Università di Pisa

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

Mapping Class Group: Generatori e Presentazione

12 giugno 2015

Relatore
Prof. **Roberto Frigerio**

Candidato
Matteo Barucco

Anno accademico 2014/2015

A mamma e papà

Indice

Introduzione **1**

1 Curve e superfici **3**
1.1 Superfici 3
1.2 Curve 4
1.3 Principio di cambio delle coordinate 6

2 Mapping Class Group **9**
2.1 Definizione e primi esempi 9
2.2 Dehn Twists 13
2.3 Half-twists 17
2.4 Il caso del toro 18

3 Generatori **23**
3.1 Complessi di curve 23
3.2 Birman exact sequence 25
3.3 Il mapping class group è finitamente generato 29
3.4 Insieme esplicito di generatori 33

4 Presentazione **39**
4.1 Il complesso degli archi 39
4.2 Azioni di gruppi su complessi 41
4.3 Il mapping class group è finitamente presentabile 43

Bibliografia **47**

Ringraziamenti **49**

Elenco delle figure

1.1 Superficie generica di genere g. 3
1.2 Bigono. 5
1.3 Le due superfici $S_{\alpha\beta}$ e $S_{\gamma\delta}$ 8

2.1 Dehn twist sinistro 14
2.2 Risoluzione di un incrocio 15
2.3 Dimostrazione della Proposizione 2.19 17
2.4 Half-twist 18
2.5 I generatori standard del toro 21

3.1 A sinistra costruzione di γ, a destra costruzione di γ_1 e γ_2. 24
3.2 Immagine nell'anello di Push(α) 28
3.3 Generatori standard di $\pi_1(S_{g,n})$. 30
3.4 Il laccio $b_i a_1$ 31
3.5 Generatori di Lickorish 33
3.6 Immagini dei generatori di Lickorish in S_{m_1} 34
3.7 Immagini dei generatori di Lickorish in S'_{m_1} 34
3.8 Immagini dei generatori di Lickorish in S''_{m_1} 35
3.9 Generatori standard per $\pi_1\left(S''_{m_1} m_+\right)$ 35
3.10 I Dehn twists $T_{m'_2}, \ldots, T_{m'_{g-1}}$ 36
3.11 Generatori di Humphries 36
3.12 Curve utilizzate per portare m_i in m_{i+2} 37
3.13 Portare m_i in m_{i+2} 38

4.1 Deformazione di Hatcher in $\mathcal{A}(S)$ 41

Introduzione

Lo scopo fondamentale di questa tesi è quello di dimostrare che il mapping class group è finitamente generato e finitamente presentabile.

Per capire al meglio gli omeomorfismi di una superficie in sé, risulterà spesso utile studiare come agiscono sulle curve della superficie. Nel primo capitolo dunque saranno esposti alcuni fatti riguardanti le superfici in generale e le curve su di esse. In tutta la trattazione con la parola curva intenderemo sempre una curva chiusa semplice. Introdurremo il teorema di classificazione delle superfici, l'intersezione algebrica e l'intersezione geometrica tra due classi di isotopia di curve, e daremo alcuni semplici criteri riguardanti il calcolo di queste intersezioni. Metteremo in luce le differenze in questo contesto tra omotopia e isotopia di curve e daremo alcuni lemmi che ci garantiranno il passaggio dall'una all'altra. Giungeremo così al principio di cambio delle coordinate, che risulterà avere forti analogie col principio di cambio di base negli spazi vettoriali. In particolare mostreremo come alcuni fatti topologici riguardanti tutte le curve della superficie con una certa caratteristica topologica, possano essere dimostrati semplicemente andandoli a verificare su una famiglia di curve scelta opportunamente ai fini di semplificare il più possibile la situazione.

Nel secondo capitolo definiremo il mapping class group di una superficie, e ne vedremo varie definizioni equivalenti. Definiremo il pure mapping class group, e vedremo poi i primi esempi di mapping class group: disco, disco con un punto tolto, sfera con alcuni punti tolti e anello. Daremo poi l'enunciato del metodo di Alexander che risulterà uno strumento molto utile nel computo dei mapping class groups. Seguirà una delle definizioni centrali del lavoro: quella di Dehn twist relativo a una curva. Una volta data la definizione focalizzeremo l'attenzione su alcune proprietà dei Dehn twists e alcuni criteri per gestire l'azione di questi mapping class. Dalla definizione di Dehn twist risulterà chiara la limitazione principale di questi elementi, e la necessità della definizione di half-twist per descrivere in modo esauriente il mapping class group. Dedicheremo una parte del capitolo allo studio del toro, determinando esplicitamente un isomorfismo tra il mapping class group del toro e il gruppo delle matrici speciali lineari di dimensione due a coefficienti interi. Troveremo così due generatori per il mapping class group del toro che saranno Dehn twists relativi a curve non separanti.

Nel terzo capitolo dimostreremo che per superfici di genere almeno uno e con un qualsiasi numero di punti tolti il pure mapping class group è finitamente generato da Dehn twists lungo curve non separanti. La dimostrazione di questo

teorema centrale sarà essenzialmente una doppia induzione sul genere e sul numero di punti tolti. Per l'induzione sul genere avremo bisogno di introdurre il complesso delle curve e di dimostrare alcuni risultati riguardanti la connessione o meno di questo complesso. Per l'induzione sul numero di punti tolti invece useremo uno degli strumenti più importanti nello studio del mapping class group: la Birman exact sequence. Come immediato utilizzo di questo potente strumento, dimostreremo che il pure mapping class group di una sfera con n punti tolti è finitamente generato da Dehn twists. Una volta fissati tutti gli strumenti necessari menzionati dimostreremo il teorema centrale della trattazione. Mettendo assieme tutti i casi trattati sarà a questo punto immediato dimostrare che il mapping class group è finitamente generato da Dehn twists e half-twists. La restante parte del capitolo sarà invece dedicata a trovare un insieme esplicito di generatori per il mapping class group delle superfici con genere almeno uno e senza punti tolti. Passando per i generatori di Lickorish, mostreremo che i generatori di Humphries sono effettivamente un insieme di generatori.

Una volta dimostrato che il mapping class group è finitamente generato, l'ultimo capitolo sarà completamente dedicato alla dimostrazione che il mapping class group è finitamente presentabile. Per fare ciò introdurremo il complesso degli archi di una superficie e ne studieremo alcune caratteristiche. In particolare dimostreremo che se il complesso degli archi è non vuoto, allora è contrattile. Seguiranno alcuni richiami di topologia algebrica e teoria geometrica dei gruppi, che ci porteranno a delle condizioni sufficienti affinché un gruppo sia finitamente presentabile, in base alla sua azione su un CW-complesso. Applicheremo poi tutti i risultati introdotti nel capitolo all'azione del mapping class group sul complesso degli archi, dimostrando che il mapping class group è finitamente presentabile.

Capitolo 1

Curve e superfici

Questo primo capitolo è dedicato ad un'esposizione chiara e concisa di tutte le nozioni riguardanti curve e superfici che saranno poi indispensabili nel resto della tesi. Le dimostrazioni saranno quasi sempre omesse.

1.1 Superfici

Una superficie è una varietà differenziabile di dimensione 2, eventualmente con bordo. Il risultato che segue, noto come teorema di classificazione delle superfici, è di importanza fondamentale nello studio delle stesse. Spesso attribuito a Möbius, era noto già a metà del diciannovesimo secolo per superfici che ammettono una triangolazione. Successivamente Radò dimostrò che ogni superficie compatta ammette una triangolazione.

Teorema 1.1 (classificazione delle superfici)**.** Ogni superficie compatta, connessa e orientabile è omeomorfa alla somma connessa di $g \geq 0$ tori con $b \geq 0$ dischi aperti con chiusure disgiunte rimossi. Inoltre g e b sono univocamente determinati dal tipo di omeomorfismo della superficie.

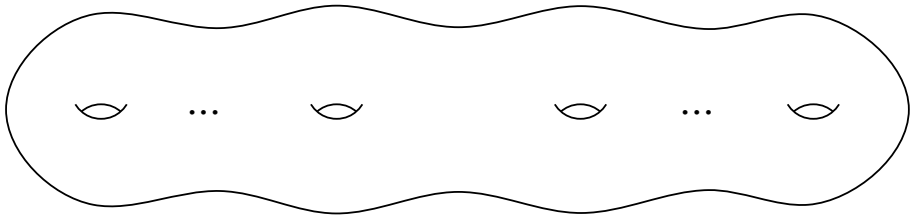


Figura 1.1: Superficie generica di genere g.

Dove g è il genere della superficie, b il numero di componenti di bordo, mentre n indicherà il numero di punti rimossi dall'interno della superficie. In tutta la

trattazione che seguirà le superfici saranno sempre supposte compatte, connesse e orientate (con eventualmente punti rimossi e dunque non più compatte). È importante osservare che nel caso di superfici con punti tolti, è possibile riaggiungere alla superficie i punti rimossi ottenendo così nuovamente una superficie compatta. Estendendo poi gli omeomorfismi per continuità anche ai punti riaggiunti notiamo che un qualunque omeomorfismo tra superfici compatte con punti tolti si estende in modo unico ad un omeomorfismo tra le corrispettive superfici con i punti riaggiunti, per le quali vale il teorema di classificazione. Quindi in tutta la trattazione tutte le superfici saranno sempre univocamente determinate a meno di omeomorfismo dalla tripla (g, b, n). Denoteremo con $S_{g,n}$ la superficie di genere g con n punti rimossi e senza componenti di bordo. Al posto di $S_{g,0}$ scriveremo più semplicemente S_g. In questo contesto la caratteristica di Eulero-Poincarè della superficie si calcola facilmente:

$$\chi(S) = 2 - 2g - (b + n). \tag{1.1}$$

Occasionalmente risulterà comodo pensare ai punti tolti come a punti marcati. Invece che toglierli effettivamente dalla superficie li distingueremo semplicemente dagli altri punti. Punti marcati e punti tolti portano le stesse informazioni topologiche dunque potremo passare a piacimento dagli uni agli altri.

1.2 Curve

Una curva chiusa in S è una mappa continua $S^1 \to S$. Spesso con leggero abuso di notazione identificheremo un curva con la sua immagine in S. Una curva chiusa è detta semplice se è iniettiva. In tutta la trattazione che seguirà la parola curva denoterà sempre una curva chiusa semplice, che potremo sempre supporre liscia a meno di omotopia.

Definizione 1.2. Una curva è detta essenziale se non è omotopa a un punto, a un punto tolto o a una componente di bordo.

Una curva è omotopa a un punto tolto se nella superficie con il punto riaggiunto è omotopa al punto in questione.

Numeri di intersezione

Due curve sono dette trasversali se sono regolari e in ogni punto della loro intersezione i due vettori tangenti sono linearmente indipendenti. Ci sono due modi per contare il numero di intersezioni tra due curve trasversali: con segno o senza segno.

Definizione 1.3 (intersezione algebrica)**.** Date due curve trasversali e orientate α e β, l'intersezione algebrica tra le due curve (denotata con $\hat{\imath}(\alpha, \beta)$) è definita come la somma degli indici dei punti di intersezione di α e β. Diciamo che un punto di intersezione ha indice $+1$ se l'orientazione dell'intersezione è concorde con quella della superficie, mentre ha indice -1 altrimenti. Notiamo che $\hat{\imath}(\alpha, \beta)$

dipende solo dalla classe di omotopia libera delle due curve e dunque ha senso definire $\hat{\imath}(a, b)$ con a e b classi di omotopia libera di α e β.

Definizione 1.4 (intersezione geometrica)**.** Date due classi di omotopia libera a e b di curve, definiamo la loro intersezione geometrica come:

$$i(a, b) = \min\{|\alpha \cap \beta| : \alpha \in a, \beta \in b\}.$$

Con leggero abuso di notazione a volte scriveremo $i(\alpha, \beta)$ per l'intersezione geometrica tra le classi di α e β. Quando α e β si intersecano un numero di volte pari all'intersezione geometrica fra le due classi si dicono in posizione minimale. Esiste un comodo criterio per determinare quando due curve sono in posizione minimale.

Definizione 1.5 (bigono)**.** Due curve trasversali α e β in S formano un bigono se esiste un embedding di un disco in S (il bigono), il cui bordo è l'unione di un arco di α e di un arco di β i quali si intersecano esattamente in due punti distinti della superficie.

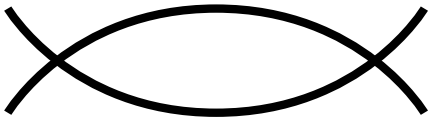


Figura 1.2: Bigono.

Proposizione 1.6. due curve trasversali sono in posizione minimale se e solo se non formano alcun bigono.

Osservazione 1.7. Notiamo immediatamente che due curve che si intersecano esattamente in un punto sono in posizione minimale (infatti un bigono necessita di almeno due punti di intersezione).

Omotopia ed isotopia per curve

Due curve α e β sono isotope se esiste un'omotopia

$$H : S^1 \times [0, 1] \to S$$

da α in β con la proprietà che la curva chiusa $H(S^1 \times \{t\})$ è semplice $\forall t \in [0, 1]$. Durante la nostra trattazione sarà spesso utile pensare a classi di isotopia piuttosto che a classi di omotopia. In questo contesto risulta utile il seguente risultato.

Proposizione 1.8. Due curve essenziali α e β sono omotope se e solo se sono isotope.

Data un'isotopia tra due curve, spesso sarà molto utile promuoverla a un'isotopia dell'intera superficie, che chiameremo un'isotopia ambiente di S.

Proposizione 1.9. Sia S una superficie, $\alpha : S^1 \to S$ e $\beta : S^1 \to S$ due curve. Se $F : S^1 \times I \to S$ è un'isotopia liscia tra α (al tempo zero) e β (al tempo 1), allora esiste un'isotopia $H : S \times I \to S$ che al tempo zero è l'identità di S mentre $H(\alpha(x), t) = F(x, t) \forall t \in I$ e $\forall x \in S^1$.

Archi

Nel parlare di archi su una superficie, è più conveniente pensare ai punti tolti come a punti marcati. Dunque sia S una superficie compatta, eventualmente con bordo e un numero finito di punti marcati nell'interno. Denotiamo l'insieme dei punti marcati con P.

Definizione 1.10 (arco)**.** Un arco proprio in S è una mappa $\alpha : [0, 1] \to S$ tale che $\alpha^{-1}(P \cup \partial S) = \{0, 1\}$.

Come con le curve spesso identificheremo un arco con la sua immagine. Un arco è semplice se è un embedding nella sua parte interna. Quando considereremo la classe di omotopia di un arco, i punti in ∂S dell'arco non potranno mai muoversi dalla componente di bordo in cui giacciono. C'è però ancora una scelta da poter fare, un'omotopia (o un'isotopia) tra archi è detta relativa al bordo se gli estremi dell'arco rimangono fissi durante l'omotopia. Otteniamo così due possibili definizioni di classe di omotopia di un arco, a seconda che sia possibile o meno spostare i punti sul bordo. Sarà chiaro in ogni contesto quale delle due definizioni stiamo adottando. Molti risultati e definizioni per curve valgono anche per gli archi con leggere modifiche.

1.3 Principio di cambio delle coordinate

La tecnica che va sotto il nome di principio di cambio delle coordinate, è una tecnica base di uso molto comune nella teoria del mapping class group. l'utilizzo più frequente che ne faremo noi sarà il seguente: per dimostrare fatti topologici per una generica curva, li dimostreremo solo per una curva particolare a nostro piacimento.

Introduciamo prima un concetto essenziale. Data una curva α in una superficie S, la superficie ottenuta tagliando S lungo α è la superficie S_α così definita:

- esiste un omeomorfismo h tra due sue componenti di bordo, tale che il quoziente $S_\alpha/(x \sim h(x))$ è omeomorfo a S.
- l'immagine nel quoziente di queste due componenti di bordo è proprio la curva α.

La procedura di taglio può essere fatta anche sugli archi propri, ed è conveniente assumere sempre che le curve lungo le quali si taglia siano lisce.

Definizione 1.11. (non separante) Una curva α è detta non separante quando la superficie tagliata S_α è connessa.

Lemma 1.12. Se α e β sono due curve non separanti in S, allora esiste un omeomorfismo $\phi : S \to S$ tale che $\phi(\alpha) = \beta$.

Dimostrazione. Questo lemma segue direttamente dal teorema di classificazione delle superfici. Le due superfici tagliate S_α e S_β hanno entrambe due componenti di bordo in più e lo stesso numero di punti tolti di S. Durante il procedimento di taglio inoltre la caratteristica di Eulero varia allo stesso modo per entrambe le superfici. Scegliamo infatti una triangolazione della superficie S, in cui la curva α risulta unione di k lati e k vertici della triangolazione. Tagliando lungo α otteniamo così una triangolazione per S_α con stesso numero di facce, k vertici in più e k lati in più. S_α risulta così avere la stessa caratteristica di Eulero di S. Lo stesso ragionamento vale anche per S_β. E dunque per la formula (1.1) S_α ed S_β hanno anche stesso genere e sono dunque omeomorfe. Possiamo scegliere l'omeomorfismo in modo che rispetti la relazione di equivalenza sulle componenti di bordo di S_α ed S_β. Un tale omeomorfismo dà per passaggio al quoziente il desiderato omeomorfismo di S che porta α in β. Se inoltre vogliamo che l'omeomorfismo rispetti l'orientazione della superficie, possiamo in caso comporre con un omeomorfismo che inverte l'orientazione e che tiene fissa β, che esiste sicuramente in quanto β è non separante. □

In altre parole a meno di omeomorfismo c'è soltanto una sola curva non separante in S. Analogamente una curva β è detta separante se la superficie tagliata S_β non è più connessa. È chiaro che il precedente argomento sulle curve non separanti si può applicare allo stesso modo anche alle curve separanti, infatti nella dimostrazione si utilizza soltanto che le superfici tagliate dalle due curve sono omeomorfe. Otteniamo dunque una classificazione generale delle curve su una superficie.

Lemma 1.13 (classificazione delle curve)**.** Esiste un omeomorfismo di S che preserva l'orientazione di S e che porta una curva in un'altra se e solo se le rispettive superfici tagliate (possibilmente sconnesse) sono omeomorfe.

Chiaramente l'esistenza di un tale omeomorfismo è una relazione di equivalenza. La classe di equivalenza di una curva è detta il suo tipo topologico.

Come un'applicazione lineare su uno spazio vettoriale è capita al meglio guardando l'azione sui vettori di una base dello spazio, così gli omeomorfismi di una superficie sono capiti al meglio guardando la loro azione sulle curve. Risulta quindi chiara la necessità di introdurre un analogo per superfici di uno strumento potente quale il cambiamento di base per gli spazi vettoriali. Questo analogo è proprio il principio di cambio delle coordinate. In modo un po' rozzo il principio di cambio delle coordinate afferma semplicemente che date due qualsiasi collezioni di curve con lo stesso pattern di intersezione, esiste un omeomorfismo che preserva l'orientazione e che porta una collezione nell'altra. In questo modo una configurazione arbitraria di curve può essere trasformata in una configurazione standard. La classificazione delle curve su una superficie che

abbiamo appena visto è l'esempio più semplice di questo principio. È importante tenere sempre a mente che tutto è fondato sul teorema di classificazione delle superfici e che quindi tutto deve potersi tradurre in termini di topologia delle superfici tagliate dalle curve. Vediamo un altro esempio di questo principio che sarà importante nel seguito.

Lemma 1.14. Date due coppie di curve trasversali (α, β) e (γ, δ) tali che $|\alpha \cap \beta| = 1$ e $|\gamma \cap \delta| = 1$ esiste sempre un omeomorfismo che preserva l'orientazione e che porta ordinatamente α in γ e β in δ.

Dimostrazione. Procediamo esattamente come nella dimostrazione del Lemma 1.12. La superficie S_α è necessariamente connessa. Infatti dette α_1 e α_2 le due componenti di bordo nate con il taglio lungo α, l'immagine di β in S_α è un arco proprio che connette queste due componenti di bordo. Nuovamente possiamo tagliare S_α lungo quest'arco per ottenere una superficie $S_{\alpha\beta}$. Come mostrato in Figura 1.3, quest'ultima ha esattamente lo stesso numero di punti tolti rispetto ad S e una componente di bordo in più, naturalmente suddivisa in 4 archi: α_1, β_1, α_2 e β_2, due provenienti dal taglio lungo α e due provenienti dal taglio lungo β. Esattamente come nella dimostrazione del Lemma 1.12 possiamo

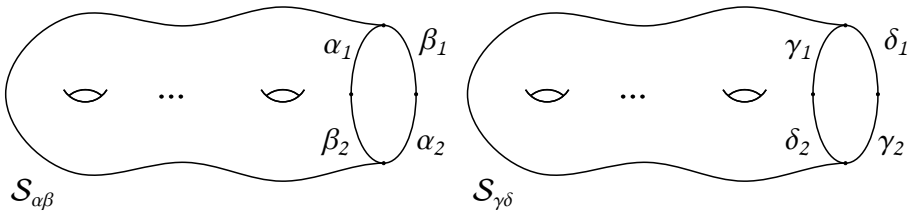


Figura 1.3: Le due superfici $S_{\alpha\beta}$ e $S_{\gamma\delta}$

scegliere una triangolazione di S in modo che l'intersezione tra α e β sia un vertice della triangolazione e che α e β risultino unione di lati e vertici della triangolazione. In questo modo la triangolazione scelta induce una triangolazione su $S_{\alpha\beta}$. Tagliando lungo α la caratteristica di Eulero non cambia come già visto, e se β viene ricoperta con k lati della triangolazione, si vede facilmente che tagliando lungo β si ottiene lo stesso numero di facce, k lati in più e $k+1$ vertici in più. Dunque $\chi(S_{\alpha\beta}) = \chi(S) + 1$. Facendo lo stesso con la coppia (γ, δ) otteniamo che $S_{\alpha\beta}$ e $S_{\gamma\delta}$ sono omeomorfe, e l'omeomorfismo può essere scelto in modo che i quattro archi sulla componente di bordo in più α_1, β_1, α_2 e β_2, finiscano ordinatamente nei quattro archi γ_1, δ_1, γ_2 e δ_2. Un tale omeomorfismo dà per passaggio al quoziente il desiderato omeomorfismo che porta α in γ e β in δ. $\square$

Capitolo 2

Mapping Class Group

Avendo fissato alcuni concetti base dell teoria di curve e superfici, siamo ora in grado di introdurre l'oggetto principale di questa tesi: il mapping class group di una superficie. Questo gruppo riveste un ruolo fondamentale nello studio delle superfici, e in questo capitolo metteremo in luce alcuni dei suoi aspetti più rilevanti. Seguiranno alcuni esempi espliciti di calcolo dei mapping class groups più semplici. Definiremo poi i Dehn twists e ne ricaveremo alcune proprietà che risulteranno essenziale nei capitoli successivi.

2.1 Definizione e primi esempi

Sia $\mathrm{Homeo}^+(S, \partial S)$ il gruppo degli omeomorfismi della superficie S che preservano l'orientazione di S e che sono l'identità sul bordo di S. In questo gruppo introduciamo la relazione di equivalenza isotopica: $f \sim g$ se e solo se esiste un'isotopia $F : S \times [0,1] \to S$ tale che:

1. $F|_{S\times\{0\}} = f$, $F|_{S\times\{1\}} = g$;
2. ad ogni tempo dell'isotopia, F è l'identità su ∂S (Si dice che F è relativa a ∂S).

Definizione 2.1 (mapping class group)**.** $\mathrm{Mod}\,(S) = \mathrm{Homeo}^+\,(S, \partial S)/_{\sim}$.

Definizioni alternative. Per rendere più chiara la struttura di gruppo del quoziente considerato è immediato verificare che detto $\mathrm{Homeo}_0(S, \partial S)$ il sottogruppo di $\mathrm{Homeo}^+(S, \partial S)$ degli elementi che sono isotopi all'identità, risulta:

$$\mathrm{Mod}\,(S) = \mathrm{Homeo}^+(S, \partial S)/_{\mathrm{Homeo}_0(S, \partial S)}.$$

Ci sono molte altre possibili varianti nella definizione del mapping class group. Per esempio si potevano considerare diffeomorfismi al posto di omeomorfismi (sempre che preservano l'orientazione), e classi di omotopia al posto di classi di isotopia (con comunque la condizione di essere l'identità

sul bordo ad ogni tempo). Grazie a due teoremi classici di topologia delle superfici tutte queste varie definizioni danno origine allo stesso gruppo. Un elemento generico del mapping class group è detto mapping class.

Teorema 2.2. f e g in $\mathrm{Homeo}^+(S, \partial S)$ sono omotope relativamente al bordo di S se e soltanto se sono isotope relativamente al bordo di S.

Teorema 2.3. Sia S una superficie. Ogni omeomorfismo di S è isotopo a un diffeomorfismo di S.

In tutto il resto della trattazione dunque passeremo arbitrariamente dal setting continuo e quello liscio e viceversa. Inoltre tutte le isotopie e le omotopie considerate saranno sempre relative al bordo.

Punti marcati e punti tolti. Se S è una superficie con punti tolti, a volte penseremo ad alcuni punti tolti come a punti marcati. In questo contesto $\mathrm{Mod}(S)$ rappresenta il gruppo degli omeomorfismi che mandano l'insieme dei punti marcati in se stesso, a meno di isotopie che mandano sempre punti marcati in punti marcati ad ogni tempo. In questo caso bisognerà porre attenzione nell'usare omotopie al posto di isotopie, perché dovremo sempre richiedere che ad ogni tempo i punti marcati vadano in punti marcati, mentre quelli non marcati vadano in punti non marcati, per avere a tutti gli effetti un'omotopia come se i punti marcati fossero veramente tolti.

Quando $n \geq 2$ se pensiamo ai punti tolti come a punti marcati gli omeomorfismi possono permutare tra loro i punti marcati. Inoltre la permutazione indotta sui punti marcati è la stessa anche per mappe isotope, per continuità delle isotopie. Dunque è ben definita per un elemento del mapping class group la permutazione indotta sull'insieme dei punti marcati.

Definizione 2.4 (pure mapping class group)**.** $\mathrm{PMod}(S)$ è il sottogruppo di $\mathrm{Mod}(S)$ degli elementi che inducono l'identità sull'insieme dei punti marcati.

Calcolo dei mapping class groups più semplici

Denotiamo con D^2 il dico chiuso, e con A l'anello chiuso.

Lemma 2.5 (Lemma di Alexander)**.** $\mathrm{Mod}\left(\mathrm{D}^2\right)$ è banale.

Dimostrazione. Identifichiamo D^2 con il disco chiuso di raggio unitario in $\mathbb{R}^2$. Sia $\phi \in \mathrm{Homeo}^+\left(\mathrm{D}^2, \partial\,\mathrm{D}^2\right)$. Definiamo

$$F(x,t) = \begin{cases} (1-t)\,\phi\left(\frac{x}{1-t}\right) & 0 \leq |x| < 1-t, \\ x & 1-t \leq |x| \leq 1, \end{cases}$$

per $0 \leq t < 1$ e definiamo $F(x,1)$ come l'identità di D^2. F è un'isotopia di ϕ con l'identità. $\square$

Disco con un punto tolto. Osserviamo subito che la stessa dimostrazione funziona anche per il disco con un punto tolto dall'interno, infatti basta prendere l'origine come punto marcato. L'omeomorfismo ϕ considerato manda lo zero nello zero, e lo stesso fa l'isotopia costruita nella dimostrazione, dunque il gruppo è ancora banale.

Sfera e sfera con un punto tolto Ci sono altri due mapping class groups che sono banali, rispettivamente $\mathrm{Mod}\,(S_{0,1})$ e $\mathrm{Mod}\,(S_0)$. Identifichiamo $S_{0,1}$ con $\mathbb{R}^2$. Ogni $\phi \in \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$ è omotopo all'identità attraverso l'omotopia classica:

$$F(x,t) = tx + (1-t)\phi(x)$$

che d'ora in poi chiameremo per semplicità Omotopia breve. Per S_0 ogni omeomorfismo si può comporre con una rotazione della sfera (isotopa all'identità) in modo da avere un punto fisso, e poi applicare la dimostrazione per il caso di $S_{0,1}$.

Proposizione 2.6. $\mathrm{Mod}\,(A) \cong \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Costruiamo esplicitamente un isomorfismo $\rho : \mathrm{Mod}\,(A) \to \mathbb{Z}$. Siano $f \in \mathrm{Mod}\,(A)$ e $\phi \in f$ un suo rappresentante. Il rivestimento universale di A è la striscia infinita $\tilde{A} \approx \mathbb{R} \times [0,1]$, e ϕ ha un sollevamento preferito $\tilde{\phi} : \tilde{A} \to \tilde{A}$ che fissa l'origine. Sia $\phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la restrizione di $\tilde{\phi}$ al bordo $\mathbb{R} \times \{1\}$. Poiché ϕ_1 è un sollevamento a $\mathbb{R}$ dell'identità di una componente di bordo di A, risulta essere una traslazione intera. Definiamo $\rho(f) = \phi_1(0)$. Sicuramente ρ è ben definita, infatti se ϕ' è un altro rappresentante di f, esiste un'isotopia F tra ϕ e ϕ' che è l'identità sul bordo dell'anello ad ogni tempo. Una tale F si solleva ad una isotopia $\tilde{F}$ tra $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\phi}'$ che ad ogni tempo se passata al quoziente deve essere l'identità sul bordo. Dunque è chiaro che ad ogni tempo $\tilde{F}$ ristretta a uno qualsiasi dei due bordi di $\mathbb{R} \times [0,1]$ deve agire come una traslazione intera. Per continuità di $\tilde{F}$ dunque la traslazione intera è sempre la stessa per tutti i tempi. In particolare $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\phi}'$ inducono la stessa traslazione intera su $\mathbb{R} \times \{1\}$. É chiaro inoltre che così definita ρ è un omomorfismo su $\mathbb{Z}$, poiché una composizione di mappe di A viene mandata in una composizione di traslazioni intere di $\mathbb{R}$.

Mostriamo che ρ è suriettiva. Per farlo consideriamo la trasformazione lineare di $\mathbb{R}^2$ data dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e restringiamola alla striscia $\mathbb{R} \times [0,1]$, la matrice induce un omeomorfismo ψ di $\tilde{A}$ in sé. Siano $p : \tilde{A} \to A$ il morfismo di rivestimento, e G il gruppo degli automorfismi di rivestimento. Poiché gli automorfismi di rivestimento sono le traslazioni intere della striscia $\mathbb{R} \times [0,1]$, G è isomorfo a $\mathbb{Z}$. È immediato verificare che ψ è equivariante rispetto a G, ovvero che $\forall \tau \in G$, $\psi \circ \tau = \tau \circ \psi$. Dunque ψ induce un omeomorfismo ϕ di A in sé che ne preserva l'orientazione. Infatti sia $x \in A$ e $x_1 \in p^{-1}(x)$ un suo sollevamento ad $\tilde{A}$, allora definiamo $\phi(x) = p \circ \psi(x_1)$. Vediamo che è ben definito: sia $x_2 \in p^{-1}(x)$ un altro sollevamento. Il rivestimento

$p : \tilde{A} \to A$ è regolare, quindi G agisce transitivamente sulle fibre di p. Esiste dunque $\tau \in G$ tale che $\tau(x_2) = x_1$, ed essendo ψ equivariante rispetto a G si ha $\tau \circ \psi(x_2) = \psi \circ \tau(x_2) = \psi(x_1)$, che implica $p \circ \psi(x_2) = p \circ \psi(x_1)$. Essendo n generico e $\rho([\phi]) = n$, la surgettività è dimostrata.

Resta da dimostrare che ρ è iniettiva. Siano $f \in \mathrm{Mod}(A)$ e $\phi \in f$ un suo rappresentante. Sia $\tilde{\phi}$ il sollevamento preferito di ϕ. Se $\rho(f) = 0$, allora $\tilde{\phi}$ è l'identità su $\partial\tilde{A}$. Notiamo subito che $\tilde{\phi}$ è equivariante rispetto al gruppo degli automorfismi di rivestimento G. Dunque fissato $t \in [0, 1]$, l'Omotopia breve $\tilde{F}$ tra $\tilde{\phi}$ e l'identità di $\tilde{A}$ è equivariante rispetto a G. Inoltre poiché $\tilde{\phi}$ è l'identità su $\partial\tilde{A}$, ad ogni tempo $\tilde{F}$ agisce come l'identità su $\partial\tilde{A}$. L'equivarianza fa passare $\tilde{F}$ al quoziente, definendo un'omotopia F tra ϕ e l'identità dell'anello, che ad ogni tempo se ristretta al bordo dell'anello agisce come l'identità, poiché $\tilde{F}$ agisce come l'identità su $\partial\tilde{A}$. □

Definizione 2.7. Per una superficie S con soli punti marcati, diciamo che una collezione $\{\gamma_i\}$ di curve e archi riempie S, se la superficie ottenuta da S tagliando lungo tutti i γ_i è unione di dischi e dischi con un punto marcato.

Proposizione 2.8 (metodo di Alexander)**.** Siano S una superficie compatta, possibilmente con punti marcati, e $\phi \in \mathrm{Homeo}^+(S, \partial S)$. Siano $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ una collezione di curve essenziali e archi propri in S con le seguenti proprietà:

1. I γ_i sono a due a due in posizione minimale;
2. I γ_i sono a due a due non isotopi;
3. Presi comunque tre elementi distinti γ_i, γ_j, γ_k, ve ne sono almeno due che non si intersecano.

(1) Se esiste una permutazione σ di $\{1, \ldots, n\}$ tale che $\forall i$, $\phi(\gamma_i)$ è isotopo a $\gamma_{\sigma(i)}$, allora $\phi(\cup\gamma_i)$ è isotopo a $\cup\gamma_i$.

(2) Considerando $\cup\gamma_i$ come un grafo Γ con vertici nei punti di intersezione e negli estremi degli archi, la composizione di ϕ con l'isotopia del punto (1) dà un automorfismo ϕ_* di Γ. Se in aggiunta $\{\gamma_i\}$ riempiono S allora ϕ ha una potenza isotopa all'identità. Nel caso in cui ϕ_* fissi ciascun vertice e ciascun lato di Γ rispettandone l'orientazione, ϕ stessa è isotopa all'identità.

Omettiamo la dimostrazione di questa proposizione, si veda ad esempio [1] per una facile dimostrazione di questo fatto.

Proposizione 2.9. Siano P_1 e P_2 due punti marcati distinti in $S_{0,3}$, due archi propri essenziali entrambi con estremi uno in P_1 e l'altro in P_2 sono isotopi.

Dimostrazione. Siano α e β due archi propri essenziali che iniziano in P_1 e finiscono in P_2. Modifichiamo α tramite isotopia in modo che sia trasversale a β, e pensiamo al terzo punto marcato di $S_{0,3}$ come al punto all'infinito. Con questa interpretazione possiamo pensare α e β come archi nel piano. Se α e β non sono disgiunti per il teorema della curva di Jordan possiamo trovare un embedding di un disco bordato da un arco di α e un arco di β. Spostando α

tramite isotopia attraverso il disco, possiamo ridurre le intersezioni di α e β fino a quando non hanno le parti interne disgiunte. A questo punto tagliamo $S_{0,3}$ lungo $\alpha \cup \beta$. Grazie alla classificazione delle superfici, la superficie che ne risulta è l'unione disgiunta di un disco e di un disco con un punto marcato. Bordando l'embedding di un disco in $S_{0,3}$, α e β risultano isotopi. □

Proposizione 2.10. $\mathrm{PMod}\,(S_{0,2})$ e $\mathrm{PMod}\,(S_{0,3})$ sono banali.

Dimostrazione. Sia γ un arco proprio essenziale di $S_{0,3}$ che collega due punti marcati distinti. L'arco γ riempie $S_{0,3}$ e dunque verifica banalmente le tre ipotesi del metodo di Alexander essendo l'unico arco della collezione. Consideriamo $\phi \in f \in \mathrm{PMod}\,(S_{0,3})$: ϕ fissa gli estremi di γ, dunque per la Proposizione 2.9 $\phi(\gamma)$ è isotopo a γ, e componendo ϕ con tale isotopia otteniamo che γ è fissato con orientazione poiché gli estremi sono fissati. Per la Proposizione 2.8 ϕ è isotopo all'identità. La dimostrazione per $S_{0,2}$ é del tutto analoga, poiché anche in questo caso due qualsiasi archi propri essenziali in $S_{0,2}$ con gli stessi punti d'arrivo distinti sono isotopi. □

Corollario 2.11. Se Σ_n denota il gruppo delle permutazioni di n elementi, allora la mappa naturale

$$\mathrm{Mod}\,(S_{0,3}) \to \Sigma_3$$

data dall'azione di $\mathrm{Mod}\,(S_{0,3})$ sull'insieme dei tre punti marcati è un isomorfismo. Analogamente $\mathrm{Mod}\,(S_{0,2}) \cong \Sigma_2$.

2.2 Dehn Twists

I Dehn twists sono particolari mapping class, e sono in un certo senso gli elementi più semplici del mapping class group, in quanto hanno rappresentanti col supporto più piccolo possibile.

Definizione di Dehn twist

Per arrivare alla definizione di Dehn twist consideriamo prima l'anello $A = S^1 \times [0,1]$. Per orientarlo costruiamo un embedding nel piano tramite la mappa $(\theta, t) \to (\theta, t+1)$ (utilizziamo le coordinate cilindriche nel piano con prima componente l'angolo e seconda componente il raggio) e prendiamo l'orientazione indotta dall'orientazione standard del piano.

Sia $T : A \to A$ il twist sinistro dell'anello A dato da:

$$T(\theta, t) = (\theta + 2\pi t, t).$$

La mappa T è un omeomorfismo dell'anello che preserva l'orientazione ed è l'identità sul bordo, proprio come mostrato in Figura 2.1. Mettendo $\theta - 2\pi t$ al posto di $\theta + 2\pi t$ si ottiene la definizione di twist destro.

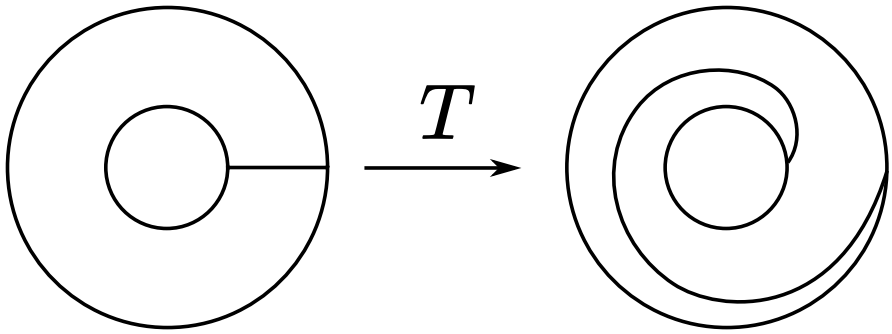


Figura 2.1: Dehn twist sinistro

Definizione 2.12 (Dehn twist)**.** Siano S una superficie e α una curva in S. Sia N un intorno chiuso regolare di α omeomorfo all'anello A tramite un omeomorfismo $\phi : A \to N$ che preserva l'orientazione. Allora otteniamo un omeomorfismo $T_\alpha : S \to S$ chiamato Dehn twist relativo a α definito nel modo seguente:

$$T_\alpha(x) = \begin{cases} \phi \circ T \circ \phi^{-1}(x) & \text{se } x \in N, \\ x & \text{se } x \in S \setminus N \end{cases}.$$

Visto semplicemente come omeomorfismo, il Dehn twist T_α dipende strettamente dalla scelta di N e dalla scelta di ϕ. La sua classe nel mapping class group invece non dipende da nessuna di queste scelte, anzi dipende solo dalla classe di isotopia di α. Dunque è ben definito come elemento del mapping class group il Dehn twist della classe a di α, denotato sempre con T_a. Una volta fissata un'orientazione di S, la direzione del Dehn twist T_a non dipende in alcun modo dalla scelta di un'orientazione su a. Questo perché ruotare a sinistra è una nozione ben definita su una superficie orientata. L'inverso di T_a è semplicemente il twist nell'altra direzione.

Osservazione 2.13. Osserviamo subito che nell'isomorfismo della Proposizione 2.6, il Dehn twist relativo al cuore dell'anello corrisponde al valore -1, che è un generatore di $\mathbb{Z}$. Dunque il Dehn twist lungo il cuore dell'anello genera il mapping class group dell'anello.

Metodo di risoluzione delle intersezioni. Quando $i(a, b)$ è grande, può risultare difficoltoso disegnare un rappresentante di $T_a(b)$. Una regola facile per disegnare $T_a(b)$ è la seguente. Si inizia con una curva β nella classe b e $i(a, b)$ curve parallele α_i, tutte nella classe a, ciascuna in posizione minimale rispetto a β. Dopodiché per ciascuna intersezione di β con una delle curve α_i si risolve l'intersezione. L'incrocio viene sostituito con due archi disgiunti come in Figura 2.2

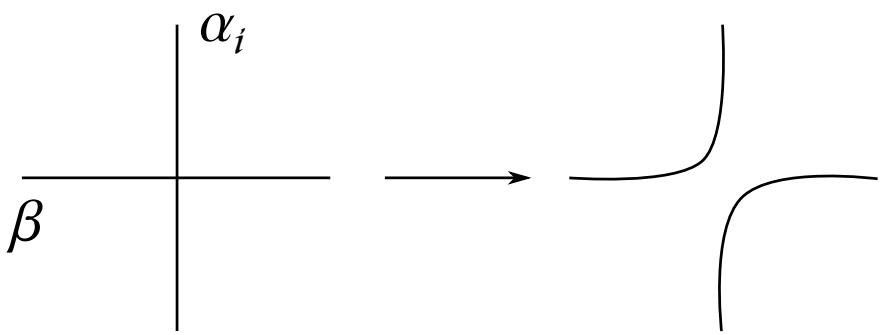


Figura 2.2: Risoluzione di un incrocio

in modo che seguendo un arco di β attraverso l'intersezione risolta, l'arco gira a sinistra all'intersezione. Risolvendo tutti gli incroci si ottiene un'unica curva che è un rappresentante per la classe di $T_a(b)$.

Proprietà essenziali dei Dehn twists

Proposizione 2.14. Siano a e b due classi di isotopia di curve essenziali e k un intero, allora

$$i\left(T_a^k(b), b\right) = |k|\, i\,(a,b)^2\,.$$

Corollario 2.15. I Dehn twists relativi alle curve essenziali hanno ordine infinito.

Dimostrazione. Data a essenziale, grazie al principio di cambio delle coordinate esiste b con $i\,(a,b) \neq 0$. Se $T_a^k = \mathrm{Id}$ allora $T_a^k(b) = b$, dunque

$$0 = i\,(b,b) = i\left(T_a^k(b), b\right) = |k|\, i\,(a,b)^2\,.$$

Che è soddisfatta solo per $k = 0$. □

Lemma 2.16. Una curva è omotopa a un punto o a un punto tolto se e solo se il Dehn twist relativo è banale nel mapping class group.

Dimostrazione. Vediamo i vari casi:

1. La classe a ha rappresentanti omotopi a un punto o a un punto tolto. T_a è banale, infatti T_a ha un rappresentante interamente supportato in un disco o in un disco con un punto tolto. Per il Lemma di Alexander esiste dunque un'isotopia con l'identità.

2. La classe a è essenziale. Grazie al Corollario 2.15 il Dehn twist è non banale in quanto ha addirittura ordine infinito.

3. La classe a ha rappresentanti omotopi a una componente di bordo ma non a un punto o a un punto tolto. Consideriamo il doppio della superficie S,

ovvero la superficie S' ottenuta da due copie disgiunte di S identificando le rispettive componenti di bordo tramite l'identità. Se T_a fosse banale in S lo sarebbe anche in S'. In S' a risulta essere essenziale in quanto non è omotopa né a un punto, né a un punto tolto e S' non ha componenti di bordo. Cio è assurdo per il punto 2.

□

Lemma 2.17 (prime relazioni tra Dehn twists)**.** Siano a e b classi di curve essenziali in S, e $f \in \mathrm{Mod}\,(S)$. Allora valgono le seguenti:

1. $T_a = T_b \Leftrightarrow a = b$;
2. $T_{f(a)} = fT_af^{-1}$;
3. f commuta con $T_a \Leftrightarrow f(a) = a$;
4. $i\,(a, b) = 0 \Leftrightarrow T_a(b) = b \Leftrightarrow T_aT_b = T_bT_a$.

Dimostrazione. 1. Un'implicazione è semplicemente la buona definizione di Dehn twist rispetto a una classe di isotopia. Dimostriamo l'altra, sia $a \neq b$, vogliamo vedere che $T_a \neq T_b$. Sia c una classe di curva essenziale in S tale che $i\,(a, c) = 0$ e $i\,(b, c) \neq 0$. Ci sono due casi: se $i\,(a, b) \neq 0$ prendiamo $c = b$, altrimenti grazie al principio di cambio delle coordinate troviamo facilmente c. Una volta trovata c con queste proprietà applichiamo la Proposizione 2.14:

$$i\,(T_a(c), c) = i\,(a, c)^2 = 0 \neq i\,(b, c)^2 = i\,(T_b(c), c)\,.$$

Segue necessariamente che $T_a(c) \neq T_b(c)$ e dunque $T_a \neq T_b$.

2. Verifica diretta. Siano ϕ, α e ψ rappresentanti rispettivamente di f, a e T_a. Allora ϕ^{-1} porta un intorno chiuso regolare di $\phi(\alpha)$ in un intorno chiuso regolare di α. Dopodiché ψ opera un twist in un intorno di α e ϕ riporta tutto nell'intorno di $\phi(\alpha)$. Il risultato è un Dehn twist relativo a $\phi(\alpha)$.
3. Osserviamo che $fT_a = T_af \Leftrightarrow fT_af^{-1} = T_a \Leftrightarrow T_{f(a)} = T_a \Leftrightarrow f(a) = a$.
4. L'unica implicazione non ancora vista è che la seconda condizione implica la prima. Ma se $T_a(b) = b$ allora $i\,(T_a(b), b) = i\,(b, b) = 0$. Ma $i\,(T_a(b), b) = i\,(a, b)^2$ dunque $i\,(a, b) = 0$.

□

Corollario 2.18 (potenze di Dehn twists)**.** Sono immediate le seguenti generalizzazioni delle relazioni del Lemma 2.17.

1. $T_a^j = T_b^k \Leftrightarrow a = b$ e $j = k$;
2. $T_{f(a)}^j = fT_a^jf^{-1}$;
3. f commuta con $T_a^j \Leftrightarrow f(a) = a$;

4. $i(a,b) = 0 \Leftrightarrow T_a(b) = b \Leftrightarrow T_a^j T_b^k = T_b^k T_a^j$.

Proposizione 2.19. Siano a e b classi di isotopia con $i(a,b) = 1$, allora $T_a T_b(a) = b$.

Dimostrazione. Grazie al principio di cambio delle coordinate basta verificare la tesi per una qualsiasi coppia di classi a e b con $i(a,b) = 1$. La verifica è mostrata in Figura 2.3 dove α e β sono due rappresentanti di a e b rispettivamente. □

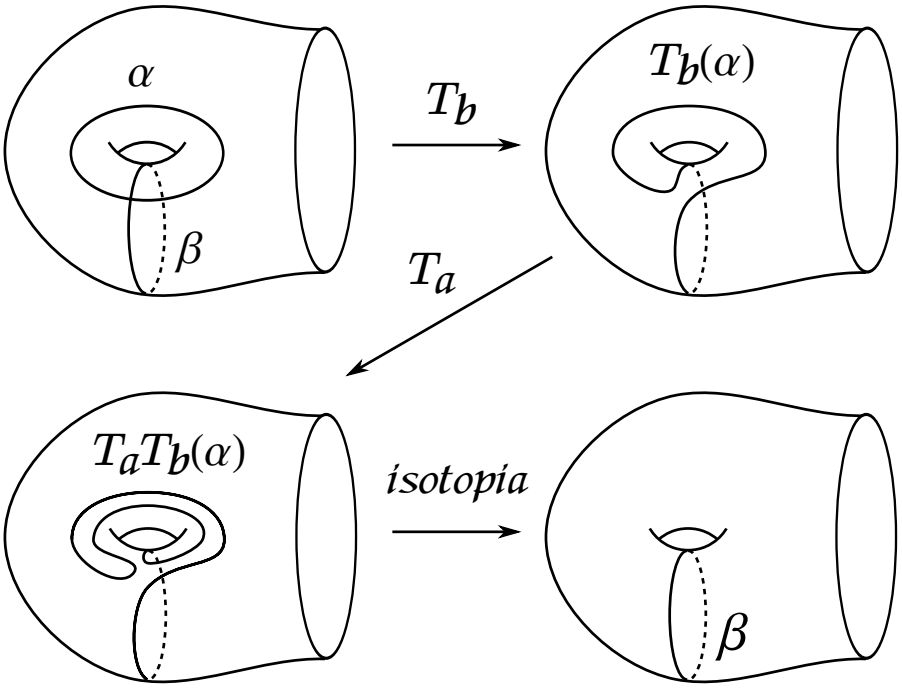


Figura 2.3: Dimostrazione della Proposizione 2.19

2.3 Half-twists

Dalla definizione di Dehn twist emerge spontaneamente la limitazione principale di questi mapping class, essi infatti non possono in alcun modo permutare tra loro i punti marcati della superficie. È quindi chiaro che per descrivere il mapping class group di superfici con più di due punti marcati non bastano i Dehn twists. Nel cercare mapping class che inducano permutazioni non banali sull'insieme dei punti marcati, cercheremo come prima cosa classi che inducano le permutazioni più semplici possibili, ovvero le trasposizioni. Questo è proprio il caso degli half-twists, che analogamente ai Dehn twists necessitano prima di una definizione di half-twist relativo al disco unitario.

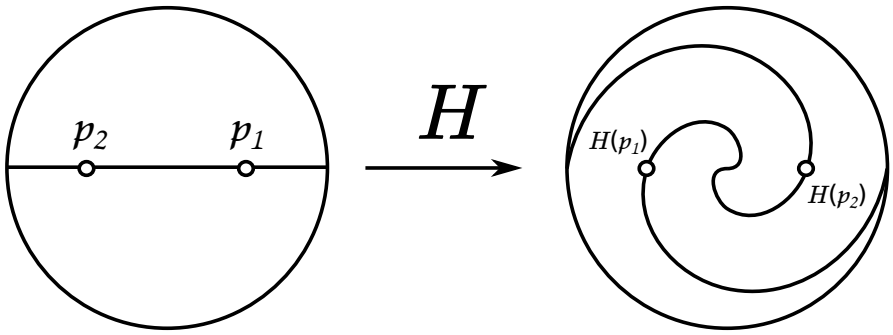


Figura 2.4: Half-twist

Sia dunque D la superficie ottenuta dal disco unitario in $\mathbb{R}^2$ (coordinate polari (r, θ) con $r \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$) marcando due punti $p_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $p_2 = \left(\frac{1}{2}, \pi\right)$ nella sua parte interna.

Sia $H : D \to D$ l'half-twist del disco D dato da:

$$H(r, \theta) = (r, \theta + 2\pi r).$$

La mappa H è un omeomorfismo di D in sé che preserva l'orientazione, è l'identità sul bordo e scambia tra loro i due punti marcati p_1 e p_2, come mostrato in Figura 2.4.

Definizione 2.20 (half-twist)**.** Siano S una superficie con almeno due punti marcati e p_1, p_2 due suoi punti marcati. Sia N un intorno chiuso sia di p_1 che di p_2, omeomorfo al disco D con due punti marcati, tramite un omeomorfismo $\phi : D \to N$ che preserva l'orientazione. Allora otteniamo un omeomorfismo $H_{(p_1,p_2)} : S \to S$ definito nel modo seguente:

$$H_{(p_1,p_2)}(x) = \begin{cases} \phi \circ H \circ \phi^{-1}(x) & \text{se } x \in N, \\ x & \text{se } x \in S \setminus N. \end{cases}$$

La classe di isotopia di tale omeomorfismo in $\mathrm{Mod}\,(S)$ è detta half-twist dei punti p_1 e p_2. Sull'insieme dei punti marcati induce la trasposizione che scambia tra loro p_1 e p_2.

2.4 Il caso del toro

Curve nel toro

Possiamo classificare l'insieme delle classi di omotopia di curve nel toro T^2 nel seguente modo. Sia $\mathbb{R}^2 \to T^2$ l'usuale morfismo di rivestimento, dove il gruppo degli automorfismi di rivestimento è generato dalle traslazioni per i

vettori $e_1 = (1,0)$ ed $e_2 = (0,1)$. Sappiamo che $\pi_1\left(T^2\right) \cong \mathbb{Z}^2$. Fissiamo come punto base l'origine. Possiamo ottenere un rappresentante dell'elemento (p,q) prendendo il segmento che in $\mathbb{R}^2$ congiunge $(0,0)$ con (p,q) e proiettandolo poi su T^2. Prendendo una qualsiasi curva orientata in T^2 possiamo tramite omotopia fare in modo che passi per l'origine. Un qualsiasi sollevamento a $\mathbb{R}^2$ di questa curva è rappresentato da un cammino congiungente l'origine a un punto (p,q) di $\mathbb{Z}^2$ con p e q coprimi (se così non fosse la curva non potrebbe essere semplice), e dunque possiamo tramite omotopia ottenere il rappresentante standard della classe (p,q). Le curve nel toro sono dunque in corrispondenza biunivoca con gli elementi primitivi di $\mathbb{Z}^2$ (coppie (p,q) con p e q coprimi). Inoltre possiamo sempre scegliere un rappresentante nella classe che sia un loop semplice con punto base l'origine.

Numeri di intersezione nel toro. Per due qualsiasi classi di curve (p,q) e (p',q') valgono le seguenti formule per le intersezioni:

$$\hat{\imath}\left((p,q),(p',q')\right) = pq' - p'q, \tag{2.1}$$

$$i\left((p,q),(p',q')\right) = |pq' - p'q|. \tag{2.2}$$

Per verificarle, vanno prima dimostrate nel caso $(p,q) = (1,0)$. Dopodiché basta osservare che se p e q sono coprimi, allora esiste $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ tale che $A(p,q) = (1,0)$. Una tale trasformazione essendo un omeomorfismo che preserva l'orientazione, conserva entrambi i numeri di intersezione.

Mapping class group del toro

Teorema 2.21. L'omomorfismo naturale

$$\sigma : \mathrm{Mod}\left(T^2\right) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$$

dato dall'azione di $\mathrm{Mod}\left(T^2\right)$ su $\pi_1\left(T^2\right) \cong \mathbb{Z}^2$ è un isomorfismo.

Dimostrazione. Sia $\mathbb{R}^2 \to T^2$ l'usuale morfismo di rivestimento. Fissiamo come punto base l'origine e usiamo la classificazione delle curve sul toro. Siano $f \in \mathrm{Mod}\left(T^2\right)$ e $\phi \in f$ un suo rappresentante. A meno di isotopie possiamo supporre che ϕ fissi l'origine. L'omeomorfismo ϕ induce un automorfismo di $\pi_1\left(T^2\right)$ con punto base l'origine, che sarà rappresentato da una matrice $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$. La matrice A ha determinante 1. Infatti se A manda la classe $(1,0)$ in (a,c) e $(0,1)$ in (b,d), poiché ϕ deve preservare l'intersezione algebrica tra le curve, utilizzando la formula (2.1) otteniamo:

$$1 = \hat{\imath}\left((1,0),(0,1)\right) = \hat{\imath}\left((a,c),(b,d)\right) = ad - bc = \det(A).$$

Dunque risulta ben definito l'omomorfismo $\sigma : \mathrm{Mod}\left(T^2\right) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ tale che $\sigma(f) = A$.

Dimostriamo che σ è surgettivo. Sia $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Vista come applicazione di $\mathbb{R}^2$ in sé M è un omeomorfismo lineare del piano che preserva l'orientazione. Sia G il gruppo degli automorfismi di rivestimento, sappiamo che gli elementi di G sono le traslazioni secondo vettori con coordinate intere. Sfruttando la linearità di M abbiamo che $\forall \tau \in G$ esiste $\tau' \in G$ tale che $M \circ \tau = \tau' \circ M$. Questa proprietà è più debole dell'equivarianza, ma è comunque sufficiente per far passare M al quoziente e indurre un omeomorfismo ϕ del toro che preserva l'orientazione. La costruzione di ϕ è del tutto analoga a quella della dimostrazione della Proposizione 2.6. La classe di ϕ viene mandata da σ proprio nella matrice M. Essendo M arbitraria abbiamo dimostrato la surgettività.

Come ultimo passo dimostriamo che σ è iniettivo. Sia dunque $f \in \mathrm{Mod}\left(T^2\right)$ nel nucleo di σ. Scelto $\phi \in f$ un rappresentante che fissa l'origine, scegliamo $\tilde{\phi}$ un sollevamento di ϕ a $\mathbb{R}^2$ che è omeomorfismo di $\mathbb{R}^2$ e tiene fissa l'origine. Essendo f nel nucleo di σ, $\tilde{\phi}$ induce l'identità su $\mathbb{Z}^2$, ed è facile verificare che $\tilde{\phi}$ è equivariante rispetto al gruppo degli automorfismi di rivestimento. Dunque esattamente come nella dimostrazione della Proposizione 2.6, l'Omotopia breve tra $\tilde{\phi}$ e l'identità di $\mathbb{R}^2$ risulta equivariante rispetto a G. Passa dunque al quoziente e fornisce un'omotopia tra ϕ e l'identità del toro. $\square$

Generatori

Lemma 2.22. Il gruppo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ è finitamente generato da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Sia $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, denotiamo con a e b gli elementi della prima riga, e con c e d gli elementi della seconda riga. Osserviamo subito che $ad-bc=1$ implica che $\mathrm{MCD}(a,b)=1$. Moltiplicando a sinistra per A, B o per le loro inverse si possono ottenere tutte le operazioni elementari di colonna: ovvero aggiungere o togliere a una delle due colonne l'altra. Facciamo la divisione con resto tra a e b togliendo alternativamente a una delle due colonne un multiplo dell'altra, fino a quando nella prima riga in una delle due entrate si ottiene 1 o -1. A questo punto facendo un'altra operazione elementare sulle colonne riusciamo a ottenere 0 nell'altra entrata della prima riga. Siccome il determinante si è conservato in tutte le operazioni fatte abbiamo ottenuto una delle seguenti 4 matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c' & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c' & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & d' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & d' \end{pmatrix}.$$

Aggiungendo o togliendo c' o d' volte la colonna con lo zero all'altra otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siccome le prime 3 sono potenze di R è sufficiente mostrare che R si scrive in termini di A e B, ma è facile verificare che $R = A^2B$. $\square$

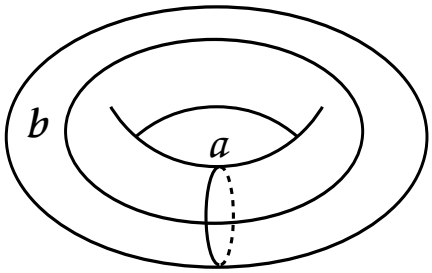


Figura 2.5: I generatori standard del toro

Lemma 2.23. I gruppi $\mathrm{Mod}\left(T^2\right)$ e $\mathrm{Mod}\left(S_{1,1}\right)$ sono finitamente generati dai Dehn twists lungo le due classi di curve $b = (1, 0)$ e $a = (0, 1)$ mostrate in Figura 2.5.

Dimostrazione. È facile verificare che $T_a(b) = (-1, 1)$ e $T_b(a) = (1, 1)$. Dunque nell'isomorfismo σ del Teorema 2.21, T_a e T_b vengono mappati nelle due matrici A e B del Lemma 2.22, e dunque sono un insieme di generatori per $\mathrm{Mod}\left(T^2\right)$.

Tutte le dimostrazioni fatte finora per il toro, valgono con piccole modifiche anche per $S_{1,1}$. In particolare $\mathrm{Mod}\left(S_{1,1}\right) \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Si ripete la dimostrazione del Teorema 2.21, utilizzando il primo gruppo di omologia di $S_{1,1}$ al posto del primo gruppo di omotopia. Vedendo poi a e b come classi di curve in $S_{1,1}$, otteniamo in completa analogia che $\mathrm{Mod}\left(S_{1,1}\right)$ è finitamente generato da T_a e T_b. $\square$

Capitolo 3

Generatori

Abbiamo già visto nel capitolo precedente come nel caso dell'anello e del toro, tutti gli elementi del mapping class group possano essere espressi in termini di un numero finito di Dehn twists relativi a curve particolarmente significative per la superficie. Una domanda sorge ora spontanea, qual'è la situazione per superfici più complesse? È sempre possibile trovare un insieme di generatori per il mapping class group fatto solo di Dehn twists? Per rispondere a queste domande introdurremo due strumenti fondamentali nello studio del mapping class group: i complessi di curve e la Birman exact sequence. Fatto ciò, dopo alcuni lemmi preliminari arriveremo alla dimostrazione del teorema principale della trattazione ovvero che il pure mapping class group è finitamente generato da Dehn twists lungo curve non separanti. La dimostrazione che daremo ci consentirà poi di trovare esplicitamente un insieme di generatori, che verranno costruiti nell'ultima parte del capitolo.

3.1 Complessi di curve

Definizione 3.1. Sia S una superficie. Il complesso delle curve $\mathcal{C}(S)$, definito per la prima volta da Harvey, è un complesso simpliciale 1-dimensionale con le seguenti caratteristiche:

Vertici: c'è un vertice di di $\mathcal{C}(S)$ per ogni classe di isotopia di curve essenziali in S.

Lati: due vertici distinti a e b sono connessi da un lato quando $i(a,b) = 0$.

Teorema 3.2. Se $3g + n \geq 5$, allora $\mathcal{C}(S_{g,n})$ è connesso.

Dimostrazione. Dati due vertici a e b del complesso, dobbiamo trovare una sequenza di vertici $a = c_1, \ldots, c_k = b$ con $i(c_i, c_{i+1}) = 0$. Ragioniamo per induzione su $i(a,b)$.

Se $i(a,b) = 0$, non c'è nulla da dimostrare. Se invece $i(a,b) = 1$ allora possiamo trovare due rappresentati α e β che si intersecano precisamente in un

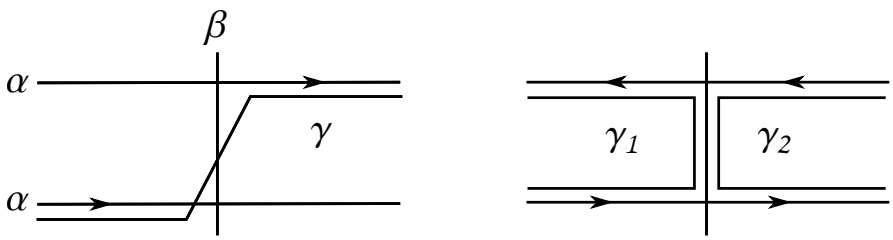


Figura 3.1: A sinistra costruzione di γ, a destra costruzione di γ_1 e γ_2.

punto. Esiste un intorno chiuso regolare U di $\alpha \cup \beta$ che è omeomorfo a un toro con esattamente una componente di bordo. Basta infatti considerare l'unione di due intorni chiusi regolari di α e β rispettivamente, entrambi omeomorfi ad un anello. Denotiamo con c la classe di isotopia della componente di bordo di U. Se c non è essenziale allora significa che $S_{g,n} \approx S_{1,1}$ oppure che $S_{g,n} \approx S_{1,0}$ contro l'ipotesi $3g + n \geq 5$. Dunque a, c, b dà il cammino richiesto.

Per il passo induttivo possiamo assumere $i(a, b) \geq 2$ e che 2 curve chiuse semplici qualsiasi con intersezione strettamente minore di $i(a, b)$ corrispondano a vertici connessi da un cammino in $\mathcal{C}(S_{g,n})$. Dunque è sufficiente trovare una classe c tale che $i(a, c)$ e $i(b, c)$ siano entrambi strettamente minori di $i(a, b)$.

Siano α e β rappresentanti per a e b in posizione minimale. Orientiamo α e β e consideriamo due punti nella loro intersezione che siano consecutivi lungo β. Se le due intersezioni hanno indici concordi, allora c può essere scelta come la classe di γ mostrata a sinistra della Figura 3.1, dove si intende che fuori dalla figura γ segue α rimanendo sempre alla sua destra. La curva γ è essenziale poiché lo è α e $|\alpha \cap \gamma| = 1$, inoltre $|\gamma \cap \beta| = |\alpha \cap \beta| - 1$.

Se le due intersezioni hanno indici discordi, consideriamo le due curve distinte γ_1 e γ_2 mostrate a destra della Figura 3.1. Le curve γ_1 e γ_2 non possono essere omotope a un punto poiché altrimenti α e β non sarebbero in posizione minimale. Se sia γ_1 che γ_2 sono omotope a un punto tolto, allora α borda un disco con due punti tolti. In tal caso α divide la superficie in due componenti connesse, dove quella che non contiene γ_1 e γ_2, ammette γ_3 e γ_4 costruite nello stesso modo. Di nuovo né γ_3 né γ_4 possono essere omotope a un punto. Inoltre non possono essere tutte e quattro omotope a un punto tolto, altrimenti $S_{g,n} \approx S_{0,4}$ contro le ipotesi. A meno di riordinare gli indici supponiamo che γ_4 non lo sia. Scegliamo dunque c come la classe di γ_4. Risulta $i(a, c) = 0$ e $i(b, c) < i(a, b)$. □

Definizione 3.3. Con la notazione $\mathcal{N}(S)$ intenderemo il sottocomplesso di $\mathcal{C}(S)$ generato dai vertici corrispondenti alle curve non separanti.

Teorema 3.4. Se $g \geq 2$ allora $\mathcal{N}(S_{g,n})$ è connesso.

Dimostrazione. Fissato $g \geq 2$ procediamo per induzione su n con casi base $n = 0$ e $n = 1$. Sia dunque $S \approx S_{g,0}$ oppure $S \approx S_{g,1}$. Se a e b sono due classi

non separanti in S per il Teorema 3.2 esiste una sequenza di classi di isotopia $a = c_1, \ldots, c_k = b$ con $i(c_i, c_{i+1}) = 0$.

Alteriamo la sequenza $\{c_i\}$ in modo che consista solo di curve non separanti. Supponiamo dunque che c_i sia separante. Siano γ_i un rappresentante di c_i e S' ed S'' le due componenti di $S_{g,n} - \gamma_i$. Poiché abbiamo supposto $g \geq 2$ e $n \leq 1$ allora sia S' che S'' hanno genere positivo, infatti se così non fosse c_i non potrebbe essere essenziale. Se c_{i-1} e c_{i+1} hanno rappresentanti che giacciono rispettivamente uno in S' e l'altro in S'', allora $i(c_{i-1}, c_{i+1}) = 0$ e possiamo semplicemente rimuovere c_i dalla sequenza. Se invece c_{i-1} e c_{i+1} hanno rappresentanti che giacciono entrambi in S', allora sostituiamo c_i con la classe di isotopia di una curva non separante in S''.

Per mostrare il passo induttivo possiamo supporre $n \geq 2$. Procediamo esattamente come nel passo base, e l'unico problema che può sorgere è che rappresentanti di c_{i-1} e c_{i+1} giacciano entrambi in S' con S'' di genere 0. Perché ciò avvenga necessariamente S'' deve avere almeno due punti tolti, altrimenti c_i non potrebbe essere essenziale. Dunque S' ha strettamente meno punti tolti di S e ha il suo stesso genere. La dimostrazione che stiamo facendo inoltre modifica semplicemente una sequenza di curve essenziali e rende non separanti quelle che connettono i due estremi, indipendentemente dal fatto che a e b siano classi non separanti. Dunque l'ipotesi induttiva si può applicare a c_{i-1} e c_{i+1}, che vengono così connesse da una sequenza di curve non separanti. □

Definizione 3.5. Denotiamo con $\hat{\mathcal{N}}(S)$ il complesso simpliciale 1-dimensionale i cui vertici sono le classi di isotopia delle curve non separanti, mentre due vertici a e b sono connessi da un lato quando $i(a, b) = 1$.

Lemma 3.6. Se $g \geq 2$ allora $\hat{\mathcal{N}}(S_{g,n})$ è connesso.

Dimostrazione. Siano a e b due classi di curve non separanti. Per il Teorema 3.4 esiste una sequenza di vertici $a = c_1, \ldots, c_k = b$ con $i(c_i, c_{i+1}) = 0$. Per ogni i, grazie al principio di cambio delle coordinate è possibile trovare una classe d_i tale che $i(c_i, d_i) = 1$ e $i(c_{i+1}, d_i) = 1$. La sequenza $a = c_1, d_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, d_{k-1}, c_k = b$ rappresenta il cammino richiesto in $\hat{\mathcal{N}}(S_{g,n})$. □

3.2 Birman exact sequence

La Birman exact sequence è uno degli strumenti più importanti nello studio del mapping class group. Fornisce le informazioni algebriche necessarie a livello di gruppi, corrispondenti all'operazione geometrica di marcare un punto su una superficie. L'utilizzo principale che ne faremo sarà infatti quello di completare passi induttivi riguardanti il numero di punti tolti dalla superficie. Cominciamo quindi con il definire le mappe che intervengono nella successione esatta che vogliamo produrre.

Push, Forget e la Birman exact sequence

Definizione 3.7 (mappa Forget)**.** Siano S una superficie e (S, x) la superficie ottenuta da S marcando un punto x nel suo interno. Allora esiste un omomorfismo naturale

$$\text{Forget} : \text{Mod}\,(S, x) \to \text{Mod}\,(S)$$

ottenuto dimenticandosi semplicemente che il punto x è marcato. Ovvero se $\phi \in f \in \text{Mod}\,(S, x)$, allora $\text{Forget}(f) = [\phi]$ dove $[\phi]$ è semplicemente la classe di ϕ in $\text{Mod}\,(S)$.

Mappa Forget. L'omomorfismo Forget ha una facile interpretazione a livello di operazioni geometriche sulla superficie. Infatti poiché punti marcati e punti tolti portano le stesse informazioni topologiche, è chiaro che $\text{Mod}\,(S, x)$ può essere identificato in modo naturale con $\text{Mod}\,(S - x)$. Con questa identificazione la mappa Forget risulta essere semplicemente l'omomorfismo indotto dall'inclusione $S - x \subset S$. L'unica differenza tra $\text{Mod}\,(S, x)$ e $\text{Mod}\,(S)$ è che in $\text{Mod}\,(S)$ le isotopie non devono necessariamente fissare il punto x ad ogni tempo. Dunque volendo descrivere il nucleo della mappa Forget troveremo omeomorfismi che mandano x in se stesso, ma che sono isotopi all'identità tramite isotopie che spostano il punto x in modo continuo sulla superficie. L'idea dunque è che spostando il punto x in tutti i modi possibili in S, siamo in grado di descrivere in modo completo il nucleo di Forget. Questa è proprio la motivazione per la definizione della mappa Push. Chiaramente la mappa Forget è surgettiva, infatti dato un qualsiasi omeomorfismo di S possiamo modificarlo tramite isotopia in modo che fissi il punto x.

Definizione 3.8 (mappa Push)**.** Siano S una superficie e x un punto marcato su S. Sia α un loop in S con punto base x. Possiamo pensare ad α come ad un'isotopia di punti da x in se stesso, e questa isotopia può essere estesa ad una isotopia dell'intera superficie S (questa è la versione 0-dimensionale della Proposizione 1.9). Sia ϕ_α l'omeomorfismo di S ottenuto alla fine dell'isotopia. Vedendo ϕ_α come un omeomorfismo di (S, x) e prendendo la sua classe di isotopia, otteniamo un mapping class $\text{Push}(\alpha) \in \text{Mod}\,(S, x)$.

Mappa Push. Il modo giusto di pensare $\text{Push}(\alpha)$ informalmente, è quello di immaginare di mettere l'indice su x e spostarlo lungo α, lasciando fissa per quanto possibile il resto della superficie.

Risulta che la mappa Push è ben definita, ovvero il mapping class $\text{Push}(\alpha)$ non dipende dalla scelta dell'estensione dell'isotopia all'intera superficie. Ma vale molto di più, $\text{Push}(\alpha)$ è lo stesso per tutti i loop con punto base x omotopi ad α. Dunque ne risulta un ben definito omomorfismo

$$\text{Push} : \pi_1\,(S, x) \to \text{Mod}\,(S, x)\,.$$

Quest'ultimo fatto non è assolutamente scontato, e fa parte dell'enunciato del Teorema 3.9 sulla Birman exact sequence.

Teorema 3.9 (Birman exact sequence)**.** Sia S una superficie con $\chi(S) < 0$ possibilmente con punti tolti e/o componenti di bordo. Sia (S, x) la superficie ottenuta da S marcando un punto x nel suo interno. Allora la seguente successione è esatta:

$$1 \to \pi_1(S, x) \xrightarrow{Push} \mathrm{Mod}(S, x) \xrightarrow{Forget} \mathrm{Mod}(S) \to 1.$$

Omettiamo la dimostrazione di questo teorema, per la quale si veda ad esempio [1, Teorema 4.6]. Comunque l'idea principale della dimostrazione è quella di ricondurre la successione in questione a un pezzo della successione esatta lunga dei gruppi di omotopia, costruendo un fibrato opportuno.

Osservazione 3.10. È importante osservare che la Birman exact sequence vale anche prendendo la restrizione della successione a un qualsiasi sottogruppo di $\mathrm{Mod}(S, x)$. La più comune e quella che noi useremo sarà la restrizione a $\mathrm{PMod}(S, x)$. In questo caso abbiamo la successione esatta

$$1 \to \pi_1(S, x) \xrightarrow{Push} \mathrm{PMod}(S, x) \xrightarrow{Forget} \mathrm{PMod}(S) \to 1.$$

Mappa Push in termini di Dehn twists

Per un loop semplice α in S con punto base x possiamo dare una rappresentazione esplicita di $\mathrm{Push}(\alpha)$ nel modo seguente. Identifichiamo un intorno chiuso regolare di α con l'anello $S^1 \times [0, 2]$, con orientazione e coordinate che abbiamo già utilizzato nella definizione di Dehn twist. In questa identificazione il punto x è il punto di coordinate $(0, 1)$ nell'anello. C'è un'isotopia dell'anello data da

$$F((\theta, r), t) = \begin{cases} (\theta + 2\pi r t, r) & 0 \leq r \leq 1, \\ (\theta + 2\pi(2 - r)t, r) & 1 \leq r \leq 2. \end{cases}$$

Possiamo estendere F con l'identità fuori dall'intorno chiuso regolare di α ottenendo così un isotopia dell'intera superficie S. Quando restringiamo F a $\{x\} \times [0, 1]$, otteniamo

$$F((0, 1), t) = (2\pi t, 1).$$

In altre parole l'isotopia F sposta x lungo il cuore dell'anello. Notiamo subito che l'omeomorfismo ϕ di (S, x) indotto da F al tempo $t = 1$ è il prodotto di due Dehn twists. Più precisamente identificando il bordo dell'anello $S^1 \times \{0\}$ con una curva a in (S, x), e identificando $S^1 \times \{2\}$ con una curva b in (S, x), abbiamo che ϕ è isotopo a $T_a T_b^{-1}$. Un rappresentante di $\mathrm{Push}(\alpha)$ è mostrato in Figura 3.2. Riassumiamo il discorso fatto con un lemma.

Lemma 3.11. Sia α un loop semplice in una superficie S rappresentante di un elemento di $\pi_1(S, x)$. Allora

$$\mathrm{Push}([\alpha]) = T_a T_b^{-1},$$

dove a e b sono le classi di isotopia delle curve in (S, x) ottenute traslando α a sinistra e a destra rispettivamente sulla superficie, in modo che formino il bordo di un intorno chiuso regolare di α omeomorfo a un anello. Inoltre le classi a e b sono non separanti se e solo se α è non separante.

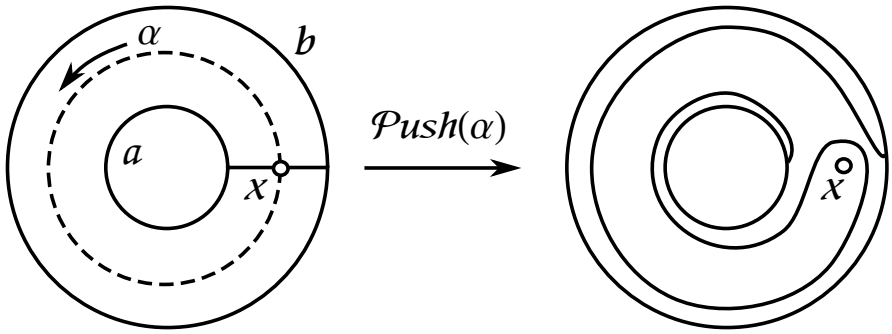


Figura 3.2: Immagine nell'anello di Push(α)

Segue direttamente dalla definizione di mappa Push la seguente proprietà che risulterà utile nel seguito.

Lemma 3.12. Per ogni $h \in \mathrm{Mod}\,(S, x)$ e per ogni $a \in \pi_1\,(S, x)$ vale

$$\mathrm{Push}(h_*(a)) = h \circ \mathrm{Push}(a) \circ h^{-1}.$$

Generatori di $\mathbf{PMod(S_{0,n})}$

Abbiamo già visto che $\mathrm{PMod}\,(S_{0,n})$ è banale per $n \leq 3$. Come prima applicazione della Birman exact sequence analizziamo cosa succede per valori di n più elevati.

Teorema 3.13. Per $n \geq 0$, il gruppo $\mathrm{PMod}\,(S_{0,n})$ è finitamente generato da Dehn twists.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n. I casi base $n \leq 3$ sono già stati trattati. Dunque assumiamo che la tesi sia vera per $S_{0,n}$ con $\chi(S_{0,n}) < 0$, e dimostriamola per $n+1$. Marchiamo un punto interno di $S_{0,n}$ e applichiamo la Birman exact sequence:

$$1 \to \pi_1\,(S_{0,n}) \xrightarrow{Push} \mathrm{PMod}\,(S_{0,n+1}) \xrightarrow{Forget} \mathrm{PMod}\,(S_{0,n}) \to 1.$$

Per ipotesi induttiva $\mathrm{PMod}\,(S_{0,n})$ è finitamente generato da Dehn twists. Inoltre poiché la mappa Forget è l'omomorfismo indotto dall'inclusione, ciascuno di questi Dehn twists ha una preimmagine che è un Dehn twist di $S_{0,n+1}$. Per completare l'insieme di generatori basta dunque aggiungere le immagini di un insieme di generatori di $\pi_1\,(S_{0,n})$. Il gruppo $\pi_1\,(S_{0,n})$ è finitamente generato da loops semplici, e le immagini di questi loops secondo la mappa Push si scrivono in termini di Dehn twists come visto nel Lemma 3.11. Aggiungendo anche questi ultimi otteniamo che $\mathrm{PMod}\,(S_{0,n+1})$ è finitamente generato da Dehn twists. $\square$

Osservazione 3.14. Come abbiamo già osservato in precedenza, se una superficie S ha almeno 2 punti marcati, i Dehn twists non bastano per generare $\mathrm{Mod}\,(S)$. Però se S ha n punti marcati c'è sempre una successione esatta:

$$1 \to \mathrm{PMod}\,(S) \to \mathrm{Mod}\,(S) \to \Sigma_n \to 1$$

data dall'inclusione dei primi due gruppi e dall'azione di $\mathrm{Mod}\,(S)$ sull'insieme dei punti marcati. Per avere un insieme di generatori di $\mathrm{Mod}\,(S)$ basta quindi aggiungere a un insieme di generatori di $\mathrm{PMod}\,(S)$ delle preimmagini delle trasposizioni di Σ_n. Come preimmagine di una trasposizione si può prendere un half-twist tra due punti marcati.

3.3 Il mapping class group è finitamente generato

Eliminare una curva

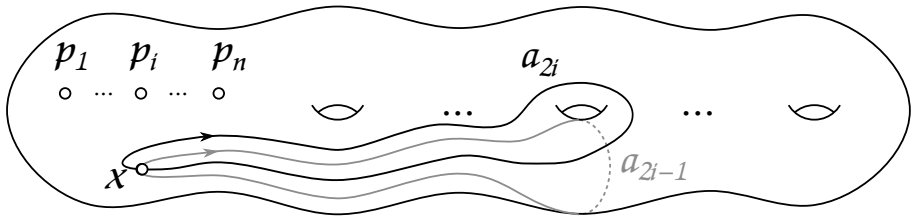
Se S è una superficie, e a una classe di curve essenziali in S, denoteremo con $\mathrm{Mod}\,(S, a)$ lo stabilizzatore di a in $\mathrm{Mod}\,(S)$. Inoltre denoteremo con $\mathrm{Mod}\,(S, \vec{a})$ il sottogruppo di $\mathrm{Mod}\,(S, a)$ degli elementi che oltre a fissare a, fissano anche la sua orientazione. Ovvero presa $\alpha \in a$ orientata, $f \in \mathrm{Mod}\,(S, \vec{a})$ e $\phi \in f$, risulta che $\phi(\alpha)$ è isotopa ad α e ha la stessa orientazione.

Siano S una superficie senza componenti di bordo e senza punti marcati, α una curva non separante in S e a la sua classe di isotopia. Data $f \in \mathrm{Mod}\,(S, \vec{a})$, è sempre possibile scegliere un rappresentante $\phi \in f$ che fissi α punto per punto. Dunque ϕ può essere visto come un omeomorfismo di S_α poiché è l'identità sulle uniche due componenti di bordo di S_α. Tappiamo ora le due componenti di bordo di S_α, ovvero consideriamo l'unione disgiunta di S_α e di due dischi D^2 entrambi con un punto marcato all'interno. Identifichiamo una componente di bordo di S_α con il bordo di uno dei due dischi e facciamo lo stesso anche con l'altra componente. Quello che otteniamo è una superficie $S - \alpha$ senza componenti di bordo e con due punti marcati in più, ovvero abbiamo tolto la curva α dalla superficie.

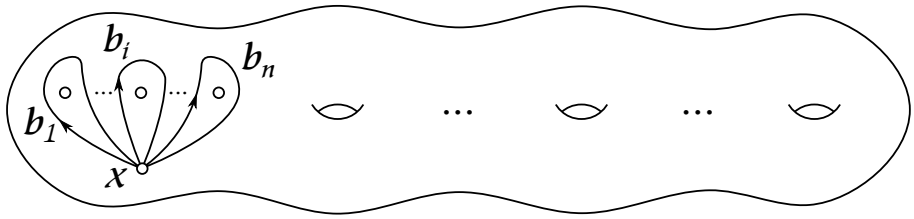
Poiché $S_\alpha \subset S - \alpha$ è ben definito un omomorfismo $\zeta : \mathrm{Mod}\,(S, \vec{a}) \to \mathrm{PMod}\,(S - \alpha)$. Scelto ϕ rappresentante di $f \in \mathrm{Mod}\,(S, \vec{a})$ come prima, in modo che fissi α punto per punto, $\zeta(f)$ è semplicemente la classe di ϕ in $\mathrm{PMod}\,(S - \alpha)$, visto come omeomorfismo di S_α e esteso come l'identità su $(S - \alpha) \setminus S_\alpha$. Si dimostra che il nucleo di ζ è generato da T_a. Dunque abbiamo dimostrato il seguente lemma.

Lemma 3.15. Siano S una superficie senza componenti di bordo e senza punti marcati, α una curva non separante in S e a la sua classe di isotopia. Allora la seguente successione è esatta:

$$1 \to \langle T_a \rangle \to \mathrm{Mod}\,(S, \vec{a}) \xrightarrow{\zeta} \mathrm{PMod}\,(S - \alpha) \to 1.$$



(a) *Lacci relativi ai tori.*



(b) *Lacci relativi ai punti tolti.*

Figura 3.3: Generatori standard di $\pi_1(S_{g,n})$.

Il gruppo $\pi_1(S_{g,n})$ in termini di curve non separanti

Lemma 3.16. Se $g \geq 1$, allora $\pi_1(S_{g,n})$ è finitamente generato da curve non separanti.

Dimostrazione. Siano $p_1, \ldots, p_n$ i punti tolti di S, scegliamo un punto x interno a S e calcoliamo il primo gruppo di omotopia rispetto a x. Per $1 \leq i \leq g$ siano a_{2i} e a_{2i+1} i lacci relativi all'i-esimo toro, mostrati in alto in Figura 3.3. Mentre siano $b_1, \ldots, b_n$ i lacci relativi ai punti $p_1, \ldots, p_n$ mostrati in basso in Figura 3.3. L'insieme $\{a_1, \ldots, a_{2g}, b_1, \ldots, b_n\}$ è un insieme di generatori per $\pi_1(S_{g,n})$, come si vede facilmente grazie ad esempio al Teorema di Van-Kampen.

Siccome $g \geq 1$, per $1 \leq i \leq n$ possiamo considerare il laccio $b_i a_1$ mostrato in Figura 3.4, che si vede facilmente essere non separante.

L'insieme $a_1, \ldots, a_{2g}, b_1 a_1, \ldots, b_n a_1$ è ancora un insieme di generatori di $\pi_1(S_{g,n})$, ma costituito da classi di curve non separanti. □

Azioni di gruppi su complessi simpliciali

Lemma 3.17. Sia G un gruppo che agisce tramite automorfismi simpliciali su un complesso simpliciale 1-dimensionale X, con X connesso. Supponiamo che G agisca transitivamente sui vertici di X e che agisca transitivamente anche sulle coppie di vertici connessi da un lato. Se v e w sono due vertici connessi da un

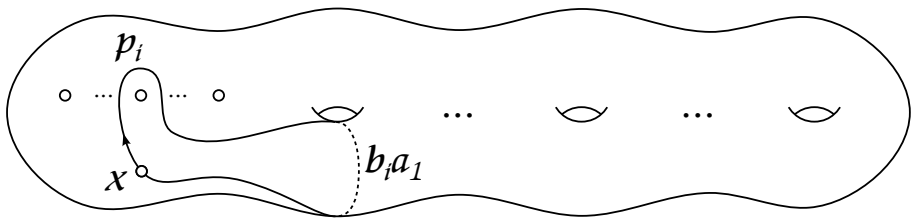


Figura 3.4: Il laccio $b_i a_1$

lato e h è un elemento di G tale che $h(w) = v$, allora G è generato da h e dallo stabilizzatore di v in G.

Dimostrazione. Sia $g \in G$. Vogliamo mostrare che g è contenuto nel sottogruppo $H < G$ generato dallo stabilizzatore di v assieme all'elemento h. Per la connessione di X esiste una sequenza di vertici $v = v_0, \ldots, v_k = g(v)$, nella quale due vertici consecutivi sono connessi da un lato. Poiché G agisce transitivamente sui vertici di X per ogni i possiamo scegliere $g_i \in G$ tale che $g_i(v) = v_i$. Prendiamo come g_0 l'identità, mentre $g_k = g$. Dimostriamo per induzione che $g_i \in H$. Il passo base $g_0 \in H$ è banalmente vero. Assumiamo dunque $g_i \in H$ e mostriamo che $g_{i+1} \in H$.

Applicando l'elemento g_i^{-1} al lato tra $v_i = g_i(v)$ e $v_{i+1} = g_{i+1}(v)$, otteniamo un lato tra v e $g_i^{-1} g_{i+1}(v)$. Siccome G agisce transitivamente sulle coppie di vertici connessi da un lato, esiste $r \in G$ che porta ordinatamente la coppia $(v, g_i^{-1} g_{i+1}(v))$ nella coppia (v, w). In particolare r sta nello stabilizzatore di v e $r g_i^{-1} g_{i+1}(v) = w$. Dunque $h r g_i^{-1} g_{i+1}(v) = v$, che implica che $h r g_i^{-1} g_{i+1}$ sta nello stabilizzatore di v. In particolare, $h r g_i^{-1} g_{i+1} \in H$. Poiché inoltre h e r sono in H e anche g_i è in H per ipotesi induttiva, allora $g_{i+1} \in H$. In particolare $g_k = g$ sta in H, che era quello che volevamo mostrare. □

Il mapping class group è finitamente generato

Teorema 3.18. Sia $S_{g,n}$ una superficie di genere $g \geq 1$ con $n \geq 0$ punti tolti. Allora $\mathrm{PMod}\,(S_{g,n})$ è finitamente generato da Dehn twists lungo curve non separanti in $S_{g,n}$.

Dimostrazione. La dimostrazione sarà essenzialmente una doppia induzione su g e su n, con casi base $S_{1,0}$ e $S_{1,1}$ in modo da consentire l'utilizzo della Birman exact sequence nell'induzione su n.

Cominciamo con il passo induttivo su n. Siano dunque $g \geq 1$ e $n \geq 0$. Assumiamo che $\mathrm{PMod}\,(S_{g,n})$ sia finitamente generato da Dehn twists lungo curve non separanti $\{\alpha_i\}$ in $S_{g,n}$. Per i due casi base già dimostrati, dobbiamo trattare solo casi in cui $\chi(S_{g,n}) < 0$, nei quali vale la Birman exact sequence:

$$1 \to \pi_1\,(S_{g,n}) \to \mathrm{PMod}\,(S_{g,n+1}) \to \mathrm{PMod}\,(S_{g,n}) \to 1.$$

Poiché $g \geq 1$, come mostrato nel Lemma 3.16 $\pi_1(S_{g,n})$ è finitamente generato da classi di omotopia di curve non separanti. Dal Lemma 3.11 segue che l'immagine di ciascuno di questi elementi secondo la mappa Push si scrive come la composizione di due Dehn twists lungo curve non separanti. Iniziamo a costruire un insieme di generatori prendendo ciascuno di questi Dehn twists individualmente. Per completare l'insieme di generatori basta scegliere un sollevamento a $\mathrm{PMod}(S_{g,n+1})$ di ciascun Dehn twist T_{α_i} generatore di $\mathrm{PMod}(S_{g,n})$. Ma essendo la mappa Forget semplicemente l'omomorfismo indotto dall'inclusione $S_{g,n+1} \subseteq S_{g,n}$, per ogni curva non separante α_i in $S_{g,n}$ esiste una curva non separante in $S_{g,n+1}$ che viene mappata in α_i. Dunque il Dehn twist T_{α_i} in $\mathrm{PMod}(S_{g,n})$ ha una preimmagine che è ancora un Dehn twist relativo a una curva non separante in $S_{g,n+1}$.

Completiamo ora con l'induzione su g. Per i passi base e l'induzione su n sappiamo che la tesi è vera per $S_{1,n}$ per ogni $n \geq 0$. Sia dunque $g \geq 2$ e supponiamo che $\mathrm{PMod}(S_{g-1,n})$ sia finitamente generato da Dehn twists lungo curve non separanti per ogni $n \geq 0$. Dal Lemma 3.6 sappiamo che $\hat{\mathcal{N}}(S_g)$ è connesso, mentre dal Lemma 1.14 $\mathrm{Mod}(S_g)$ agisce transitivamente sulle coppie ordinate di classi di isotopia di curve con intersezione geometrica 1. Possiamo dunque applicare il Lemma 3.17 all'azione di $\mathrm{Mod}(S_g)$ su $\hat{\mathcal{N}}(S_g)$.

Sia a la classe di isotopia di un'arbitraria curva non separante in S_g e b un'altra classe, tale che $i(a,b) = 1$ (una tale b esiste per il principio di cambio delle coordinate, in quanto a è non separante). Sia $\mathrm{Mod}(S_g, a)$ lo stabilizzatore in $\mathrm{Mod}(S_g)$ di a. Dalla Proposizione 2.19 abbiamo che $T_b T_a(b) = a$. Dunque, dal Lemma 3.17, $\mathrm{Mod}(S_g)$ è generato da $\mathrm{Mod}(S_g, a)$ assieme a T_a e T_b. Dunque basta mostrare che $\mathrm{Mod}(S_g, a)$ è finitamente generato da Dehn twists lungo curve non separanti.

Sia $\mathrm{Mod}(S_g, \vec{a})$ il sottogruppo di $\mathrm{Mod}(S_g, a)$ degli elementi che oltre a fissare a fissano anche la sua orientazione. Abbiamo la sequenza esatta corta:

$$1 \to \mathrm{Mod}(S_g, \vec{a}) \to \mathrm{Mod}(S_g, a) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1.$$

Osserviamo subito che $T_b T_a^2 T_b$ inverte l'orientazione di a. Infatti applicando il principio di cambio delle coordinate basta verificarlo per una coppia particolare, utilizzando il metodo di risoluzione delle intersezioni. Risulta dunque che $T_b T_a^2 T_b$ rappresenta il laterale non banale di $\mathrm{Mod}(S_g, \vec{a})$ in $\mathrm{Mod}(S_g, a)$. Rimane da mostrare che $\mathrm{Mod}(S_g, \vec{a})$ è finitamente generato da Dehn twists lungo curve non separanti.

Dal Lemma 3.15 abbiamo la successione esatta corta:

$$1 \to \langle T_a \rangle \to \mathrm{Mod}(S_g, \vec{a}) \to \mathrm{PMod}(S_g - \alpha) \to 1$$

dove $S_g - \alpha$ è la superficie ottenuta da S_g eliminando un rappresentante α di a. La superficie $S_g - \alpha$ è omeomorfa a $S_{g-1,2}$. Grazie all'ipotesi induttiva $\mathrm{PMod}(S_g - \alpha)$ è finitamente generato da Dehn twists lungo curve non separanti. Ogni Dehn twist lungo una curva non separante in $\mathrm{PMod}(S_g - \alpha)$ ha una preimmagine in $\mathrm{Mod}(S_g, \vec{a})$ che è ancora un Dehn twist lungo una curva non separante, poiché di nuovo l'omomorfismo considerato nella successione è semplicemente

quello indotto dall'inclusione. Segue che $\mathrm{Mod}\,(S_g, \vec{a})$ è finitamente generato da Dehn twists lungo curve non separanti e la dimostrazione è conclusa. □

Come già visto nell'Osservazione 3.14, per ottenere un insieme di generatori di $\mathrm{Mod}\,(S_{g,n})$ basta aggiungere ad un insieme di generatori di $\mathrm{PMod}\,(S_{g,n})$ gli half-twists relativi ai punti marcati.

Mettendo assieme dunque tutti i risultati visti finora, otteniamo il seguente corollario di interesse generale.

Corollario 3.19. Per ogni $g \geq 0$ e $n \geq 0$. Il gruppo $\mathrm{Mod}\,(S_{g,n})$ è finitamente generato da Dehn twists e half-twists.

3.4 Insieme esplicito di generatori

Lo scopo principale di questa sezione è quello di trovare un insieme esplicito di curve i cui Dehn twist generino $\mathrm{Mod}\,(S_g)$. Spesso identificheremo tra loro una curva e il Dehn twist relativo, e sarà chiaro dal contesto il significato. Dimostreremo che l'insieme di generatori di Humphries (ovvero le $2g+1$ curve mostrate in Figura 3.11) è effettivamente un insieme di generatori per $\mathrm{Mod}\,(S_g)$. Per fare ciò dimostreremo prima che le $3g-1$ curve mostrate in Figura 3.5 generano $\mathrm{Mod}\,(S_g)$. Quest'ultimo insieme di generatori è stato trovato per la prima volta da Lickorish, e dunque le curve dell'insieme prendono il nome di Generatori di Lickorish.

Generatori di Lickorish

Per dimostrare che i Generatori di Lickorish generano effettivamente $\mathrm{Mod}\,(S_g)$, ripercorreremo essenzialmente la dimostrazione del Teorema 3.18 e mostreremo che ogni passo della dimostrazione può essere completato utilizzando l'insieme di generatori di Lickorish.

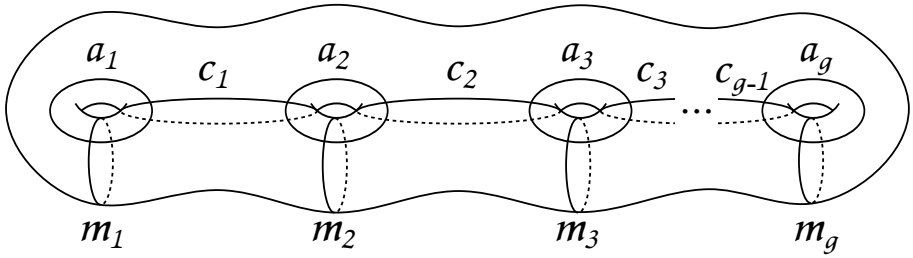


Figura 3.5: Generatori di Lickorish

Teorema 3.20 (Generatori di Lickorish)**.** Per $g \geq 1$, i Dehn twists delle classi di isotopia $a_1, \ldots, a_g, m_1, \ldots, m_g, c_1, \ldots, c_{g-1}$ in Figura 3.5 generano $\mathrm{Mod}\,(S_g)$.

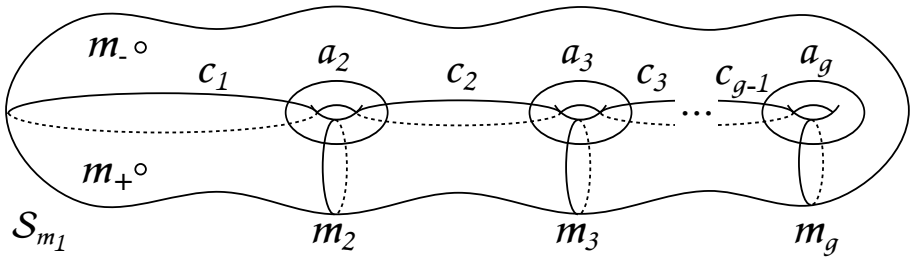


Figura 3.6: Immagini dei generatori di Lickorish in S_{m_1}

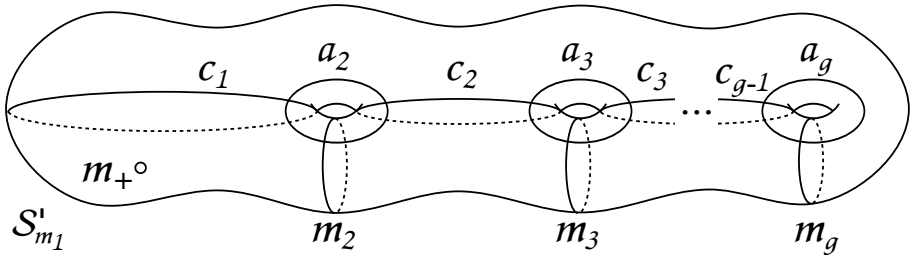


Figura 3.7: Immagini dei generatori di Lickorish in S'_{m_1}

Dimostrazione. Procediamo per induzione su g in totale analogia col Teorema 3.18. Poiché per il toro abbiamo già presentato un insieme di generatori (Lemma 2.23) che coincidono proprio con quelli di Lickorish, la tesi è vera per $g = 1$.

Per il passo induttivo possiamo assumere $g \geq 2$. Mantenendo le notazioni della dimostrazione del Teorema 3.18 e ripercorrendo il passo induttivo su g, scegliamo come (a, b) rispettivamente le classi (m_1, a_1). Abbiamo che $T_{m_1} T_{a_1}(m_1) = a_1$, mentre $T_{a_1} T_{m_1}^2 T_{a_1}$ inverte l'orientazione di m_1. Rimane dunque da dimostrare che $\mathrm{Mod}\,(S_g, \vec{m_1})$ può essere generato utilizzando i generatori di Lickorish. Di nuovo grazie al Lemma 3.15 abbiamo la successione esatta:

$$1 \to \langle T_{m_1} \rangle \to \mathrm{Mod}\,(S_g, \vec{m_1}) \to \mathrm{PMod}\,(S_{m_1}) \to 1$$

dove S_{m_1} con leggero abuso di notazione, indicherà in questo contesto la superficie ottenuta da S_g eliminando un rappresentante di m_1.

Rimane dunque da mostrare che $\mathrm{PMod}\,(S_{m_1})$ è finitamente generato dalle immagini dei generatori di Lickorish mostrati in Figura 3.6.

Applichiamo due volte la Birman exact sequence. Siano S'_{m_1} la superficie ottenuta da S_{m_1} dimenticandosi il primo punto marcato m_- e S''_{m_1} la superficie ottenuta da S'_{m_1} dimenticandosi anche il secondo punto marcato m_+. Abbiamo le due successioni esatte:

$$1 \to \pi_1\left(S'_{m_1}, m_-\right) \to \mathrm{PMod}\,(S_{m_1}) \to \mathrm{Mod}\left(S'_{m_1}\right) \to 1; \tag{3.1}$$

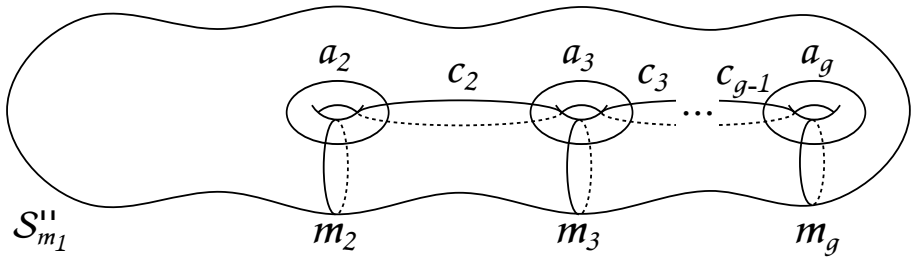


Figura 3.8: Immagini dei generatori di Lickorish in S''_{m_1}

$$1 \to \pi_1\left(S''_{m_1}, m_+\right) \to \mathrm{Mod}\left(S'_{m_1}\right) \to \mathrm{Mod}\left(S''_{m_1}\right) \to 1. \tag{3.2}$$

Cominciamo con la successione (3.2). Dobbiamo mostrare che $\mathrm{Mod}\left(S'_{m_1}\right)$ è generato dai Dehn twists lungo le immagini dei generatori di Lickorish in Figura 3.7. Per induzione, essendo $S''_{m_1} \approx S_{g-1}$, risulta che $\mathrm{Mod}\left(S''_{m_1}\right)$ è generato dalle immagini di queste curve in S''_{m_1}, dunque è sufficiente mostrare che ogni elemento di $\mathrm{Push}'(\pi_1\left(S''_{m_1}, m_+\right))$ si scrive come prodotto di Dehn twists lungo le curve in Figura 3.7.

Generatori standard per $\pi_1\left(S''_{m_1} m_+\right)$ sono mostrati in Figura 3.9. Inoltre si ha $\mathrm{Push}'(\alpha_1) = T_{c_1} T_{m_2}^{-1}$. Usando il Lemma 2.19 vediamo che $T_{m_2} T_{a_2}(\alpha_1) = \beta_1$. Dunque grazie al Lemma 3.12, $\mathrm{Push}'(\beta_1)$ è coniugato a $\mathrm{Push}'(\alpha_1)$ tramite un prodotto di generatori di Lickorish.

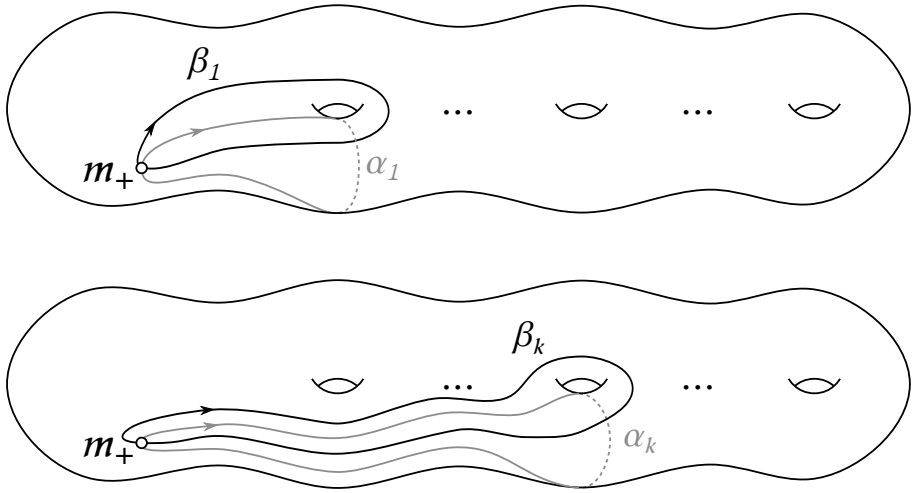


Figura 3.9: Generatori standard per $\pi_1\left(S''_{m_1} m_+\right)$

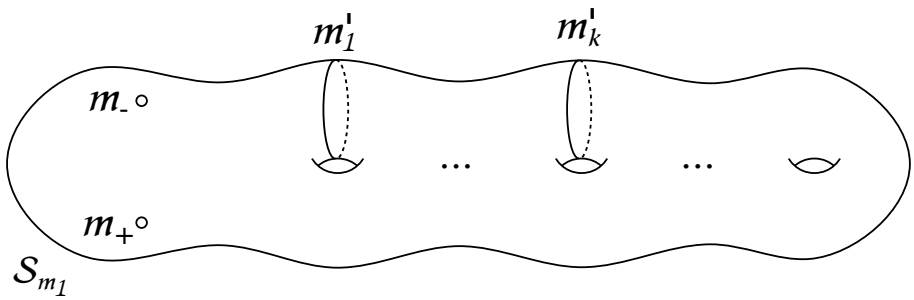


Figura 3.10: I Dehn twists $T_{m'_2}, \ldots, T_{m'_{g-1}}$

Ripetendo lo stesso argomento di coniugazione, si vede che l'immagine di ogni generatore standard di $\pi_1\left(S''_{m_1}\right)$ attraverso Push$'$ si scrive come prodotto delle immagini dei generatori di Lickorish in $\mathrm{Mod}\left(S'_{m_1}\right)$. Le formule richieste sono:

$$T_{c_i}^{-1} T_{a_{i+1}}^{-1} T_{a_i}^{-1} T_{c_i}^{-1}\left(\beta_{i-1}\right) = \beta_i$$
$$T_{a_{i+1}}^{-1} T_{m_{i+1}}^{-1}\left(\beta_i\right) = \alpha_i.$$

La successione (3.1) si fa in modo del tutto analogo. Per facilitare la dimostrazione, può essere utile notare che ciascun $T_{m'_i}$ si scrive come prodotto di twists di Lickorish, dove le classi $m'_2, \ldots, m'_{g-1}$ sono mostrate in Figura 3.10.

Questo segue direttamente dalla relazione della catena

$$\left(T_{m_g} T_{a_g} T_{c_{g-1}} T_{a_{g-1}} T_{c_{g-2}} \ldots T_{a_{k+1}} T_{c_k}\right)^{2(g-k+1)} = T_{m_k} T_{m'_k}.$$

□

Generatori di Humphries

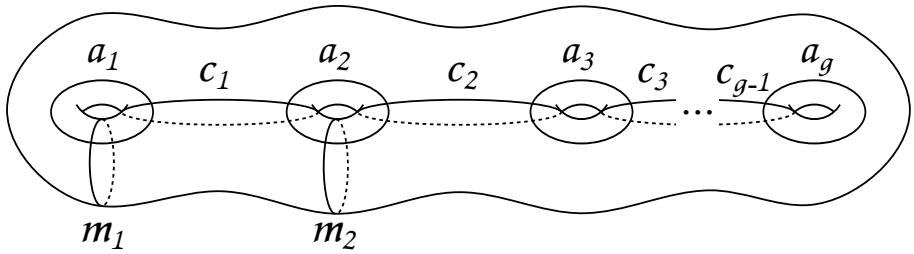


Figura 3.11: Generatori di Humphries

Siamo ora in grado di dare la dimostrazione del fatto che i generatori di Humphries generano effettivamente $\mathrm{Mod}\left(S_g\right)$.

Teorema 3.21 (Generatori di Humphries)**.** Sia $g \geq 2$. Allora $\mathrm{Mod}\,(S_g)$ è generato dai Dehn twists lungo le $2g+1$ classi di isotopia delle curve non separanti

$$a_1, \ldots, a_g, c_1, \ldots, c_{g-1}, m_1, m_2$$

mostrate in Figura 3.11.

Dimostrazione. Grazie al Teorema 3.20 è sufficiente dimostrare che i Dehn twists $T_{m_3}, \ldots, T_{m_g}$ possono essere scritti in termini degli altri generatori di Lickorish.

Per ogni $1 \leq i \leq g-2$ scriveremo un prodotto h di Dehn twists utilizzando solo l'insieme di curve $\{a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, c_i, c_{i+1}, m_{i+1}\}$ (in Figura 3.12).

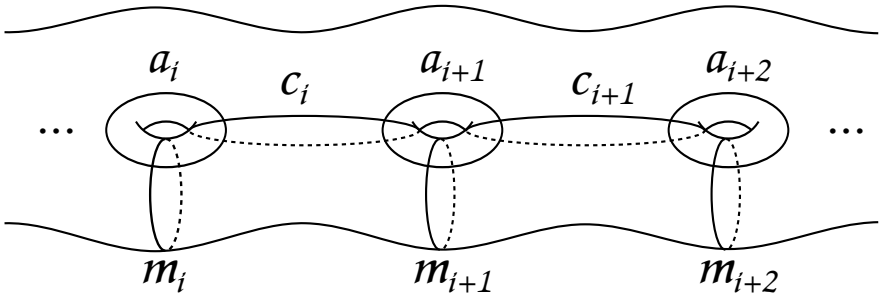


Figura 3.12: Curve utilizzate per portare m_i in m_{i+2}

Il prodotto h costruito sarà tale da portare m_i in m_{i+2}, e dunque con la prima equazione del Lemma 2.17 avremo che

$$T_{m_{i+2}} = h_i T_{m_i} h_i^{-1}$$

e il teorema sarà dimostrato.

In Figura 3.13 sono mostrati tutti i passaggi necessari. Innanzitutto si passa da m_i a b mostrata nel mezzo della Figura 3.13 verificando che

$$b = T_{m_{i+1}} T_{a_{i+1}} T_{c_i} T_{a_i}\,(m_i)\,.$$

Dopodiché si passa alla curva d in basso in Figura 3.13 grazie al prodotto:

$$d = T_{c_{i+1}} T_{a_{i+1}} T_{a_{i+2}} T_{c_{i+1}}(b).$$

É importante osservare che la curva d alla quale siamo arrivati è simmetrica rispetto ai tori i e $i+2$. Segue subito che esisterà un prodotto h' del tutto simmetrico rispetto a quello costruito che userà soltanto le curve dichiarate all'inizio e che porterà la curva d in m_{i+2}. Il teorema è così dimostrato. □

L'insieme di generatori di Humphries non è migliorabile. Consta di $2g+1$ Dehn twists, e si può dimostrare che qualsiasi insieme di generatori di $\mathrm{Mod}\,(S_g)$ fatto solo di Dehn twists, deve avere almeno $2g+1$ elementi.

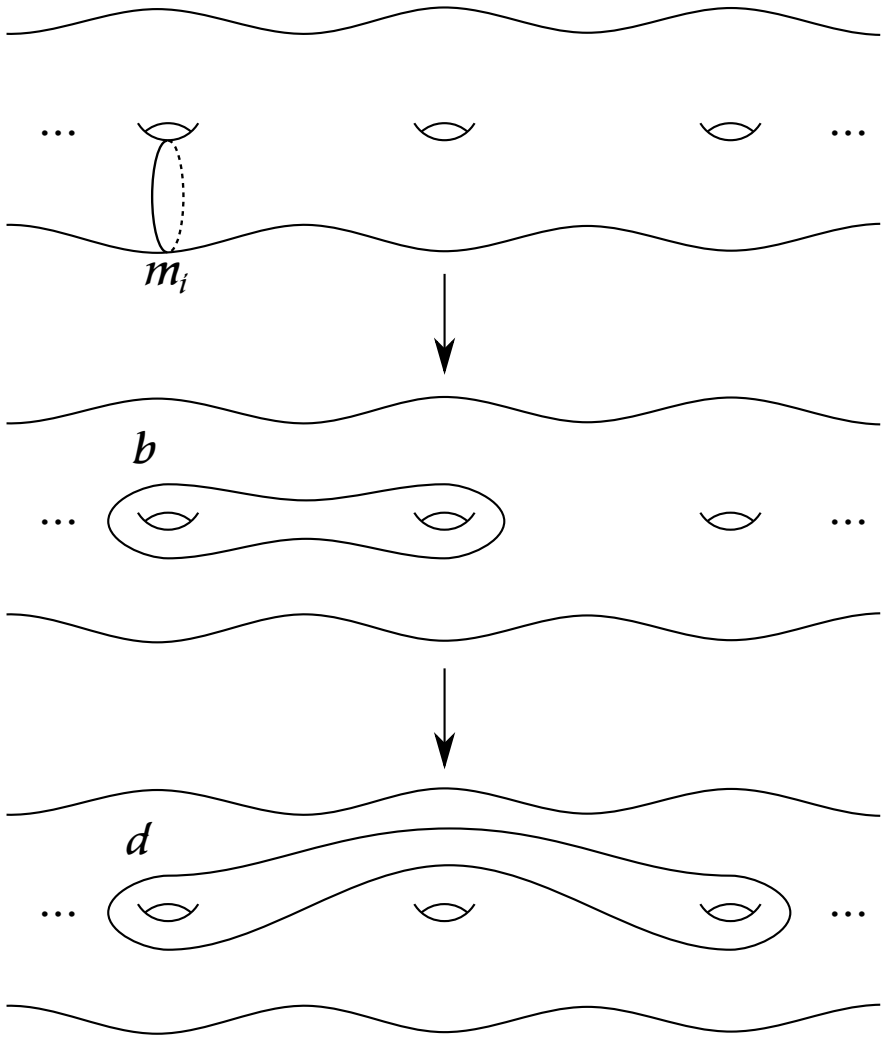


Figura 3.13: Portare m_i in m_{i+2}

Capitolo 4

Presentazione

In questo capitolo dimostreremo che per ogni superficie S, il gruppo $\mathrm{Mod}(S)$ è finitamente presentabile. La strategia che utilizzeremo sarà quella di dimostrare che il complesso degli archi $\mathcal{A}(S)$ è contrattile, ed utilizzare l'azione di $\mathrm{Mod}(S)$ su $\mathcal{A}(S)$ per costruire un $K(\mathrm{Mod}(S), 1)$ con 2-scheletro finito. Subito seguirà che $\mathrm{Mod}(S)$ è finitamente presentabile. Essendo una tecnica diversa da quella utilizzata per dimostrare che il mapping class group è finitamente generato, avremo come corollario immediato un'altra dimostrazione che $\mathrm{Mod}(S)$ è finitamente generato. È importante sottolineare che la dimostrazione che vedremo è di pura esistenza, e non fornisce la presentazione esplicita del gruppo. Alla luce di ciò il lavoro fatto nei capitoli precedenti per dimostrare che il mapping class group è finitamente generato, è preferibile in quanto la dimostrazione fornisce in aggiunta un insieme esplicito di generatori.

4.1 Il complesso degli archi

Come prima cosa ricordiamo un'importante definizione di topologia algebrica che ci servirà nel seguito.

Definizione 4.1 (complesso simpliciale a bandiera)**.** Un complesso simpliciale a bandiera è costruito nel seguente modo. Partendo da un complesso simpliciale 1-dimensionale si considerano tutti i possibili sottoinsiemi dell'insieme dei vertici. Se un sottoinsieme $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ha la proprietà che dati comunque due vertici in V essi sono connessi da un lato, allora il simplesso generato dagli n vertici di V sta nel complesso.

Sia S una superficie che ha bordo non vuoto, o almeno un punto marcato. Nella definizione di $\mathrm{Mod}(S)$ abbiamo imposto che tutte le omotopie e le isotopie di S fossero relative al bordo. Per quanto riguarda gli archi invece ricordiamo che ci sono due scelte possibili nella definizione di classe di isotopia di un arco (vedi Sezione 1.2). Gli estremi dell'arco devono rimanere fissi durante l'isotopia, oppure se un estremo giace su una componente di bordo, l'isotopia può muovere

l'estremo ma solo lungo la componente di bordo. In questo capitolo utilizzeremo sempre la seconda definizione.

Definizione 4.2 (complesso degli archi)**.** Sia S una superficie con bordo non vuoto, o almeno un punto marcato. Il complesso degli archi $\mathcal{A}(S)$ è un complesso simpliciale a bandiera costruito a partire dal complesso simpliciale 1-dimensionale seguente:

Vertici: c'è un vertice per ogni classe di isotopia di archi propri semplici di S (vedi Sezione 1.2).

Lati: Due vertici sono connessi da un lato se le rispettive classi di isotopia ammettono rappresentanti disgiunti.

Osservazione 4.3. Notiamo subito che se S ha bordo non vuoto e tappiamo una sua componente di bordo con un disco con un punto marcato ottenendo una superficie S', allora $\mathcal{A}(S)$ è naturalmente isomorfo ad $\mathcal{A}(S')$. Dunque nel definire il complesso degli archi non c'è alcuna differenza tra punti marcati e componenti di bordo. Dunque in molti casi considereremo punti marcati al posto delle componenti di bordo, per semplificare la trattazione.

Il risultato fondamentale riguardante il complesso degli archi è il seguente teorema dovuto ad Harer:

Teorema 4.4. Sia S una superficie, se $\mathcal{A}(S)$ è non vuoto, allora è contrattile.

L'elegante dimostrazione che presentiamo è dovuta ad Hatcher. Per la prova di questo teorema, ricordiamo che la stella simpliciale di un vertice v in un complesso simpliciale è l'unione di tutti i simplessi chiusi che contengono v. La stella simpliciale di un vertice è contrattile.

Dimostrazione. Scegliamo un vertice base v di $\mathcal{A}(S)$. Per provare che $\mathcal{A}(S)$ è contrattile definiremo una retrazione per deformazione di $\mathcal{A}(S)$ nella stella simpliciale di v.

Siano p un qualsiasi punto in $\mathcal{A}(S)$ e $v_1, \ldots, v_n$ i vertici che generano il simplesso aperto a cui p appartiene. Al punto p sono associate le coordinate baricentriche rispetto ai punti $v_1, \ldots, v_n$, ovvero la somma formale $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i$, con $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$ e $c_i > 0$ per ogni i. Diamo ora un modo per rappresentare i punti del complesso in S. Per realizzare p in S, scegliamo un arco per ciascun vertice v_i del simplesso a cui p appartiene e lo ingrossiamo fino a diventare una striscia che dichiariamo avere larghezza c_i. Questa è una rappresentazione del tutto formale dei punti del complesso, ma molto efficace.

La retrazione per deformazione del complesso $\mathcal{A}(S)$ nella stella simpliciale di v la definiamo sulle rappresentazioni in S dei punti del complesso, ma bisogna sempre tenere bene a mente che le configurazioni di strisce attraverso le quali passeremo, rappresenteranno sempre coordinate baricentriche di punti nel complesso.

Sia α un fissato rappresentante di v, allora possiamo scegliere α_i rappresentanti delle classi dei vertici v_i in modo che siano tutti disgiunti e tutti in

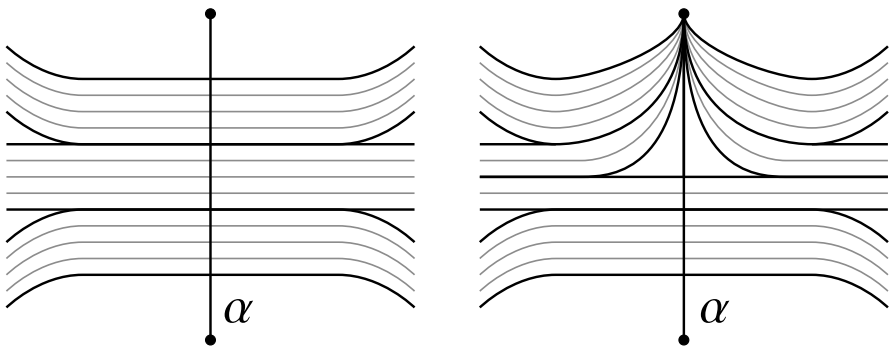


Figura 4.1: Deformazione di Hatcher in $\mathcal{A}(S)$

posizione minimale con α. Se ora ingrossiamo ciascun α_i con una striscia di larghezza c_i otteniamo una rappresentazione del punto p. Attraverso un'isotopia possiamo fare in modo che l'intersezione di α con l'unione di queste strisce sia un unico intervallo chiuso su α disgiunto da ∂S, come mostrato a sinistra in Figura 4.1. Denotiamo con $\theta = \sum_{i=1}^{n} c_i\, i(v_i, v)$ la larghezza dell'unione di queste strisce.

La deformazione è definita nel seguente modo. Al tempo t spostiamo una striscia totale di larghezza $t\theta$ in una prefissata direzione lungo α dividendola e facendola terminare nel punto in cui termina α, esattamente come mostrato a destra di Figura 4.1. Le configurazioni attraverso le quali si passa dal tempo $t = 0$ al tempo $t = 1$ vanno pensate come le coordinate baricentriche di punti nel complesso simpliciale $\mathcal{A}(S)$. Al tempo $t = 1$ tutte le strisce sono disgiunte da α e dunque il punto rappresentato si trova nella stella simpliciale di v. Essendo la stella simpliciale di v contrattile abbiamo dimostrato il teorema. Omettiamo le verifiche che la deformazione sia continua e ben definita sulle intersezioni dei simplessi. Per ulteriori dettagli su questa dimostrazione si veda ad esempio [3]. □

4.2 Azioni di gruppi su complessi

Anche in questa sezione ricordiamo alcune nozioni di topologia algebrica che ci saranno utili nel seguito. Per una trattazione completa degli argomenti e delle definizioni necessarie si veda [2].

Definizione 4.5 (spazio $K(G,1)$)**.** Dato un gruppo G, uno spazio $K(G,1)$ è uno spazio topologico connesso per archi il cui gruppo fondamentale è isomorfo a G e il cui rivestimento universale è contrattile.

Definizione 4.6 (cilindro di una mappa)**.** Data $f : X \to Y$ continua tra due spazi topologici, il cilindro di f, denotato con M_f, è lo spazio ottenuto quozientando l'unione disgiunta $(X \times [0,1]) \sqcup Y$ secondo l'identificazione di $(x,1) \in X \times [0,1]$ con $f(x) \in Y$.

Definizione 4.7 (diagramma di spazi)**.** Un diagramma di spazi consiste in un grafo orientato Γ, con uno spazio topologico X_v per ogni vertice v di Γ, e una mappa continua $f_e : X_v \to X_w$ per ogni lato e orientato dal vertice v al vertice w.

Definizione 4.8 (realizzazione di un diagramma)**.** Dato un diagramma di spazi X, denotiamo con ΔX la realizzazione di X, definita nel seguente modo. Si parte dall'unione disgiunta di tutti gli spazi vertice X_v, e per ogni mappa f del diagramma si aggiunge il cilindro M_f, identificando ogni volta le due estremità del cilindro con gli appropriati spazi vertice X_v.

Definizione 4.9 (complesso di spazi)**.** C'è una naturale generalizzazione di ΔX, nella quale si parte con un Δ-complesso Γ e un diagramma di spazi associato all' 1-scheletro di Γ, tale che le mappe corrispondenti ai lati di ciascun n-simplesso di Γ ($n > 1$), formino un diagramma commutativo. Chiameremo questi dati un complesso di spazi.

Definizione 4.10. Un gruppo G agisce su un CW-complesso X senza rotazioni se vale la seguente implicazione. Se un elemento $g \in G$ fissa una cella $\sigma \in X$, allora g fissa la cella punto per punto.

Osservazione 4.11. Qualunque azione di un gruppo G su un CW-complesso può essere trasformata in una azione senza rotazioni, semplicemente suddividendo ulteriormente il complesso baricentricamente. Il beneficio principale di un'azione senza rotazioni è che il quoziente ha una naturale struttura di CW-complesso indotta dalla struttura originale dello spazio.

Proposizione 4.12. Sia G un gruppo che agisce su un CW-complesso X, senza rotazioni, e con X contrattile. Supponiamo che valgano tutte e tre le seguenti condizioni.

1. Il quoziente $X/_G$ è un CW-complesso finito.
2. Lo stabilizzatore di ciascun vertice è finitamente presentabile.
3. Lo stabilizzatore di ciascun lato è finitamente generato.

Allora G è finitamente presentabile.

Dimostrazione. Sia U un qualunque $K(G,1)$-complesso. Consideriamo il complesso contrattile $\tilde{U} \times X$ dove $\tilde{U}$ è il rivestimento universale di U. Poiché l'azione di G su $\tilde{U}$ è libera, allora l'azione diagonale $(u,x) \to (g(u), g(x))$ di G su $\tilde{U} \times X$ è libera. Dunque essendo $\tilde{U} \times X$ contrattile, $(\tilde{U} \times X)/_G$ è un $K(G,1)$-complesso.

Mostreremo che $(\tilde{U} \times X)/_G$ è omotopicamente equivalente a un complesso con 2-scheletro finito, cosa che implica direttamente che G è finitamente presentabile. Consideriamo la proiezione

$$(\tilde{U} \times X)/_G \to X/_G.$$

Se v è un vertice di X con stabilizzatore G_v in G, allora $(\tilde{U} \times v)/_{G_v}$ è un $K(G_v, 1)$-complesso. Inoltre quest'ultimo spazio viene mappato iniettivamente in $(\tilde{U} \times X)/_G$, e risulta essere la preimmagine di $[v] \in X/_G$ secondo la proiezione vista. Dunque sopra ogni vertice in $X/_G$ c'è in $(\tilde{U} \times X)/_G$ un $K(\pi, 1)$-complesso corrispondente allo stabilizzatore π di quel vertice. Similmente sopra ogni cella aperta di dimensione più alta con stabilizzatore π, c'è il prodotto di un $K(\pi, 1)$-complesso con la cella stessa.

Come risultato notiamo che $(\tilde{U} \times X)/_G$ ha la struttura di un complesso di spazi, in cui ogni spazio vertice è uno spazio $K(G_v, 1)$ per ogni stabilizzatore di un vertice G_v, e ogni spazio lato è uno spazio $K(G_e, 1)$ per ogni stabilizzatore di un lato G_e, e analogamente per gli scheletri di dimensione più alta.

È importante ora la seguente osservazione, se ogni spazio nel complesso di spazi viene sostituito con uno spazio omotopicamente equivalente, allora il tipo di omotopia del complesso risultante non cambia [2, Proposizione 4G.1, pag.458].

Poiché lo stabilizzatore di ciascun vertice G_v è finitamente presentabile, ciascun $K(G_v, 1)$-spazio può essere scelto in modo da avere 2-scheletro finito. Poiché lo stabilizzatore di ciascun lato G_e è finitamente generato, ciascun $K(G_e, 1)$-spazio può essere scelto in modo da avere 1-scheletro finito. Per lo stabilizzatore G_f di ciascuna 2-cella f, il $K(G_f, 1)$-spazio può essere scelto in modo da avere 0-scheletro finito, poiché per ogni gruppo H esiste un $K(H, 1)$ con un singolo vertice.

Ci sono tre possibili modi in cui una 2-cella sorge nel complesso degli spazi $(\tilde{U} \times X)/_G$. Attraverso una 2-cella di un $K(G_v, 1)$-spazio, 1-cella di un $K(G_e, 1)$-spazio, oppure 0-celle di un $K(G_f, 1)$-spazio. Come discusso prima ciascuno di questi spazi può essere scelto in modo da avere 2-scheletro, 1-scheletro e 0-scheletro rispettivamente finiti. Poiché il quoziente $X/_G$ è finito, il corrispondente complesso degli spazi ha un numero finito di 2-celle. Dunque abbiamo costruito un $K(G, 1)$ con 2-scheletro finito, e dunque G è finitamente presentabile. □

4.3 Il mapping class group è finitamente presentabile

Prima di vedere la dimostrazione che il mapping class group è finitamente presentabile, riportiamo una piccola generalizzazione di alcuni fatti visti in precedenza in merito all'operazione geometrica di tappare una componente di bordo con un disco con un punto marcato. Omettiamo la dimostrazione che si effettua con tecniche che abbiamo già visto nei primi capitoli, per una dimostrazione completa si veda ad esempio [1, Proposizione 3.19, pag.85].

Proposizione 4.13. Sia S' la superficie ottenuta da una superficie S tappando una componente di bordo β con un disco con un punto marcato p_0. Denotiamo con $\mathrm{Mod}(S, \{p_1, \ldots, p_k\})$ il sottogruppo di $\mathrm{Mod}(S)$ degli elementi che fissano i punti marcati $p_1, \ldots, p_k$ con $k \geq 0$, e sia $\zeta : \mathrm{Mod}(S, \{p_1, \ldots, p_k\}) \to \mathrm{Mod}(S', \{p_0, \ldots, p_k\})$ l'omomorfismo indotto dall'aver tappato la componente

di bordo β. Allora la seguente successione è esatta:

$$1 \to \langle T_\beta \rangle \to \mathrm{Mod}\,(S, \{p_1, \ldots, p_k\}) \xrightarrow{\zeta} \mathrm{Mod}\,(S', \{p_0, \ldots, p_k\}) \to 1.$$

Siamo ora in grado di enunciare e dimostrare il seguente teorema.

Teorema 4.14. Data una superficie S, $\mathrm{Mod}\,(S)$ è finitamente presentabile.

Dimostrazione. Per prima cosa riduciamo il problema al caso di $S_{g,n}$ con $n > 0$ punti marcati. Supponiamo infatti che la tesi sia vera in tutti questi casi e dimostriamo che vale anche nel caso di bordo non vuoto, e bordo vuoto ma senza punti marcati.

Sia S una superficie con $n > 0$ componenti di bordo, e assumiamo che S non sia omeomorfa al disco D^2. Assumiamo anche per induzione che la tesi sia valida per tutte le superfici con $n - 1$ componenti di bordo. Grazie alla Proposizione 4.13 la seguente successione è esatta:

$$1 \to \langle T_\beta \rangle \to \mathrm{Mod}\,(S) \xrightarrow{\zeta} \mathrm{Mod}\,(S^*, p_0) \to 1 \tag{4.1}$$

dove $\mathrm{Mod}\,(S^*, p_0)$ è il sottogruppo di $\mathrm{Mod}\,(S^*)$ formato dagli elementi che fissano p_0, mentre ζ è l'omomorfismo indotto dall'inclusione di S nella superficie tappata S^*. Dall'ipotesi induttiva abbiamo che $\mathrm{Mod}\,(S^*)$ è finitamente presentabile. Poiché $\mathrm{Mod}\,(S^*, p_0)$ ha indice finito in $\mathrm{Mod}\,(S^*)$, è anche lui finitamente presentabile. Inoltre poiché l'estensione di un gruppo finitamente presentabile con un gruppo finitamente presentabile è finitamente presentabile, segue dalla successione (4.1) che $\mathrm{Mod}\,(S)$ è finitamente presentabile.

Un argomento del tutto simile che utilizza la Birman exact sequence mostra che $\mathrm{Mod}\,(S_g)$ è finitamente presentabile se lo è $\mathrm{Mod}\,(S_{g,1})$, infatti il quoziente di un gruppo finitamente presentabile per un gruppo finitamente generato è finitamente presentabile.

Abbiamo dunque ridotto la dimostrazione a mostrare che $\mathrm{Mod}\,(S_{g,n})$ è finitamente presentabile per $n > 0$. Possiamo assumere che $(g, n) \neq (0, 1)$, infatti sappiamo già che $\mathrm{Mod}\,(S_{0,1})$ è banale. Siccome un gruppo è finitamente presentabile se e solo se lo è un qualsiasi suo sottogruppo di indice finito, è sufficiente dimostrare che $\mathrm{PMod}\,(S_{g,n})$ è finitamente presentabile. Assumiamo l'ipotesi induttiva che $\mathrm{PMod}\,(S_{g',n'})$ è finitamente presentabile quando $g' < g$ o $g' = g$ e $n' < n$.

Cerchiamo di applicare la Proposizione 4.12. Dal Teorema 4.4 il complesso degli archi $\mathcal{A}\,(S_{g,n})$ è contrattile. Dunque la sua suddivisione baricentrica $\mathcal{A}'\,(S_{g,n})$ è ancora contrattile. Osserviamo che il gruppo $\mathrm{PMod}\,(S_{g,n})$ agisce su $\mathcal{A}'\,(S_{g,n})$ senza rotazioni e che inoltre i vertici di $\mathcal{A}'\,(S_{g,n})$ corrispondono ai simplessi di $\mathcal{A}\,(S_{g,n})$. Segue dal principio di cambio delle coordinate che il quoziente $\mathcal{A}'\,(S_{g,n})/\mathrm{PMod}\,(S_{g,n})$ è finito.

Siano v un vertice di $\mathcal{A}'\,(S_{g,n})$ e G_v il suo stabilizzatore in $\mathrm{PMod}\,(S_{g,n})$. Per applicare la Proposizione 4.12, dobbiamo mostrare che G_v è finitamente presentabile.

Come visto prima, v corrisponde a un simplesso di $\mathcal{A}(S_{g,n})$, ovvero alla classe di isotopia di una collezione di archi propri semplici disgiunti α_i in $S_{g,n}$. Se tagliamo $S_{g,n}$ lungo gli α_i, otteniamo una superficie con bordo S_α possibilmente disconnessa e con punti marcati nella sua parte interna. Tappiamo tutte le componenti di bordo di S_α con dischi con un punto marcato e denotiamo le componenti connesse della superficie risultante con R_i. Ciascuna R_i ha punti marcati provenienti dai punti marcati di $S_{g,n}$ e/o punti marcati provenienti da $\cup\alpha_i$. È importante osservare che ciascun $\mathrm{PMod}(R_i)$ ricade nell'ipotesi induttiva.

Sia G'_v il sottogruppo di G_v che consiste degli elementi che fissano ciascuna classe di isotopia $[\alpha_i]$ con orientazione. È importante osservare che tutti questi elementi fissano le componenti R_i. Siccome G'_v ha indice finito in G_v è sufficiente dimostrare che G'_v è finitamente presentabile. Notiamo subito che c'è una mappa

$$\eta : G'_v \to \prod \mathrm{PMod}(R_i).$$

Per vedere che η è un ben definito omomorfismo, serve il fatto che se due omeomorfismi di $S_{g,n}$ che fissano $\cup\alpha_i$ sono isotopi, allora sono isotopi attraverso omeomorfismi che fissano $\cup\alpha_i$, ma questo l'abbiamo già visto con le buone definizioni degli omomorfismi indotti dal tappare le componenti di bordo in una superficie.

La mappa η è suriettiva. Infatti dato un elemento nel prodotto dei $\mathrm{PMod}(R_i)$, è possibile scegliere un omeomorfismo che lo rappresenti che sia l'identità in un intorno dei punti marcati, e dunque è possibile sollevarlo a un rappresentante di un elemento di G'_v che sia l'identità in un intorno dell'unione dei punti marcati e degli α_i. Segue dalla Proposizione 4.13 che il nucleo di η è generato dai Dehn twists lungo le componenti di bordo della superficie tagliata S_α. Poiché ciascun $\mathrm{PMod}(R_i)$ è finitamente presentabile, lo è anche il loro prodotto. Essendo il nucleo di η finitamente generato e il suo conucleo finitamente presentabile, segue che G'_v è finitamente presentabile.

Due vertici di $\mathcal{A}'(S_{g,n})$ sono connessi da un lato se e solo se i corrispondenti simplessi in $\mathcal{A}(S_{g,n})$ sono uno contenuto nell'altro. Segue che lo stabilizzatore di un lato in $\mathcal{A}'(S_{g,n})$ è un sottogruppo di indice finito del più grande fra i due stabilizzatori dei suoi vertici. Dunque gli stabilizzatori dei lati sono finitamente presentabili, in particolare finitamente generati.

Riassumendo abbiamo che $\mathrm{Mod}(S_{g,n})$ agisce sul complesso simpliciale contrattile $\mathcal{A}(S)$ senza rotazioni, con stabilizzatori dei lati finitamente presentabili e stabilizzatori dei vertici finitamente generati. Applicando la Proposizione 4.12 otteniamo che $\mathrm{Mod}(S_{g,n})$ è finitamente presentabile. $\square$

Bibliografia

[1] Benson Farb e Dan Margalit. *A Primer on Mapping Class Groups*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 2011.

[2] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.

[3] Allen Hatcher. «On triangulations of surfaces». In: *Topology and its Applications* 40.2 (1991), pp. 189–194.

Ringraziamenti

Ci sono tante persone che voglio ringraziare per questi tre anni di università, tante persone e poco spazio per ringraziarle tutte a dovere. Quindi se stai leggendo queste righe voglio che tu sappia che ti sono molto grato esattamente al pari delle persone menzionate qui, e ti prego di perdonare la mia brevità.

Prima di chiunque voglio ringraziare i miei genitori per tutto quello che fanno e hanno fatto per me. Sono veramente dei genitori fantastici e sono molto fiero e fortunato a essere figlio loro, grazie per tutto il bene che mi volete.

Molto probabilmente ci avrei messo una vita a laurearmi se non avessi avuto un relatore disponibile come Roberto. Dunque volevo ringraziarlo per tutto quello che mi ha dato anche come docente, e per l'infinita pazienza che ha avuto con me.

Alla mia pestifera sorellina voglio dire che non sarei mai arrivato fino a qui senza di lei, e che se anche gli altri spesso la giudicano io sarò sempre dalla sua parte, perché mi riempie di orgoglio.

Vorrei ringraziare tutti i miei parenti: nonni, cugini e zii per tutto il supporto che mi hanno dato in questi anni. In particolare mia cugina Sara per aver sempre creduto in me, e per tutta l'amicizia e il sostegno che mi ha offerto (conquisteremo presto il mondo). Non posso ringraziare Sara senza ringraziare Alice, soprattutto per i bei momenti che abbiamo sempre condiviso. Sono molto grato a mia zia Elena per essersi sempre presa cura di me sin dall'inizio e per averlo continuato a fare indipendentemente da tutto e da tutti, grazie infinite.

Volevo ringraziare la professoressa Rossi per aver creato e alimentato in me la passione per questa materia, e per aver contribuito in modo così attivo alla mia formazione nella stessa. Assieme a lei vorrei ringraziare anche Mara e Simone, senza i quali molto probabilmente oggi non mi starei laureando in matematica.

Vorrei ringraziare la Francy, non solo perché e la mia fashion stylist di fiducia (ok adesso la pianto davvero giuro!), ma soprattutto per essere una persona cruciale nella mia vita, per tutti i cambiamenti che abbiamo affrontato assieme, per tutta la strada che abbiamo percorso da quando ci siamo conosciuti, e per avermi regalato l'amicizia più semplice e allo stesso tempo più complessa che io abbia mai avuto. Grazie per aver contribuito così tanto a forgiare la persona che sono oggi.

E ora è il momento di ringraziare le mie due rocce: Ale e Clo. Sono troppe le ragioni per le quali vi sono grato e troppi i momenti che abbiamo condiviso, quindi penso che l'unico modo che ho per uscirne sia quello di ringraziarvi per il

semplice fatto di esserci. Grazie di esistere nella mia vita, e per averle regalato i più bei momenti che ha visto, siete i migliori vecchi amici che si possano desiderare, due vestiti che non passano mai di moda, i due vini più antichi e pregiati che possiedo. Ale grazie per le innumerevoli risate, Clo grazie per non essere mai mancata nei momenti importanti.

Tantissime sono le persone che mi hanno distratto e mi hanno salvato dalla pazzia in questi tre anni. Minny, grazie per aver insistito con me e per non avermi lasciato andare alla deriva, Tempon e Anna Dinoi grazie per tutti i piccoli momenti passati assieme. Ma doverosi sono i ringraziamenti anche a Ale, Jonny, Moro, Ziamarra, Eddy, Feb, Scaro, Mike, Silvia, AnnaBo, Alby e Ferra per tutte le risate e le belle serate passate assieme.

Quando sono arrivato a Pisa ho trovato delle persone che mi hanno fatto sentire a casa in questi tre anni. Voglio ringraziare "quelli del mio anno ", perché mi ritengo veramente fortunato ad avervi come compagni. Grazie a Raf, Giorgio, Dumme, Ale, Ale Podo, Ludo, Ali, Luca, Simo, Ivan e Giammi per avermi salvato dallo studio matto e disperatissimo, e per avermi sempre tenuto il morale alto anche in mezzo alla sessione d'esami, non ce l'avrei davvero fatta senza di voi. Ed infine, ma non per importanza volevo ringraziare Matteo, Francesco, Marco, Daniele, Julian, Federico, Valentino, Cristoforo, Gianmaria, Viola, Luca, Angela e Nirvana. Grazie perché mi fate sentire a casa tutti i giorni che sono qui, sono davvero felice di condividere con voi questa parte della mia vita.