$$B = \left\{ \left( \begin{pmatrix} M & +\infty \\ +\infty & C^{p,q} \end{pmatrix}, \ell \right) : M \text{ est dans la limite supérieure de } T_f(R_{p,\ell,q}^g) \right\},$$

$$I = (I_f \ I_C) \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} F_f \\ F_C \end{pmatrix}.$$

Nous allons maintenant relier la comparaison des fonctions  $f$  et  $g$  avec la construction précédente.

**Lemme 8.3.2.** *Pour tout  $m > 0$ ,  $f \leq mg$  si et seulement si pour tout  $(W, \ell) \in \langle B \rangle$ ,  $I \otimes W \otimes F \leq m\ell$ .*

*Démonstration.* Supposons tout d'abord que  $f \not\leq mg$ , c'est-à-dire qu'il existe un mot  $w$  tel que  $f(w) > mg(w)$ . Alors,  $g(w)$  est fini et donc, il existe un chemin acceptant  $\rho$  dans  $\mathcal{A}_g$  étiqueté par  $w$ . Il existe donc  $p_0, \dots, p_k$  avec  $p_0$  initial et  $p_k$  final, tels que :

$$w \in R_{p_0, \ell_1, p_1}^g R_{p_1, \ell_2, p_2}^g \cdots R_{p_{k-1}, \ell_k, p_k}^g,$$

où  $\ell_1, \dots, \ell_k$  sont des poids non nuls de  $\mathcal{A}_g$  dont la somme vaut  $\ell = g(w)$ . Pour tout  $i = 1, \dots, k$ , posons  $M_i$  la matrice dans la limite supérieure de  $T_f(R_{p_{i-1}, \ell_i, p_i}^g)$  telle que  $T_f(w_i) \leq M_i$ . Soit  $C_i$  la matrice  $C^{p_{i-1}, p_i}$ . Alors la matrice :

$$(W_i, \ell_i) \text{ avec } W_i = \begin{pmatrix} M_i & +\infty \\ +\infty & C_i \end{pmatrix}$$

est dans  $B$ . De ce fait,  $(W, \ell)$  appartient à  $\langle B \rangle$ , où  $W = W_1 \otimes \cdots \otimes W_k$ . On a alors  $I \otimes W \otimes F = \min(x_f, x_C)$  avec :

$$x_f = I_f \otimes M_1 \otimes \cdots \otimes M_k \otimes F_f \quad \text{et} \quad x_C = I_C \otimes C_1 \otimes \cdots \otimes C_k \otimes F_C.$$

Par définition des matrices  $M_i$ ,  $x_f \geq I_f \otimes T_f(w) \otimes F_f = f(w)$ . De plus, d'après le lemme 8.3.1,  $x_C = +\infty$ . On en déduit que  $I \otimes W \otimes F \geq f(w) > mg(w) = m\ell$ .

Supposons maintenant que  $f \leq mg$ . Soit  $(W, \ell) \in \langle B \rangle$ , on peut alors écrire  $(W, \ell)$  comme un produit  $(W_1, \ell_1) \otimes \cdots \otimes (W_k, \ell_k)$  avec  $(W_i, \ell_i) \in B$  pour tout  $i$ . Par définition de  $B$ , pour chaque  $W_i$ , il existe  $p_i, q_i \in Q_g$  tels que :

$$W_i = \begin{pmatrix} M_i & +\infty \\ +\infty & C^{p_i, q_i} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M_i \text{ dans la limite supérieure de } T_f(R_{p_i, \ell_i, q_i}^g).$$

On a  $I \otimes W \otimes F = \min(x_f, x_C)$  avec :

$$x_f = I_f \otimes M_1 \otimes \cdots \otimes M_k \otimes F_f \quad \text{et} \quad x_C = I_C \otimes C_1 \otimes \cdots \otimes C_k \otimes F_C .$$

Remarquons tout d'abord que si  $x_C = 0$ , alors  $I \otimes W \otimes F = 0 \leq m\ell$ . Supposons donc que  $x_C = +\infty$ . D'après le lemme 8.3.1, on a alors  $p_1$  initial,  $q_k$  final, et  $p_i = q_{i-1}$  pour tout  $i = 2 \dots k$ . Prouvons que  $x_f \leq m\ell$ . Par l'absurde supposons que  $x_f > m\ell$  alors il existe des mots  $w_1, \dots, w_k$  tels que pour tout  $i = 1 \dots k$ , on a d'une part,  $w_i \in R_{p_i, \ell_i, q_i}^g$ , et d'autre part  $I_f \otimes T_f(w_1) \otimes \cdots \otimes T_f(w_k) \otimes F_f > m\ell$ . De plus, par définition des ensembles  $R_{p_i, \ell_i, q_i}^g$ , on a  $g(w_1 \dots w_k) = \ell$ . Finalement,  $f(w_1 \dots w_k) > mg(w_1 \dots w_k)$ , ce qui contredit l'hypothèse.  $\square$

On peut maintenant finir la preuve du théorème de comparaison approchée, en explicitant l'algorithme qui compare  $f$  et  $g$ . En utilisant la preuve du théorème d'approximation du rapport fonction-longueur, on peut calculer un ensemble présentable  $A$  de matrices pondérées tel que  $A \approx_{\frac{\varepsilon}{2}} \langle B \rangle$ . On teste alors l'existence dans  $A$  d'une matrice pondérée  $(M, \ell)$  telle que  $I \otimes \frac{1}{\ell} M \otimes F > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ . Si une telle matrice existe, l'algorithme répond *non*, sinon il répond *oui*.

Montrons la correction de cet algorithme.

■ Par l'absurde, supposons que  $f \leq (1 - \varepsilon)g$ , et que l'algorithme répond *non*. Alors il existe  $(M, \ell) \in A$  telle que  $I \otimes \frac{1}{\ell} M \otimes F > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ . De plus, il existe  $(M', \ell') \in \langle B \rangle$  telle que  $(M, \ell) \preceq_{\frac{\varepsilon}{2}} (M', \ell')$ . Cela implique que  $\frac{1}{\ell} M \leq \frac{1}{\ell'} M' + \frac{\varepsilon}{2}$ . Et donc  $I \otimes M' \otimes T > (1 - \varepsilon)\ell'$ , ce qui contredit le lemme 8.3.2.

■ Supposons que  $f \not\leq g$ , alors par le lemme 8.3.2, il existe une matrice  $M \in \langle B \rangle$  telle que  $I \otimes \frac{1}{\ell} M \otimes F > 1$ . De plus, il existe  $M' \in A$ , telle que  $(M, \ell) \preceq_{\frac{\varepsilon}{2}} (M', \ell')$ . On en déduit que  $\frac{1}{\ell} M \leq \frac{1}{\ell'} M' + \frac{\varepsilon}{2}$ , et donc que  $I \otimes \frac{1}{\ell'} M' \otimes F > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ . D'où l'algorithme répond *non*.

## Résumé du chapitre

Ce chapitre a donné les preuves des théorèmes de domination affine 2.5.1 et de comparaison approchée 3.3.1.

# Conclusion

---

Ce mémoire donne une vision générale de la description des fonctions calculées par automates min-plus et max-plus et des résultats de décidabilité sur ce sujet.

**Contributions principales.** La contribution principale consiste en la description des fonctions :

$$g_{\max}(n) = \max_{|w| \leq n} f(w)$$

où  $f$  est une fonction calculée par un automate min-plus, et :

$$g_{\min}(n) = \min_{|w| \geq n} f(w)$$

où  $f$  est une fonction calculée par un automate max-plus.

Le théorème d'approximation du rapport fonction-longueur 3.1.1 donne une approximation de la borne supérieure des rapports  $\frac{g_{\max}(n)}{n}$  et de la borne inférieure des rapports  $\frac{g_{\min}(n)}{n}$ .

Le théorème d'équivalence asymptotique 4.1.1 décrit le comportement asymptotique de la fonction  $g_{\min}$ . Plus précisément, il existe un rationnel  $\alpha \in [0, 1]$  calculable tel que  $g_{\min}(n) = \Theta(n^\alpha)$ .

Le théorème d'approximation du rapport fonction-longueur s'applique notamment à la comparaison approchée de fonctions calculées par automates min-plus. Le théorème de comparaison approchée raffine grandement les résultats déjà connus sur la comparaison de fonctions, et semble être la comparaison la plus précise qui reste décidable.

Le théorème d'équivalence asymptotique exhibe un algorithme qui permet de calculer un équivalent asymptotique de la longueur de la plus longue exécution dans le modèle de la « size-change abstraction ».

**Questions ouvertes.** La section 2.6 expose l'objectif à atteindre pour la description des fonctions  $g_{\max}$  et  $g_{\min}$ , à savoir les approximer par une fonction de la forme  $n \mapsto cn^\alpha$ . Il s'agirait de trouver un algorithme calculant  $\alpha$  et approximant  $c$ .

Avant d'obtenir cette précision dans la description des fonctions, il s'agirait également d'unifier les cas min-plus et max-plus : prouver le théorème d'équivalence asymptotique dans le cas min-plus et le théorème de comparaison approchée dans le cas

max-plus. On peut aussi se demander s'il existe une transformation des automates min-plus aux automates max-plus adaptée aux problèmes posés dans ce mémoire, et qui permettrait un passage systématique des propriétés qui ont été exposées.

Une autre question concerne la complexité des problèmes présentés. Les algorithmes sont de complexité EXPSPACE, et les problèmes présentés sont PSPACE-difficiles. Une question consiste à raffiner la complexité de ces problèmes.

Finalement, on peut aussi se demander si la description de tels comportements peut être étendue à des classes d'automates plus générales, utilisant par exemple plusieurs compteurs ou permettant la remise à zéro.



# Bibliographie

---

- [1] R. ALUR, L. D'ANTONI, J. V. DESHMUKH, M. RAGHOTHAMAN AND Y. YUAN, Regular Functions and Cost Register Automata, in *LICS*, pp. 13–22, IEEE Computer Society, 2013.
- [2] R. ALUR AND M. RAGHOTHAMAN, Decision Problems for Additive Regular Functions, in *ICALP (2)*, F. V. Fomin, R. Freivalds, M. Z. Kwiatkowska and D. Peleg (eds.), pp. 37–48, *Lecture Notes in Computer Science* vol. 7966, Springer, 2013.
- [3] H. ANDERSON AND S.-C. KHOO, Affine-Based Size-Change Termination, in *APLAS*, A. Ohori (ed.), pp. 122–140, *Lecture Notes in Computer Science* vol. 2895, Springer, 2003.
- [4] S. BALA, Regular Language Matching and Other Decidable Cases of the Satisfiability Problem for Constraints between Regular Open Terms, in *STACS*, V. Diekert and M. Habib (eds.), pp. 596–607, *Lecture Notes in Computer Science* vol. 2996, Springer, 2004.
- [5] S. BALA, Complexity of Regular Language Matching and Other Decidable Cases of the Satisfiability Problem for Constraints Between Regular Open Terms, *Theory Comput. Syst.* **39**,1 (2006), 137–163.
- [6] J. BERSTEL AND C. REUTENAUER, *Les Séries rationnelles et leurs langages, Études et recherches en informatique*, Masson, 1984.
- [7] V. D. BLONDEL, S. GAUBERT AND J. N. TSITSIKLIS, Approximating the spectral radius of sets of matrices in the max-algebra is NP-hard, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **45**,9 (2000), 1762–1765.
- [8] O. CARTON, *Langages formels, calculabilité et complexité*, Vuibert, 2008. 240 pages.
- [9] T. COLCOMBET, The Theory of Stabilisation Monoids and Regular Cost Functions, in *ICALP (2)*, S. Albers, A. Marchetti-Spaccamela, Y. Matias, S. E. Nikoletseas and W. Thomas (eds.), pp. 139–150, *Lecture Notes in Computer Science* vol. 5556, Springer, 2009.
- [10] T. COLCOMBET, Regular Cost Functions, Part I : Logic and Algebra over Words, *Logical Methods in Computer Science* **9**,3 (2013).

- [11] T. COLCOMBET AND L. DAVIAUD, Approximate comparison of distance automata, in *STACS*, N. Portier and T. Wilke (eds.), pp. 574–585, *LIPICs* vol. 20, Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2013.
- [12] T. COLCOMBET, L. DAVIAUD AND F. ZULEGER, Size-change abstraction and max-plus automata. To be published in MFCS14.
- [13] M. DROSTE AND P. GASTIN, Weighted automata and weighted logics, *Theor. Comput. Sci.* **380**,1-2 (2007), 69–86.
- [14] M. Droste, W. Kuich and H. Vogler (eds.), *Handbook of Weighted Automata*, Springer-Verlag, 2009.
- [15] L. C. EGGAN, Transition graphs and the star-height of regular events, *Michigan Math. J.* **10** (1963), 385–397.
- [16] S. EILENBERG, *Automata, languages, and machines. Vol. B*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1976. With two chapters (“Depth decomposition theorem” and “Complexity of semigroups and morphisms”) by Bret Tilson, Pure and Applied Mathematics, Vol. 59.
- [17] S. GAUBERT, Performance evaluation of  $(\max, +)$  automata, *IEEE Trans. Automat. Control* **40**,12 (1995), 2014–2025.
- [18] S. GAUBERT, On the Burnside problem for semigroups of matrices in the  $(\max, +)$  algebra, *Semigroup Forum* **52**,3 (1996), 271–292.
- [19] S. GAUBERT AND J. MAIRESSE, Modeling and analysis of timed Petri nets using heaps of pieces, *IEEE Trans. Automat. Control* **44**,4 (1999), 683–697.
- [20] K. HASHIGUCHI, A Decision Procedure for the Order of Regular Events, *Theor. Comput. Sci.* **8** (1979), 69–72.
- [21] K. HASHIGUCHI, Limitedness Theorem on Finite Automata with Distance Functions, *J. Comput. Syst. Sci.* **24**,2 (1982), 233–244.
- [22] K. HASHIGUCHI, Regular Languages of Star Height One, *Information and Control* **53**,3 (1982), 199–210.
- [23] K. HASHIGUCHI, Algorithms for Determining Relative Star Height and Star Height, *Inf. Comput.* **78**,2 (1988), 124–169.
- [24] K. HASHIGUCHI, Improved Limitedness Theorems on Finite Automata with Distance Functions, *Theor. Comput. Sci.* **72**,1 (1990), 27–38.
- [25] K. HASHIGUCHI, New Upper Bounds to the Limitedness of Distance Automata, in *ICALP*, F. Meyer auf der Heide and B. Monien (eds.), pp. 324–335, *Lecture Notes in Computer Science* vol. 1099, Springer, 1996.
- [26] K. HASHIGUCHI, K. ISHIGURO AND S. JIMBO, Decidability of The Equivalence Problem for Finitely Ambiguous Finance Automata, *IJAC* **12**,3 (2002), 445.
- [27] J. E. HOPCROFT, R. MOTWANI AND J. D. ULLMAN, *Introduction to automata theory, languages, and computation - international edition (2. ed)*, Addison-Wesley, 2003.

- [28] D. KIRSTEN, The finite power problem revisited, *Inf. Process. Lett.* **84**,6 (2002), 291–294.
- [29] D. KIRSTEN, Distance Desert Automata and the Star Height One Problem, in *FoSSaCS*, I. Walukiewicz (ed.), pp. 257–272, *Lecture Notes in Computer Science* vol. 2987, Springer, 2004.
- [30] D. KIRSTEN, Distance desert automata and the star height problem, *ITA* **39**,3 (2005), 455–509.
- [31] D. KIRSTEN, A Burnside Approach to the Finite Substitution Problem, *Theory Comput. Syst.* **39**,1 (2006), 15–50.
- [32] D. KIRSTEN AND S. LOMBARDY, Deciding Unambiguity and Sequentiality of Polynomially Ambiguous Min-Plus Automata, in *STACS*, S. Albers and J.-Y. Marion (eds.), pp. 589–600, *LIPICs* vol. 3, Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, Germany, 2009.
- [33] S. C. KLEENE, Representation of events in nerve nets and finite automata, in *Automata studies*, pp. 3–41, *Annals of mathematics studies*, no. 34, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
- [34] I. KLIMANN, S. LOMBARDY, J. MAIRESSE AND C. PRIEUR, Deciding unambiguity and sequentiality from a finitely ambiguous max-plus automaton, *Theoret. Comput. Sci.* **327**,3 (2004), 349–373.
- [35] D. KROB, The equality problem for rational series with multiplicities in the tropical semiring is undecidable, in *Automata, languages and programming (Vienna, 1992)*, pp. 101–112, *Lecture Notes in Comput. Sci.* vol. 623, Springer, Berlin, 1992.
- [36] M. KUFLEITNER, The Height of Factorization Forests, in *MFCS*, E. Ochmanski and J. Tyszkiewicz (eds.), pp. 443–454, *Lecture Notes in Computer Science* vol. 5162, Springer, 2008.
- [37] C. S. LEE, N. D. JONES AND A. M. BEN-AMRAM, The size-change principle for program termination, in *POPL*, C. Hankin and D. Schmidt (eds.), pp. 81–92, ACM, 2001.
- [38] H. LEUNG, Limitedness Theorem on Finite Automata with Distance Functions : An Algebraic Proof, *Theor. Comput. Sci.* **81**,1 (1991), 137–145.
- [39] H. LEUNG AND V. PODOLSKIY, The limitedness problem on distance automata : Hashiguchi’s method revisited, *Theor. Comput. Sci.* **310**,1-3 (2004), 147–158.
- [40] S. LOMBARDY AND J. MAIRESSE, Max-plus automaton. *Handbook of Automata*, European Mathematical Society, à paraître.
- [41] S. LOMBARDY AND J. MAIRESSE, Series which are both max-plus and min-plus rational are unambiguous, *ITA* **40**,1 (2006), 1–14.
- [42] P. MANOLIOS AND D. VROON, Termination Analysis with Calling Context Graphs, in *CAV*, T. Ball and R. B. Jones (eds.), pp. 401–414, *Lecture Notes in Computer Science* vol. 4144, Springer, 2006.

- [43] M. MOHRI, Finite-State Transducers in Language and Speech Processing, *Computational Linguistics* **23**,2 (1997), 269–311.
- [44] M. O. RABIN, Probabilistic Automata, *Information and Control* **6**,3 (1963), 230–245.
- [45] M. O. RABIN AND D. SCOTT, Finite automata and their decision problems, *IBM J. Res. Develop.* **3** (1959), 114–125.
- [46] J. SAKAROVITCH, *Elements of Automata Theory*, Cambridge University Press, 2009.
- [47] M. P. SCHÜTZENBERGER, On the definition of a family of automata, *Information and Control* **4** (1961), 245–270.
- [48] I. SIMON, Limited Subsets of a Free Monoid, in *FOCS*, pp. 143–150, IEEE Computer Society, 1978.
- [49] I. SIMON, Recognizable sets with multiplicities in the tropical semiring, in *Mathematical foundations of computer science, 1988 (Carlsbad, 1988)*, pp. 107–120, *Lecture Notes in Comput. Sci.* vol. 324, Springer, Berlin, 1988.
- [50] I. SIMON, Factorization forests of finite height, *Theoret. Comput. Sci.* **72**,1 (1990), 65–94.
- [51] I. SIMON, The nondeterministic complexity of a finite automaton, in *Mots*, pp. 384–400, *Lang. Raison. Calc.*, Hermès, Paris, 1990.
- [52] I. SIMON, On semigroups of matrices over the tropical semiring, *RAIRO Inform. Théor. Appl.* **28**,3-4 (1994), 277–294.
- [53] A. WEBER, Finite-Valued Distance Automata, *Theor. Comput. Sci.* **134**,1 (1994), 225–251.