Training Internationale Studentenwiskundecompetitie

Iris Smit, Josha Box

20 april 2016

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Voorwoord

Deze syllabus is bedoeld als voorbereiding voor de Internationale Studentenwiskundecompetitie (IMC) of gelijksoortige wiskundecompetities. Het IMC is een competitie die jaarlijks wordt georganiseerd en meestal plaats vindt in Blagoevgrad in Bulgarije. Gedurende twee ochtendsessies van vijf uur verdeeld over twee dagen worden in totaal tien vragen opgelost. Deze vragen kunnen gaan over allerhande deelgebieden van de wiskunde, maar meestal is de kennis van het eerste jaar voldoende om de vragen te kunnen oplossen. Zie `www.imc-math.org` voor meer informatie over het IMC.

Het doel van deze syllabus om studenten een manier van nadenken, technieken en stellingen aan te reiken die van pas kunnen komen bij het IMC. Daarom bevatten de hoofdstukken veel stellingen die niet worden bewezen. Deze bewijzen kan de student indien nodig zelf opzoeken in het naslagwerk van het desbetreffende vak.

Verder bevat deze syllabus veel opgaven, die de schrijvers per hoofstuk hebben geprobeerd te ordenen op volgorde van moeilijkheid. Deze opgaven zijn afkomstig van het IMC zelf, van andere wiskundecompetities zoals de LIMO, het IMO en Putnam en van derden.

Veel dank gaat uit naar Fokko van de Bult, wiens teksten en opgaven de basis hebben gevormd voor veel hoofdstukken in deze syllabus. Ook willen wij Jakub Konieczny bedanken voor het ter beschikking stellen van zijn materiaal. In sommige gevallen zijn teksten van beiden vrijelijk overgenomen en aangepast.

Inhoudsopgave

1 Het Ladenpricipe

Het ladenprincipe (Engels: Pigeonhole principle) zegt in zijn simpelste vorm dat als je $n+1$ ballen in n laden wil stoppen, er minstens één lade is waarin je minstens twee ballen legt. Dit principe kun je vaak op onverwachte plekken gebruiken.

Meestal gebruik je het om te laten zien dat er een getal (of paar getallen of iets dergelijks) bestaat dat aan een bepaalde eigenschap voldoet. Een voorbeeld:

Voorbeeld 1.1. Gegeven $n+2$ gehele getallen, laat zien dat er twee getallen zijn waarvan het verschil of de som deelbaar is door $2n$.

Bewijs. We definiëren nu de laden als $L_a = \{x \mid x = \pm a \mod 2n\}$ voor $a = 0, 1, \ldots, n$. De ballen zijn de $n+2$ getallen die we hebben en die leggen we elk in de bijbehorende lade. We hebben dus $n+1$ laden en $n+2$ ballen en dit betekent dat er een lade is met 2 ballen erin. Ofwel er zijn 2 van onze $n+2$ getallen die ofwel gelijk zijn modulo $2n$, ofwel tegengesteld. Als ze gelijk zijn modulo $2n$ is hun verschil deelbaar door $2n$ en als ze tegengesteld zijn is hun som deelbaar door $2n$. $\square$

Een iets geavanceerdere versie zegt dat als je $kn+1$ ballen in n laden stopt er minstens één lade is met $k+1$ ballen erin. Ook weet je dat als je oneindig veel ballen in maar eindig veel laden stopt, er een lade is met oneindig veel ballen erin. En als je overaftelbaar oneindig veel ballen in aftelbaar veel laden stopt, moet er een lade zijn waar overaftelbaar oneindig veel ballen in zitten.

Ondanks de eenvoud van het ladenprincipe, kun je er wel degelijk niet-triviale dingen mee bewijzen. De truuk is om te herkennen wanneer en waarop je het kunt toepassen. Het kan best even puzzelen zijn om een mogelijke 'lade' te vinden. Een tweede voorbeeld:

Voorbeeld 1.2. Voor elke rij van $mn+1$ verschillende reële getallen, bestaat er een stijgende deelrij van lengte $m+1$ of een dalende deelrij van lengte $n+1$.

Bewijs. Noem de rij $a_1, \ldots a_{mn+1}$. Laat, voor $i = 1, \ldots mn+1$, t_i de lengte van de langste stijgende deelrij die begint bij a_i zijn. Als er een i is met $t_i > m$, dan zijn we klaar. Zonee, dan zijn alle t_i elementen van $\{1, 2, \ldots, m\}$. Vanwege het ladenprincipe, moeten er dan minstens $n+1$ gelijke t_i zijn. Als $i < j$ en $t_i = t_j$, dan moet gelden dat $a_i \geq a_j$. Immers, als $a_i < a_j$ dan kun je vanaf a_i een langer stijgend deelrijtje vinden dan vanaf a_j, door a_i vóóraan een rijte dat bij a_j begon te plakken.

Maar nu geven die $n+1$ gelijke t_i-waarden ons een niet-stijgende deelrij van lengte $n+1$. Omdat alle a_i verschillend waren, moet het zelfs een dalende deelrij zijn. $\square$

Opgaven

Vraag 1.1. Zij A een verzameling van 19 getallen uit de rekenkundige rij gegeven door $1, 4, 7, \ldots, 100$. Bewijs dat er twee verschillende getallen in A zijn waarvan de som 104 is.

Vraag 1.2. Gegeven $n+1$ gehele getallen tussen 1 en $2n$, laat zien dat één van deze getallen deelbaar is door een andere.

Vraag 1.3. Laat negen lijnen elk een vierkant in twee vierhoeken verdelen waarvan de oppervlakten zich verhouden als 2 : 3. Bewijs dat er een punt is waardoor minstens drie van deze lijnen gaan.

Vraag 1.4. Tussen de zes steden zijn allemaal directe vluchten mogelijk. Twee luchtvaartmaatschappijen hebben de routes onderling verdeeld: tussen elk paar steden vliegt precies één van deze luchtvaartmaatschappijen.

Laat zien dat er een drietal steden is, waartussen alle vluchten door dezelfde maatschappij worden uitgevoerd.

Vraag 1.5. Gegeven negen roosterpunten in de driedimensionale ruimte (dus punten (x, y, z) met $x, y, z \in \mathbb{Z}$). Laat zien dat er een paar van deze punten is, waarvoor het lijnstuk dat het paar verbindt weer door een ander roosterpunt (niet noodzakelijk één van die negen) gaat.

Vraag 1.6. De Stelling van Dirichlet: Laat zien dat voor een irrationaal getal α de verzameling $\{k\alpha + n \mid k, n \in \mathbb{Z}\}$ dicht ligt in $\mathbb{R}$.

Vraag 1.7. Laat, voor een partitie π van $S = \{1, 2, \ldots, 9\}$, de waarde $\pi(x)$ het aantal elementen zijn in het deel met x erin. Bewijs dat voor elke twee partities π en π' er twee verschillende getallen x en y uit S bestaan met $\pi(x) = \pi(y)$ en $\pi'(x) = \pi'(y)$.

(Een partitie van S is hier een opdeling van S in een aantal niet lege disjuncte deelverzamelingen, waarvan de vereniging precies S is.)

Vraag 1.8. Is het mogelijk om een 8x8 schaakbord te doorsnijden met 13 lijnen, die niet door een middelpunt van een vakje gaan, zodanig dat alle middelpunten van vakjes van elkaar gescheiden worden?

Vraag 1.9. 200 studenten nemen deel aan een wiskundewedstrijd. Er zijn 6 opgaven. Elke opgave is opgelost door minstens 120 deelnemers. Laat zien dat er 2 studenten zijn die samen alle opgaven hebben opgelost.

Vraag 1.10. Zij $r_n = \min\{|c + d\sqrt{3}| \mid c, d \in \mathbb{Z} \text{ en } c + d = n\}$. Bepaal $\sup_n r_n$.

Vraag 1.11. Laat $P(S)$ voor een verzameling S de verzameling paren uit S zijn, waar een paar een (ongeordende) verzameling van 2 elementen is. Schrijf $P(\mathbb{N}) = P_1 \cup P_2$ waar P_1 en P_2 disjuncte verzamelingen zijn. Bewijs dat er een oneindig deelverzameling $Q \subseteq \mathbb{N}$ bestaat zodat $P(Q) \subseteq P_1$ of $P(Q) \subseteq P_2$.

Vraag 1.12. Laat zien dat er voor elk positief geheel getal n er een N bestaat zodat het product $x_1x_2\cdots x_n$ uitgedrukt kan worden als

$$x_1x_2\cdots x_n = \sum_{i=1}^{N} c_i(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)^n,$$

waar de c_i rationale getallen zijn en elke a_{ij} een van de getallen -1, 0 en 1 is.

2 Handig Tellen

Het tellen van aantallen elementen in een verzameling is een kunst. Vaak helpt het om eerst eens zoveel mogelijk verschillende manieren te verzinnen om tegen een probleem aan te kijken. De ene manier van tellen is de andere niet. De volgende ideeën zouden van pas kunnen komen:

Omschrijven

Knip je verzameling op in stukken die makkelijker te tellen zijn. Of probeer dezelfde verzameling op een andere manier te beschrijven. Denk goed na op welke manier de verzameling het meest overzichtelijk lijkt. Een (makkelijk) voorbeeld hierbij is het bewijs van het *handshaking lemma*:

Voorbeeld 2.1. In een groep van n mensen, schudden diverse mensen elkaar de hand. Bewijs dat het aantal mensen dat een oneven aantal handen heeft geschud, even moet zijn.

Bewijs. Het totaal aantal handshakes hoeft natuurlijk niet even te zijn, maar het totaal aantal geschudde handen wel, want er zijn steeds twee mensen bij het handengeven betrokken. Als een oneven aantal mensen een oneven aantal handen zou schudden, zou het totaal aantal geschudde handen ook weer oneven zijn. Dit kan niet. $\square$

Inclusie-Exclusie

Soms bestaat de verzameling die je wilt tellen uit allemaal overlappende stukken: $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Om V te tellen, kun je beginnen met V_1, en dan $V_2 \setminus V_1$, en $V_3 \setminus (V_1 \cup V_2)$ etcetera.

Soms is het echter makkelijker, om eerst veel te veel te tellen en daarna weleens te kijken wat je allemaal dubbel hebt geteld:

$$|V| = \sum_{i=1}^{n} |V_i| - \sum_{i<j} |V_i \cap V_j| + \sum_{i<j<k} |V_i \cap V_j \cap V_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n|$$

Het kan ook helpen om een Venn diagram te tekenen.

Bijecties

Als je wilt aantonen dat een verzameling een even aantal elementen heeft, kun je proberen hem in twee gelijke helften te verdelen. Om te weten of je delen even groot zijn, kun je proberen een bijectie van het ene deel naar het andere deel te vinden. Je hoeft dan niet meer te weten hoe groot die delen waren, want samen hebben ze in elk geval een even grootte.

Ook als je meer dan alleen de pariteit van de grootte van een verzameling wilt weten kunnen bijecties goed van pas komen. Zie ook het voorbeeld bij recurrentie hieronder.

Recurrenties

Een andere handige methode die je kunt toepassen is om recurrentie betrekkingen op te stellen voor de dingen die je aan het tellen bent. Dit wil zeggen dat je een functie $F(n)$ hebt (bijvoorbeeld het aantal elementen van de n'de verzameling) en dan een uitdrukking vindt voor $F(n)$ in termen van $F(n-1)$, $F(n-2)$ enzovoorts. Hiermee kun je dan bijvoorbeeld met inductie bewijzen wat je functie is of er op andere manieren mee spelen.

Bij het werken met een dergelijke functie $F(n)$, loont het ook om de eerste paar waarden even uit te rekenen. Dat geeft alvast een idee van de rij waar je naar kijkt.

Voorbeeld 2.2. Op hoeveel manieren kun je een pad betegelen van lengte n met tegels van lengte 1 of 2?

Bewijs. De functie $f(n)$ die we hier bekijken is natuurlijk het aantal manieren om een pad van lengte n te betegelen. We willen $f(n)$ nu uitdrukken in termen van eerdere waardes van f. Laten we de laatste tegel die we hebben neergelegd om het pad van lengte n te maken bekijken. Net als alle tegels heeft deze tegel lengte 1 of 2. Als we hem weglaten houden we dus een pad van lengte $n-1$ of $n-2$ over. We kunnen een pad van lengte n dus maken door een pad van lengte $n-1$ te maken en er een tegel van lengte 1 aan toe te voegen of door eerst een pad van lengte $n-2$ te maken en daar een tegel van lengte 2 aan toe te voegen. We zien dus dat

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2).$$

Met de beginwaarden $f(1) = 1$ en $f(2) = 2$ zien we dan dat $f(n)$ het n'de Fibonaccigetal moet zijn. □

Opgaven

Vraag 2.1. Hoeveel positieve gehele getallen n zijn er zodanig dat n een deler is van 10^{40} of van 20^{30}?

Vraag 2.2 (IMC 2012, Vraag 1)**.** Voor ieder positief geheel getal n, zij $p(n)$ het aantal manieren om n te schrijven als som van positieve gehele getallen. Bijvoorbeeld, $p(4) = 5$, want

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

Definieer ook $p(0) = 1$. Bewijs dat $p(n) - p(n-1)$ het aantal manieren is om n uit te drukken als som van gehele getallen die allemaal strict groter dan 1 zijn.

Vraag 2.3. Zij $n \geq 2$ een geheel getal en T_n het aantal niet lege deelverzamelingen S van $\{1, 2, \dots, n\}$ zodat het gemiddelde van S geheel is. Laat zien dat $T_n - n$ even is.

Vraag 2.4. Een egoïstische verzameling is een verzameling die zijn eigen cardinaliteit als element bevat. Bepaal het aantal egoïstische deelverzamelingen van $\{1, 2, \dots, n\}$ die zelf geen egoïstische deelverzameling bevatten.

Vraag 2.5. Zij a_j, b_j en c_j gehele getallen voor $1 \leq j \leq N$. Stel dat voor elke j tenminste één van a_j, b_j en c_j oneven is. Laat zien dat er gehele getallen r, s en t zijn zodat $ra_j + sb_j + tc_j$ (voor $1 \leq j \leq N$) in minstens $4N/7$ van de gevallen oneven is.

Vraag 2.6. Zij $n \in \mathbb{N}$. Hoeveel manieren zijn er om n te schrijven als som van k positieve gehele getallen $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ met k willekeurig en $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq a_1 + 1$?

Vraag 2.7. Voor positieve gehele getallen n geeft $C(n)$ het aantal manieren om n te schrijven als som van nietstijgende machten van 2, waar geen enkele macht meer dan drie keer gebruikt wordt. Bestaat er een polynoom $P(x)$ zodat $C(n) = \lfloor P(n) \rfloor$?

Voorbeeld $C(8) = 5$, want $8 = 4+4 = 4+2+2 = 4+2+1+1 = 2+2+2+1+1$.

Vraag 2.8. Zij r en s positieve gehele getallen. Bepaal een formule voor het aantal geordende viertallen (a, b, c, d) zodat

$$3^r \cdot 7^s = kgv(a, b, c) = kgv(b, c, d) = kgv(c, d, a) = kgv(d, a, b).$$

Vraag 2.9. Zij S een $n \times 3$ bord. Laat op het bord een toren lopen, die bij elke stap één vakje horizontaal of verticaal mag lopen. Op hoeveel manieren kan de toren van linksonder (vakje $(1, 1)$) naar rechtsonder (vakje $(n, 1)$) lopen waarbij elk vakje precies één keer wordt aangedaan?

Vraag 2.10. Een Dyck pad van lengte n is een pad over het rooster met stapjes $(1, 1)$ omhoog en stapjes $(1, -1)$ omlaag beginnend in de oorsprong en eindigend in $(2n, 0)$ dat nooit onder de x-as duikt. Een terugkomst is een maximale rij opeenvolgende dalende stapjes die eindigt op de x-as. Laat zien dat er een bijectie is tussen de Dyck paden van lengte n zonder even terugkomsten en de Dyck paden van lengte $n - 1$.

Vraag 2.11. Gegeven een eindige woord W van K en O schrijven we $\Delta(W)$ voor het aantal K's min het aantal O's in W. Bijvoorbeeld $\Delta(KOOKOOK) = -1$. Een woord heet gebalanceerd als voor elk deelwoord W' van W geldt $|\Delta(W')| \leq 2$. Dus $KOOKOOK$ is niet gebalanceerd want $\Delta(OOKOO) = -3$. Vind het aantal gebalanceerde woorden van lengte n.

Vraag 2.12. Voor $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definieer $Q(n, k)$ als de coefficient van x^k in $(1 + x + x^2 + x^3)^n$. Bewijs dat

$$Q(n, k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{n}{k - 2j}.$$

Vraag 2.13. Zij $B(n)$ het aantal enen in de binaire expansie van n. Bepaal of

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B(n)}{n(n+1)}\right)$$

een rationaal getal is.

Vraag 2.14. Zij $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, met $n \geq 3$. Laat $\mathcal{F}$ de familie van alle niet-constante functies $f : A_n \to A_n$ zijn die voldoen aan

1. $f(k) \leq f(k+1)$ voor $k = 1, 2, \ldots, n-1$;
2. $f(k) = f(f(k+1))$ voor $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Bepaal het aantal functies in $\mathcal{F}$.

3 Invariantie

Invariantie is een eigenschap van bepaalde transformerende systemen die gebruikt kan worden om zekere dingen over dat systeem te bewijzen. Bij wiskundewedstrijden zijn er regelmatig opgaves die opgelost kunnen worden met behulp van een invariant.

Het basisidee

Als er een systeem is gegeven tezamen met een aantal regels hoe dat systeem kan/mag veranderen dan is een invariant van dat systeem een functie op toestanden van het systeem die constant is onder veranderingen van het systeem volgens de regels.

Denk bijvoorbeeld aan een schaakpartij, met als toestanden de stellingen van de partij en als functie de kleur van het veld waar de witte loper die begon naast de koning staat. Aangezien een loper altijd schuin zet zal de kleur van het veld waarop hij staat niet veranderen als er gezet wordt (de kleur verandert natuurlijk ook niet als er met een ander stuk wordt gezet). Daarom noemen wij de kleur van het veld waarop de loper staat een invariant.

Als je een invariant van een systeem kent en je weet dat zijn waarde in de beginsituatie A is, dan zal die invariant ook A zijn in alle mogelijke toestanden die volgens de regels bereikt kunnen worden.

Door van dit feit gebruik te maken kunnen we laten zien dat bepaalde eindstanden niet bereikt kunnen worden vanuit de beginstelling als de invariant in die beoogde eindtoestand een andere waarde heeft dan in het begin. Zo zien we in het voorbeeld van het schaakspel dat een loper ook na een willekeurig aantal zetten niet van kleur kan veranderen en dus bijvoorbeeld niet van het linksonder (dat zwart is) naar het veld rechtsonder (dat wit is) kan gaan.

Nu volgt nog een simpel voorbeeld.

Voorbeeld 3.1. Beginnend met een rij van vijf enen en zes nullen mag je telkens twee cijfers wegstrepen en er één cijfer voor in de plaats zetten. Als je twee dezelfde cijfers wegstreept, zet je er een nul ervoor terug en als het twee verschillende zijn zet je er een één voor terug. Eindig je altijd met hetzelfde getal?

Bewijs. Het aantal enen in de rij modulo 2 is een invariant. Als je namelijk twee enen wegstreept en vervangt door een nul, daalt het aantal enen met twee en dus verandert het niet modulo 2. In alle andere gevallen blijft het aantal enen gelijk en verandert het dus ook niet modulo 2. In het begin zijn er vijf enen, ofwel een oneven aantal. Er volgt dus dat het aantal enen in elke bereikbare situatie oneven is. Als na 10 zetten er nog maar een cijfer over is (merk op dat het aantal cijfers elke stap met 1 afneemt) zijn er dus nog steeds een oneven aantal enen. Dit betekent dat dit laatste getal dus een één moet zijn en geen nul kan zijn. Je eindigt dus inderdaad altijd met hetzelfde getal. □

En nog een voorbeeld (uit de tweede ronde van de wiskunde olympiade).

Voorbeeld 3.2 (NWO 2003-5)**.** Op een tafel liggen 10 kaarten met de getallen 1 tot en met 10 erop. Bij elke zet pak je twee kaarten (zeg met de waarden p en q) en vervangt ze door een kaart met de waarde $pq+p+q$. We doen dit tot er nog maar één kaart over is. Welke waardes kan deze laatste kaart hebben.

Bewijs. Als invariant nemen we het product van de waardes van elke kaart plus 1, dus in formule: Als we kaarten hebben met waardes $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dan is de invariant $T = (a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)$. Eerst laten we zien dat het een invariant is. Als we twee kaarten met waardes p en q pakken vervangen we in het product $(p+1)(q+1)$ door $(pq+p+q+1)$. Deze twee termen zijn echter precies hetzelfde en dus verandert T niet door de pak en vervang operatie. In de beginsituatie is $T = 2 \cdot 3 \cdots 11 = 11!$ en als er nog maar één kaart over is met waarde a is T gelijk aan $T = a+1$. Aangezien T invariant is geldt dus in de eindsituatie dat $11! = T = a+1$, ofwel dat de waarde van de laatste kaart $11! - 1$ is. (NB deze waarde kan ook echt bereikt worden want het is duidelijk dat een waarde bereikt wordt en dit is de enig mogelijke.) □

Ideeën voor invarianten

In deze sectie staan een paar ideeën van mogelijke invarianten, maar dit is absoluut niet een volledige lijst en het is alleen bedoeld als voorbeeld.

Bij rijtjes getallen kun je denken aan een lineaire combinatie van die getallen (dit betekent dat je elk getal met een constante (afhankelijk van de plek van het getal) vermenigvuldigt en dan alles optelt), bijvoorbeeld voor een rijtje $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ functies als $f(x) = x_1+x_2+x_3+x_4$, $f(x) = x_1-x_2+x_3-x_4$ en $f(x) = x_1+2x_2+3x_3+4x_4$ etcetera. Ook producten van de getallen ($f(x) = x_1x_2x_3x_4$) of een hogere graads polynoom (als $f(x) = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ of $f(x) = x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1$) zijn soms nuttig. Verder kun je altijd het resultaat modulo een vast getal nemen (als je modulo 2 rekent kijk je dus of een getal even of oneven is).

In toestanden die niet bepaald worden door getallen kun je denken aan dingen als kleuringen (zoals we met de loper op het schaakbord deden, maar vaak zijn ingewikkelder kleuringen nodig). Ook het aantal elementen in een goed gekozen verzameling kan invariant zijn (bijvoorbeeld het aantal vingers in de wereld modulo 10 is redelijk invariant onder het sterven en geboren worden van mensen).

Soms zie je de/een invariant direct, maar soms ben je in de situatie dat je wel het idee hebt dat er een invariant is en heb je het gevoel dat die invariant een globale vorm heeft en dan kun je proberen om die globale vorm met nog te bepalen constantes in te vullen en dan te kijken welke constantes een invariant creëren. Ook gebeurt het dat je denkt dat een bepaalde kleuring wel een goede invariant oplevert, maar dat je de goede kleuring niet kan vinden. Meerdere kleuringen nemen en die over elkaar leggen (i.e. beide kleuringen tegelijk gebruiken) wil dan wel eens werken.

Tenslotte is het aantal zetten dat gedaan is een heel nuttig getal dat je kan gebruiken in een invariant. Wat blijft namelijk invariant bij het lopen van een paard over het schaakbord?

Voorbeeld 3.3. Elke term in de rij met eerste zes elementen $1, 0, 1, 0, 1, 0$, beginnend met de zevende term, is de som van de zes vorige modulo 10. Bewijs dat het stuk $0, 1, 0, 1, 0, 1$ nooit voorkomt.

Bewijs. Als toestand bekijken we de laatste zes getallen in de rij en als bewerking hebben we het kijken naar de laatste zes getallen een punt verder in de rij, ofwel

$$T : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto (x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \mod 10).$$

Ik zie hier niet direct een goede invariant, maar een lineaire combinatie van de losse getallen modulo 10 zou best wel eens kunnen werken (modulo 10, aangezien je het laatste getal al modulo 10 neemt en je invariant dus niet zou moeten veranderen als het laatste getal een veelvoud van 10 verandert). Dus proberen we als invariant S de functie

$$S : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6 \mod 10,$$

waar de a_i nog te bepalen constanten zijn. Nu bekijken we de functie $S \circ T - S$, waarvan we willen dat die identiek nul is, want dan is S een invariant. ($S \circ T$ betekent eerst T uitvoeren en dan S, ofwel dit is de waarde van de invariant na de bewerking). Enig rekenen geeft

$$\begin{aligned} S \circ T - S : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \quad \mapsto \quad & (a_6 - a_1)x_1 + (a_6 + a_1 - a_2)x_2 \\ & + (a_6 + a_2 - a_3)x_3 + (a_6 + a_3 - a_4)x_4 \\ & + (a_6 + a_4 - a_5)x_5 + a_5x_6 \mod 10. \end{aligned}$$

We willen dat elke coefficient aan de rechterzijde nul is, ofwel dat

$$\begin{aligned} a_6 - a_1 &= 0 \mod 10, \\ a_6 + a_1 - a_2 &= 0 \mod 10, \\ a_6 + a_2 - a_3 &= 0 \mod 10, \\ a_6 + a_3 - a_4 &= 0 \mod 10, \\ a_6 + a_4 - a_5 &= 0 \mod 10, \\ a_5 &= 0 \mod 10. \end{aligned}$$

Als we alle 6 vergelijkingen bij elkaar optellen, zien we dat $5a_6 = 0 \mod 10$, ofwel dat $a_6 = 0, 2, 4, 6$ of 8. Met behulp van a_6 kunnen we dan de andere coefficienten oplossen en zien we dat $a_i = ia_6 \mod 10$. Als $a_6 = 0$ is de invariant S zelf identiek nul. Natuurlijk is dit een invariant maar erg nuttig is hij niet. Echter, als $a_6 = 2$ krijgen we als invariant voor S de functie

$$S : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 2x_6 \mod 10.$$

Als we dit uitrekenen in de beginsituatie krijgen we de waarde $S(1, 0, 1, 0, 1, 0) = 8 \mod 10$. In de beoogde eindsituatie is de waarde $S(0, 1, 0, 1, 0, 1) = 4 \mod 10$. Aangezien de invariant verschillende waardes aanneemt in de beginsituatie en de beoogde eindsituatie zal die beoogde eindsituatie nooit bereikt worden. $\square$

Halfvarianten

Er zijn ook invarianten die wel veranderen, maar slechts één richting op. In dat geval noemen we zo'n functie een halfvariant. Het aantal stukken op een schaakbord is bijvoorbeeld een (dalende) halfvariant. Als de halfvariant daalt en in de beoogde eindsituatie een hogere waarde heeft dan in de beginsituatie dan zul je nooit in die eindsituatie komen. Omgekeerd, als je een stijgende halfvariant hebt zul je nooit in een toestand komen met een lagere waarde.

Een belangrijke toepassing van halfvarianten is dat het gebruikt kan worden om aan te tonen dat een bepaald algoritme stopt. Als je halfvariant bijvoorbeeld altijd een positief geheel getal is en de waarde ervan strikt daalt (dit betekent dat het altijd echt kleiner wordt en niet gelijk blijft) door een bewerking, dan weet je dat na een eindig aantal keer je die bewerking niet meer kan uitvoeren, omdat anders de invariant een keer negatief zou moeten worden.

Voorbeeld 3.4. In het parlement van Sikkeneure heeft elke parlementariër ten hoogste drie vijanden. Bewijs dat je het parlement zo in twee kamers kan verdelen zodat elk lid ten hoogste één vijand in zijn eigen kamer heeft.

Bewijs. Om te beginnen verdelen we het parlement willekeurig in twee kamers. De som van het aantal vijanden dat elk lid in zijn eigen kamer heeft zitten noemen we H. Stel dat parlementarier A twee of meer vijanden in zijn kamer heeft zitten. Door A van kamer te laten wisselen daalt H dan. Zo lang er nog een parlementarier is die meer dan één vijand in zijn eigen kamer heeft kunnen we die van kamer laten wisselen en H laten dalen. Aangezien H altijd een niet-negatief geheel getal is moet het een keer stoppen (anders wordt H op een gegeven moment negatief). In de eindsituatie heeft elke parlementarier ten hoogste één vijand in zijn eigen kamer. □

Overigens zijn niet alle opgaven op te lossen met ideeën die net zijn beschreven, maar gebruik je fantasie en je komt een eind.

Opgaven

Vraag 3.1. In de Ao-Ao taal worden alle woorden met enkel A's en O's geschreven. Een woord betekent hetzelfde als je er ergens AO uit weglaat of tussen voegt. Betekenen AOO en OAA hetzelfde?

Vraag 3.2. Een cirkel is verdeeld in zes sectoren. In elke sector staat een pion. Per zet mogen we twee willekeurige pionnen verplaatsen naar een buursector. Kunnen we alle pionnen in een sector krijgen?

Vraag 3.3. De getallen $1, 2, \ldots, 20$ staan geschreven op een bord. We mogen twee willekeurige getallen a en b vervangen door $a + b - 1$. Welke getallen kun je over hebben als je dit 19 keer hebt gedaan?

Vraag 3.4. In een rij van zes bomen zit in elke boom een spreeuw. Op het moment dat een spreeuw een willekeurig aantal bomen naar rechts vliegt, vliegt een andere spreeuw evenveel bomen naar links. Kunnen alle spreeuwen uiteindelijk in één boom komen? En wat is het antwoord op deze vraag als er zeven bomen zijn?

Vraag 3.5. Op een 8×8-schaakbord zijn alle vakjes wit gekleurd op een zwart vakje na. Laat zien dat je niet alle vakjes wit kunt maken, door alleen hele rijen en kolommen te herkleuren (herkleuren betekent hier alle witjes vakjes in de rij/kolom zwart kleuren en vice versa).

Vraag 3.6. Dezelfde vraag als de vorige maar nu op een 3×3 bord, met weer 1 zwart gekleurd vakje.

Vraag 3.7. Weer dezelfde vraag maar nu op een 8×8 bord, waarvan alleen alle vier de hoeken zwart zijn gekleurd.

Vraag 3.8. De getallen $1, 2, \ldots, 1989$ worden op een bord gezet. Twee getallen mag je vervangen door hun verschil. Kun je een situatie bereiken met alleen maar nullen?

Vraag 3.9. In Chromaland wonen 13 grijze, 15 bruine en 17 rode kameleons. Als twee kameleons met verschillende kleur elkaar tegenkomen, veranderen ze hun kleur in de derde kleur. Kunnen op een gegeven moment alle kameleons dezelfde kleur krijgen?

Vraag 3.10. Van een regelmatige 12-hoek krijgt elk punt een getal. Elf krijgen het getal $+1$ en de laatste het getal -1. Bij een gegeven getal k mag je het teken veranderen van k willekeurige opeenvolgende hoekpunten. Kun je het getal -1 door dit een aantal malen te doen een plaats doen opschuiven voor

1. $k = 3$?
2. $k = 4$?
3. $k = 5$?

Vraag 3.11. Een kameel mag zetten van de vorm (1,3) doen (i.e. in een richting (horizontaal of verticaal) 3 stappen en in de andere richting 1 stap). Kan een kameel op een schaakbord met een aantal zetten op een buurvakje van het veld waar hij is begonnen, komen?

Vraag 3.12. Een rechthoekig bord is gevuld met 1×4 en 2×2 tetrisblokjes. Alle stenen worden ervan afgehaald, waarbij er een 2×2 steen kwijt raakt. In plaats daarvan word er een 1×4 steen toegevoegd. Laat zien dat je het oorspronkelijke bord dan niet meer kunt bedekken.

Vraag 3.13. In de landen Dillia en Dallia gebruikt men voor de munteenheid respectievelijk dillers en dallers. In Dillia is de wisselkoers 10 dillers voor 1 daller en in Dallia is de koers 10 dallers voor 1 diller. Een handelaar begint met 1 diller en kan vrij reizen tussen deze twee landen. Laat zien dat als hij geen geld uitgeeft hij nooit evenveel dillers als dallers kan krijgen.

Vraag 3.14. Dr. Gizmo heeft een muntwisselaar uitgevonden. Als je er een munt in werpt geeft de wisselaar, mits dat mogelijk is, precies 5 munten terug van dezelfde totale waarde. Bewijs dat als je begint met 1 munt, je nooit kunt eindigen met 26 munten.

Vraag 3.15. Er zijn drie typen amoebes van Mars in een laboratorium. Twee verschillende typen kunnen samensmelten tot het derde type. Als we beginnen met 20 amoebes van type A, 21 van type B en 22 van type C, welke typen kunnen dan uiteindelijk overblijven?

Vraag 3.16. Een pion op ons schaakbord mag drie verschillende zetten doen, een vakje naar rechts, een vakje omhoog of een vakje diagonaal naar linksonder. Kan de pion alle vakjes van het schaakbord precies één keer bezoeken en eindigen een vakje rechts van het beginvakje?

Vraag 3.17. Kan een schaakpaard alle velden van een $4 \times N$ schaakbord tijdens een reeks zetten precies één keer bezoeken en daarna weer op zijn beginvakje terugkeren?

Vraag 3.18. We hebben drie machines. De eerste neemt een kaart met de getallen a en b en geeft een kaart terug met de getallen $a+1$ en $b+1$. De tweede neemt een kaart met twee even getallen a en b en levert een kaart met de getallen $a/2$ en $b/2$. De laatste machine neemt twee kaarten met de getallen a, b en de getallen b, c respectievelijk en geeft een kaart terug met de getallen a, c. Bovendien geven alle machines ook nog de kaarten terug die ingevoerd worden. Kun je beginnend met een kaart met de getallen 5 en 19 een kaart krijgen met de de getallen 1 en 1988?

Vraag 3.19. Van een $n \times n$-schaakbord is een aantal vakjes ziek. Deze ziekte is erg besmettelijk. Als aan een vakje minstens twee zieke vakjes grenzen (met een hele zijde) wordt dat vakje ook ziek. Aan het eind van de epidemie blijkt elk vakje ziek te zijn. Hoeveel vakjes waren er aan het begin minstens ziek?

Vraag 3.20. Er staan 7 glazen op tafel, allemaal ondersteboven. Per zet mag je 4 glazen omdraaien. Kun je alle glazen met de goede kant boven krijgen?

Vraag 3.21. Zeven nullen en een één staan op de hoekpunten van een cubus. Per zet mag je bij de eindpunten van een willekeurige zijde 1 optellen. Kun je de getallen op elk hoekpunt gelijk maken? Kun je alle hoekpunten deelbaar door 3 maken?

Vraag 3.22. Op tafel ligt een stapel met 1001 stenen. Je mag per zet een stapel uitkiezen waar meer dan 2 stenen inzitten, er een van weggooien en er twee kleinere stapels van maken. Kun je eindigen met alleen maar stapels van 3 stenen?

Vraag 3.23. De getallen $1, 2, \ldots, n$ worden in deze volgorde in een rij geschreven. Je mag telkens twee getallen verwisselen. Kun je na 2003 verwisselingen weer op de oorspronkelijke rij uitkomen?

Vraag 3.24. Gegeven is een drietal getallen. Nu mag je er telkens twee uitkiezen, zeg a en b, en deze vervangen door $(3a + 4b)/5$ en $(4a - 3b)/5$. Kun je het drietal $(3, 4, 12)$ in een aantal stappen veranderen in het drietal $(5, 7, 10)$?

Vraag 3.25. Beschouw alle roosterpunten in het positieve kwadrant (i.e. alle paren getallen (a, b) met $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$). We kleuren de roosterpunten $(0, 0), (1, 0), (0, 1)(2, 0), (1, 1)$ en $(0, 2)$ zwart en leggen op elk van deze zes punten een fiche. Bij elke stap mag je een fiche pakken dat op het punt (x, y) ligt en vervangen door een fiche op $(x + 1, y)$ en een op $(x, y + 1)$, als tenminste die laatste twee punten wel leeg zijn. Kun je nu alle fiches uit het zwart gekleurde gebied bewegen?

Als je begint met slechts één fiche op $(0, 0)$ kun je dan zorgen dat er geen fiches meer op het zwart gekleurde gebied liggen?

Vraag 3.26. Op alle roosterpunten in het onderhalfvlak (i.e. alle paren getallen (a, b) met $a, b \in \mathbb{Z}_{<0}$) staat een pion (en alle andere roosterpunten zijn leeg). Bij een stap mag je een pion nemen en die in horizontale of verticale richting over een buur heen laten springen naar een leeg veld (dat dus exact afstand 2 tot zijn oude positie heeft) en vervolgens de pion waar je overheen bent gesprongen weghalen. Op welke punten in het rooster $\mathbb{Z}^2$ kun je een pion krijgen?

Vraag 3.27 (IMO 1993-3)**.** Op een oneindig schaakbord wordt het volgende spel gespeeld. Bij het begin staan er n^2 stukken op het bord in een $n \times n$ vierkant van velden, op elk veld één stuk. Een zet van het spel bestaat uit een sprong in horizontale of verticale richting over een aangrenzend bezet veld naar een onbezet veld daar direct naast. Het stuk waar overheen gesprongen is, wordt van het bord verwijderd. Bepaal de waarden van n waarvoor het spel kan eindigen met slechts één stuk op het bord.

Vraag 3.28 (IMO 1995-4)**.** Bepaal de grootste waarde van $x_0 \in \mathbb{R}_+$ waarvoor er een rij van positieve reële getallen $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ bestaat met de volgende eigenschappen:

1. $x_0 = x_{1995}$;
2. $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$ voor $i = 1, 2, \ldots, 1995$.

Vraag 3.29 (IMO 1996-1)**.** Een rechthoekig bord $ABCD$ met $AB = 20$ en $BC = 12$ is verdeeld in 20×12 eenheidsvierkanten. Op dit bord zijn de volgende zetten toegestaan: men mag van een eenheidsvierkant naar een ander indien de afstand tussen de twee middelpunten van deze vierkanten gelijk is aan $\sqrt{r}$, waarin r een gegeven positief geheel getal is. Men probeert nu een serie zetten te vinden, die achtereenvolgens uitgevoerd leidt van het eenheidsvierkant met hoekpunt A naar het eenheidsvierkant met hoekpunt B.

1. Laat zien dat zo'n serie zetten niet bestaat als r deelbaar is door 2 of door 3.
2. Bewijs dat zo'n serie zetten wel bestaat als $r = 73$.
3. Bestaat er zo'n serie zetten als $r = 97$?

Vraag 3.30 (IMO 1986-3)**.** Aan elk hoekpunt van een regelmatige vijfhoek wordt een geheel getal toegevoegd zo, dat de som van deze vijf getallen strikt positief is. Indien aan drie opeenvolgende hoekpunten respectievelijk de getallen x,y en z toegevoegd zijn waarbij $y < 0$, dan is de volgende bewerking toegelaten: het drietal (x, y, z) wordt vervangen door het drietal $(x+y, -y, y+z)$. Deze bewerking wordt uitgevoerd zolang ten minste één van de vijf getallen strikt negatief is. Bepaal of dit procedé noodzakelijkerwijs stopt na een eindig aantal van deze bewerkingen.

4 Kansen

Stochastiek, kansrekening en combinatoriek zijn sterk gerelateerde onderwerpen die regelmatig voorkomen in IMC opgaven. Ook de technieken bij het onderwerp 'handig tellen' zul je hier soms goed toe kunnen passen, zoals recurrentie. Werk indien mogelijk ook eens een klein voorbeeld uit om een beter idee van de opgave te krijgen.

Binomiaalcoëfficiënten

Een veelgebruikt concept uit de combinatoriek is de binomiaalcoëfficient. Als n en k niet-negatieve gehele getallen zijn waarvoor $n \geq k$, dan is $\binom{n}{k}$ het aantal manieren om van n objecten er k uit te kiezen. Het wordt uitgesproken als "n boven k". Je kunt $\binom{n}{k}$ expliciet uitrekenen, zoals jullie waarschijnlijk al eens hebben gezien: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. In het bijzonder betekent dit ook dat $n!$ kennelijk deelbaar is door $k!(n-k)!$, hetgeen a priori niet vanzelfsprekend is.

Binomiaalcoëfficiënten voldoen aan een recurrentiebetrekking $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, want als je k van de n objecten moet kiezen, kun je ofwel k van de eerste $n-1$ objecten kiezen, of $k-1$ van de eerste $n-1$ elementen en verder nog het laatste element. Deze recurrentiebetrekking kan erg handig zijn bij het uitvoeren van een inductiebewijs.

Een andere bekende gelijkheid met binomiaalcoëfficiënten is het binomium van Newton: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

Je kunt binomiaalcoëfficiënten ook voor een groter domein van n en k definiëren, hoewel de relatie met objecten kiezen dan natuurlijk verloren gaat. Voor een niet-negatief geheel getal k en een willekeurig complex getal α schrijven we $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.

Het volgende voorbeeld is vooral een omdenktruukje, dat in vele gedaanten in combinatoriek opgaven opduikt.

Voorbeeld 4.1. Pietje heeft een mand met 20 eieren en wil elk ei in één van de kleuren rood, groen, paars, blauw, of geel schilderen. Hoeveel verschillende kleurcombinaties zijn er mogelijk voor de uiteindelijke mand gekleurde eieren?

Bewijs. A priori kan Pietje voor elk ei natuurlijk 5 keuzes maken, maar veel van de 5^{20} mogelijkheden die dit oplevert, geven uiteindelijk dezelfde kleurencombinatie in de mand gekleurde eieren. We zullen er dus op een andere manier over moeten nadenken.

Als het ons toch niet uitmaakt in welke volgorde Pietje aan het kleuren is, kunnen we net zo goed aannemen dat hij de kleuren één voor één afgaat: Eerst kleurt hij een aantal eieren rood, dan een paar groen, daarna is paars aan de beurt, dan blauw, en tenslotte worden eventuele overgebleven eieren geel gekleurd. In de rij van 20 eieren, moet Pietje dan 4 momenten kiezen waarop hij van kleur wisselt. (Dit mag natuurlijk ook twee keer achter elkaar als hij een kleur helemaal wil overslaan.) We zouden dit kunnen zien als een rij van 24 gebeurtenissen (20 keer 'ei kleuren' en 4 keer 'kleur wisselen'), en we moeten kiezen waar de 4 kleurwisselingen in deze rij liggen. Dit geeft ons $\binom{24}{4}$ mogelijkheden. □

Kansevenementen

Opgaven over kansrekening kunnen heel verschillend uitpakken. Opgave 2 bijvoorbeeld, heeft na even nadenken niet eens zoveel meer met kansrekening te maken. Andere opgaven lijken op het eerste gezicht juist niets met kansrekening te maken te hebben, maar kunnen met die aanpak heel goed worden opgelost. Zie bijvoorbeeld opgave 2.5:

Voorbeeld 4.2. Zij a_j, b_j en c_j gehele getallen voor $1 \leq j \leq N$. Stel dat voor elke j tenminste één van a_j, b_j en c_j oneven is. Laat zien dat er gehele getallen r, s en t zijn zodat $ra_j + sb_j + tc_j$ (voor $1 \leq j \leq N$) in minstens $4N/7$ van de gevallen oneven is.

Bewijs. Kies willekeurig een drietal (r, s, t) waarvoor $r, s, t \in \{0, 1\}$ en $(r, s, t) \neq (0, 0, 0)$. Elk mogelijk drietal krijgt kans $\frac{1}{7}$. De kans dat $ra_j + sb_j + tc_j$ oneven is, is dan voor elke j precies $\frac{4}{7}$. Laat de stochast X het aantal waarden van j zijn waarvoor $ra_j + sb_j + tc_j$ oneven is. We kunnen X zien als een som van stochasten X_j, die 1 zijn als $ra_j + sb_j + tc_j$ oneven is, en anders nul. De verwachtinswaarde van een som van stochasten is gelijk aan de som van de individuele verwachtingswaarden (ongeacht eventuele afhankelijkheid). De verwachtingswaarde van X is dus: $E[X] = \sum_{j=1}^{N} E[X_j] = \frac{4}{7}N$.

Uit deze verwachtinswaarde volgt dat er minstens één realisatie (r, s, t) bestaat waarvoor X minstens $\frac{4}{7}N$ wordt. □

Voor het oplossen van opgaven met behulp van kansrekening of stochastiek, is meestal geen ingewikkelde theorie nodig. Wel is het nuttig om goed na te denken wat een handige keuze voor je stochast of kansproces kan zijn.

Enkele nuttige stukjes elementaire stochastiek: Laat X en Y twee stochasten zijn, met uitkomstenruimte $\mathbb{C}$. Laat $A, B \subseteq \mathbb{C}$.

- De verwachtingswaarde van de som, is de som van de verwachtingswaarden:

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y].$$

- Je kunt ook naar voorwaardelijke kansen kijken. $P(X \in A \mid Y \in B)$ is de kans dat X in A terecht komt, als je al weet dat de uitkomst van Y in B ligt. Voor voorwaardelijke kansen geldt de regel van Bayes:

$$P(X \in A \text{ en } Y \in B) = P(X \in A \mid Y \in B) \cdot P(Y \in B).$$

- De variantie van de stochast X is gelijk aan de verwachtingswaarde van $(X - E[X])^2$:
$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2.$$
Voor een stochast waarvan de verwachtingswaarde eindig is, en de variantie eindig en ongelijk aan nul, geldt de Bienaymé-Chebyshev ongelijkheid:
$$P\left(|X - E[X]| \geq \epsilon \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(X)}\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2}$$

- Voor *onafhankelijke* stochasten X en Y geldt dat
$$P(X \in A \text{ en } Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B).$$
Ook geldt dat
$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y], \quad \mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$
en
$$P(X \in A \mid Y \in B) = P(X \in A).$$

Probeer nu aan de volgende opgaven te werken, en kijk hoe en of je kansrekening en combinatoriek erbij kunt toepassen.

Vraag 4.1. Een oneerlijke munt die kans p heeft op kop wordt n keer gegooid. Wat is de kans dat er een even aantal keer kop boven komt?

Vraag 4.2. Een pijltje, willekeurig gegooid, raakt een vierkant doel. Stel dat elke twee gebieden van het doel van gelijk oppervlakte gelijke kans hebben om geraakt te worden. Bepaal de kans dat het geraakte punt dichter bij de rand ligt dan bij het midden van het vierkant. Druk het antwoord uit in de vorm $q\sqrt{a} + r$, net $q, r \in \mathbb{Q}$ en $a \in \mathbb{N}$.

Vraag 4.3. Zij $m, n \in \mathbb{N}$. Laat zien dat
$$\frac{(m+n)!}{(m+n)^{m+n}} < \frac{m!}{m^m}\frac{n!}{n^n}.$$

Vraag 4.4. We gooien een eerlijke dobbelsteen n keer. Wat is de kans dat de som van de waarden deelbaar is door 5?

Vraag 4.5. Laat zien dat voor elke $x \in [0, 1]$ en gehele getallen $n, m \geq 1$ geldt dat:
$$(1 - (1 - x)^m)^n + (1 - x^n)^m \geq 1.$$

Vraag 4.6. Twee reële getallen worden willekeurig gekozen uit het interval $(0, 1)$ met de uniforme verdeling. Wat is de kans dat het gehele getal dat het dichtst bij x/y ligt even is? Druk het antwoord uit in de vorm $r + s\pi$ voor $r, s \in \mathbb{Q}$.

Vraag 4.7. Je hebt munten $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Voor elke k heeft de munt C_k kans $1/(2k+1)$ om op kop uit te komen. Als alle n munten worden opgegooid, wat is dan de kans dat het aantal munten dat op kop landt oneven is? Druk het antwoord uit als rationale functie in n.

Vraag 4.8. Voor gehele, positieve n en m definieer $f(n,m)$ als het aantal n-tuples $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ van gehele getallen die voldoen aan $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \leq m$. Laat zien dat $f(n,m) = f(m,n)$.

Hint: bekijk de situatie eerst eens als alle x_i positief moeten zijn.

Vraag 4.9. Zij r, s en t gehele getallen met $0 \leq r, s$ en $r + s \leq t$. Laat zien dat

$$\frac{\binom{s}{0}}{\binom{t}{r}} + \frac{\binom{s}{1}}{\binom{t}{r+1}} + \cdots + \frac{\binom{s}{s}}{\binom{t}{r+s}} = \frac{t+1}{(t+1-s)\binom{t-s}{r}}$$

Vraag 4.10. Zij C de eenheidscirkel $\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$. Een punt p wordt willekeurig gekozen op de cirkel C en een punt q willekeurig uit het binnentste van de cirkel (i.e. de cirkelschijf), beide met uniforme verdeling over de verzameling waar ze gekozen kunnen worden. Zij R de rechthoek met zijden parallel met de x en y-as met diagonaal pq. Wat is de kans dat heel R binnen C ligt?

Vraag 4.11. Laat A_1, A_2, $\ldots$, A_k willekeurige eindige verzamelingen zijn. Definieer de functie $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ als:

$$f(t) := \sum_{m=1}^{k} \sum_{i_1 < 1_2 < \cdots < i_m} (-1)^{m-1} t^{|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots A_{i_m}|}.$$

Laat zien dat f strikt stijgend is.

Hint: bekijk de verzameling $S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ en definieer een kansproces (dat van t afhangt) om hier een deelverzameling T uit te selecteren. Probeer dit kansproces zo te kiezen dat $t^{|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots A_{i_m}|}$ een mooie interpretatie als kansevenement heeft.

Vraag 4.12. Zij $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ voor een $n \in \mathbb{Z}_{>1}$. We zeggen dat een permutatie $\sigma \in S_n$ een lokaal maximum heeft in $k \in S$ als

1. $k = 1$ en $\sigma(1) > \sigma(2)$;
2. $1 < k < n$ en $\sigma(k-1), \sigma(k+1) < \sigma(k)$;
3. $k = n$ en $\sigma(n-1) < \sigma(n)$.

Wat is de verwachting van het aantal locale minima van een willekeurige permutatie (gekozen met uniforme verdeling) van S_n?

Vraag 4.13. Voor $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definieer $Q(n,k)$ als de coefficient van x^k in $(1 + x + x^2 + x^3)^n$. Bewijs dat

$$Q(n,k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{n}{k-2j}.$$

Vraag 4.14. Zij α een irrationaal getal met $0 < \alpha < 1$. Bestaat er een eindig spel tussen A en B met een eerlijke munt zodat de kans dat speler A wint gelijk is aan α? (Een eerlijke munt komt met kans 1/2 op munt en met gelijke kans op kop. Een spel is eindig als de kans dat het in een eindig aantal beurten afgelopen is gelijk is aan 1.)

Vraag 4.15. Zij $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ een willekeurig punt uit het n-dimensionale gebied gedefinieerd door $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$. Zij f een continue functie op $[0, 1]$ met $f(1) = 0$. Stel $x_0 = 0$ en $x_{n+1} = 1$. Laat zien dat de verwachte waarde van de Riemann som

$$\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1} - x_i)f(x_{i+1})$$

gelijk is aan $\int_0^1 f(t)P(t)dt$, waar P een polynooom van graad n is, onafhankelijk van f, met $0 \leq P(t) \leq 1$ voor $0 \leq t \leq 1$.

Vraag 4.16. Zij $n \geq 4$ gegeven en stel dat $P_1, P_2, \ldots, P_n$ onafhankelijk en uniform gekozen punten op een cirkel zijn. Beschouw de convexe n-hoek met de P_i als hoekpunten. Hoe groot is de kans dat minstens één van de hoekpunten van deze n-hoek scherp is?

5 Lineaire algebra

Veel IMC-opgaven gaan over lineaire algebra. In principe is lineaire algebra de studie van lineaire afbeeldingen tussen vectorruimtes. Een eigenschap van deze afbeeldingen is dat ze gerepresenteerd kunnen worden door een blok getallen (een matrix), nadat een basis is gekozen. Een matrix A is dus een lineaire afbeelding $L : V \to W$ tezamen met bases voor de vectorruimtes V en W. Omdat matrices makkelijk zijn om mee te werken, wordt er vaak over de matrix gesproken in plaats van over de bijbehorende lineaire afbeelding. Een eigenschap van de matrix A kan echter pas gezien worden als een eigenschap van de lineaire afbeelding L als de eigenschap *basisonafhankelijk* is. Bij opgaven over lineaire algebra is het soms goed om over matrices na te denken als lineaire afbeeldingen en andersom.

In tegenstelling tot de voorgaande onderwerpen, is voor lineaire algebra wel extra wiskundekennis nodig. In dit hoofdstuk zetten we de belangrijkste stellingen en definities op een rijtje.

Inverse matrix

Bij het oplossen van matrixvergelijkingen kan het handig zijn om de inverteerbaarheid van een bepaalde matrix te gebruiken. Herinner je dat een $n \times n$ matrix A is *inverteerbaar* als aan één van de volgende equivalente condities is voldaan:

(i) De bijbehorende lineaire afbeelding is bijectief;

(ii) Er is een matrix B zodat $AB = I$;

(iii) Er is een matrix B zodat $BA = I$.

In het bijzonder zien we dat $BA = I$ wanneer we weten dat $AB = I$. Merk op dat matrices in het algemeen niet commuteren, dus dit is niet triviaal.

Voorbeeld 5.1 (IMC, Vraag 1)**.** Stel dat A en B reële $n \times n$ matrices zijn zodat $AB + A + B = 0$. Bewijs dat $AB = BA$.

Bewijs. De conditie $AB + A + B = 0$ geeft

$$I = AB + A + B + I = (A + I)(B + I).$$

Dit betekent dat $A + I$ en $B + I$ elkaars inverse zijn, dus ze commuteren. Er geldt dus ook dat

$$I = (B + I)(A + I) = BA + A + B + I$$

en als we de twee bovenstaande vergelijkingen van elkaar aftrekken, dan zien we dat $AB - BA = 0$, oftewel $AB = BA$. $\square$

Diagonaliseerbaarheid

Een $n \times n$ matrix A is *diagonaliseerbaar* als er een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix Λ bestaan zodat $A = P\Lambda P^{-1}$. In dat geval weten we dat

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

waar $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de eigenwaarden zijn van A en dat de kolommen van P de eigenvectoren van A zijn. Door de eigenwaarden en eigenvectoren van A te berekenen vinden we dus de decompositie $A = P\Lambda P^{-1}$. Nu is de matrix van eigenvectoren alleen inverteerbaar als er n lineair onafhankelijke eigenvectoren bestaan en dit betekent dat A diagonaliseerbaar is dan en slechts dan als er n lineair onafhankelijke eigenvectoren bestaan.

Diagonaalmatrices zijn fijn om mee te werken, dus het is altijd handig om, wanneer mogelijk, je matrix te diagonaliseren. De volgende spectraalstelling kan hierbij van pas komen.

Stelling 5.2 (Spectraalstelling)**.** *Als een $n \times n$ matrix A zelfgeadjungeerd is (i.e. $\overline{A}^* = A$), dan is A diagonaliseerbaar ten opzichte van een orthonormale matrix. In het bijzonder zijn alle eigenwaarden van A dan reëel.*

Merk op dat $A^* = A^T$ als A een reële matrix is. Herinner je ook dat een vierkante matrix A orthonormaal is als alle kolomvectoren loodrecht op elkaar staan en norm 1 hebben, wat betekent dat $A^*A = I$.

Voorbeeld 5.3 (IMC 2012, Vraag 1)**.** Laat A en B twee reële symmetrische matrices zijn waarvan alle eigenwaardes strict groter zijn dan 1. Zij λ een eigenwaarde van AB. Bewijs dat $|\lambda| > 1$.

Bewijs. Vanwege de spectraalstelling vinden we orthogonale matrices P en Q en diagonaalmatrices Λ en Σ zodanig dat

$$A = P\Lambda P^{-1} \quad \text{en} \quad B = Q\Sigma Q^{-1}.$$

Door de kolommen van P en Q zo nodig door hun norm te delen mogen we aannemen dat P en Q zelfs ortho*normaal* zijn. Het is nu cruciaal om in te zien dat orthonomale matrices normbehoudend zijn, i.e. $||Pv|| = ||v|| = ||Qv||$ voor iedere vector $v \in \mathbb{R}^n$. Het idee is nu dat A en B alle vectoren 'vergroten' omdat alle eigenwaarden strict groter dan 1 zijn. Er geldt voor iedere $v \in \mathbb{R}^n$ dat $||Q^{-1}v|| = ||v||$ en omdat diagonaalentries van Σ allemaal strict groter dan 1 zijn (het zijn de eigenwaarden van B) zien we dat $||\Sigma Q^{-1}v|| > ||Q^{-1}v|| = ||v||$. Omdat Q orthonormaal is, volgt $||Bv|| = ||Q\Sigma Q^{-1}v|| = ||\Sigma Q^{-1}v|| > ||v||$, dus B vergroot alle vectoren. Op dezelfde manier vergroot A alle vectoren, dus ook AB: $||ABv|| > ||v||$ voor iedere $v \in \mathbb{R}^n$. Zij nu λ een eigenwaarde van AB met eigenvector w. Dan geldt er dus dat $|\lambda|||w|| = ||\lambda w|| = ||ABw|| > ||w||$, dus $|\lambda| > 1$, zoals verlangd. $\square$

Jordannormaalvorm

Een belangrijke stelling binnen de lineaire algebra is de stelling van Jordan. De stelling zegt dat iedere matrix bijna gediagonaliseerd kan worden. Wanneer je niet weet of je matrix wel diagonaliseerbaar is, is het vaak net zo handig om de Jordannormaalvorm van de matrix te gebruiken.

Stelling 5.4 (Jordan)**.** *Als A een $n \times n$ matrix is, dan is er een inverteerbare matrix P zodanig dat $A = PJP^{-1}$, waar J een matrix is in de* Jordannormaalvorm

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & J_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & J_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & J_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

en de matrices J_i (de Jordanblokken*) van de vorm*

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

zijn. Op volgorde na zijn de blokken J_i uniek bepaald door$A$.

Deze stelling zegt dus dat iedere matrix equivalent is aan een 'diagonaalmatrix' met een aantal enen boven de diagonaal. Er is ook een stelling die hetzelfde zegt, maar waar de enen net onder de diagonaal staan. Een matrix is diagonaliseerbaar dan en slechts dan als alle Jordanblokken dimensie 1 hebben. De waardes λ_i die op de diagonaal staan zijn de eigenwaarden van A. In het bijzonder, als A n verschillende eigenwaardes heeft, dan moeten alle Jordanblokken dimensie 1 hebben en is A diagonaliseerbaar.

Rang

De *rang* van een $n \times n$ matrix A is gedefinieerd als $\text{rk}(A) := \dim \text{Im}(A) = n - \dim \ker(A)$. We zagen al dat A inverteerbaar is dan en slechts dan $\text{rk}(A) = n$. Behalve dat de rang handig kan zijn om te bepalen of een matrix inverteerbaar is, kan er op het IMC ook een vraag voorkomen die letterlijk om de rang van een bepaalde matrix vraagt. Vaak moet je dan gebruik maken van de volgende rekenregels voor de rang.

Propositie 5.5 (Rekenregels voor de rang)**.** *Voor alle $n \times n$ matrices A en B geldt dat*

1. *$rk(A + B) \leq rkA + rkB$,*
2. *rkA verandert niet als je rijen of kolommen van A permuteert,*

3. *rkA verandert niet als je rijen of kolommen met een scalar vermenigvuldigt of als je ze bij elkaar optelt:*

$$rk[A_1|A_2|\ldots|A_n] = rk[\lambda A_1|A_2|\ldots|A_n] = rk[A_1|A_2+A_1|\ldots|A_n],$$

4. *rkA* $= 0$ *desda* $A = 0$ *is de nulmatrix en rkA* $= 1$ *dan en slechts dan als alle rijen een veelvoud zijn van de eerste rij*

5. *als* A_n *een lineaire combinatie is van de* A_j *voor* $j < n$*, dan verandert het verwijderen van de* n*-de kolom de rang niet:*

$$rk[A_1|A_2|\ldots A_{(n-1)}|A_n] = rk[A_1|A_2|\ldots|A_{n-1}].$$

Om in te zien waarom de bovenstaande regels gelden, helpt het om A te zien als een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar zichzelf. Dan is rk$A$ de dimensie van het beeld van die afbeelding.

Voorbeeld 5.6 (IMC, Problem 1)**.** Zij A de $n \times n$ matrix met entries $A_{ij} = i + j$, waar $n \geq 2$. Bereken rk(A).

Bewijs 1. We trekken de eerste rij van de volgende rijen af en daarna trekken we de eerste kolom van de volgende kolommen af:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rk}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \ldots \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} &= \mathrm{rk}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \ldots \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \\
&= \mathrm{rk}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \\
&= \mathrm{rk}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2
\end{aligned}$$

In het laatste gelijkteken hebben we gebruik dat alle kolommen, behalve de eerste, een veelvoud zijn van de tweede kolom en dat hetzelfde geldt voor de rijen. De rang van de 2×2 matrix is duidelijk 2, dus het antwoord is 2. $\square$

Spoor

Het *spoor* (in het Engels 'trace') van een vierkante matrix A is gedefinieerd als de som van de diagonaalentries, oftewel $\mathrm{Tr}(A) = \sum_i A_{ii}$.

Propositie 5.7 (Eigenschappen van het spoor)**.** *Voor alle $n \times n$ matrices A en B geldt*

(i) $\mathit{Tr}(AB) = \mathit{Tr}(BA)$*;*

(ii) de trace is basisonafhankelijk, oftewel $\mathit{Tr}(BAB^{-1}) = \mathit{Tr}(A)$ *als B inverteerbaar is;*

(iii) de trace is lineair, oftewel $\mathit{Tr}(\alpha A + B) = \alpha\,\mathit{Tr}(A) + \mathit{Tr}(B)$ *voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$;*

(iv) de trace is de som van de eigenwaarden, geteld met multipliciteit en

(v) $\mathit{Tr}(A^T) = \mathit{Tr}(A)$.

Eigenschap (i) kun je bewijzen door de vermenigvuldiging uit te schrijven en (ii) volgt uit (i). De eigenschappen (iii) en (v) volgen direct uit de definitie en (iv) kun je inzien door de matrix in Jordannormaalvorm te schrijven.

Determinant

De precieze definitie van de determinant is ingewikkeld, maar kan toch af en toe van pas komen.

Definitie 5.8. Zij A een $n \times n$ matrix en S_n de symmetrische groep van alle permutaties op n elementen. Dan is

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)},$$

waar $\epsilon(\sigma)$ het teken van σ voorstelt.

Ook de determinant is onafhankelijk van de gekozen basis. Merk op dat $\det A \neq 0$ dan en slechts dan als A volle rang heeft. Dus als je een kolom kan schrijven als een lineaire combinatie van andere kolommen van A, dan weet je meteen dat $\det A = 0$. Verder zijn de volgende rekenregels handig bij het berekenen van determinanten:

Propositie 5.9 (Rekenregels determinant)**.** *Voor iedere $n \times n$ matrix A geldt dat*

1. $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ *is het product van de eigenwaarden, geteld met de juiste multipliciteit;*
2. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ *voor iedere $n \times n$ matrix B;*
3. $\det A = \det A^\top$*;*
4. *als je rijen of kolommen van A verwisselt, dan verandert* $\det A$ *met een minteken;*
5. *als je een rij of een kolom schaalt met een factor α, dan schaalt ook de determinant met een factor α. In het bijzonder geldt er* $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$*;*
6. $\det A$ *verandert niet als je rijen of kolommen bij elkaar optelt:*
$$\det[A_1|A_2|\ldots|A_n] = \det[A_1|A_2 + A_1|\ldots|A_n];$$
7. *als A onder- of bovendriehoeks is, dan is* $\det A$ *het product van de diagonaalentries.*

Polynomen van matrices

Het *karakteristiek polynoom* van een $n \times n$ matrix A is gedefinieerd als

$$\chi_A(x) := \det(A - xI).$$

Het karakteristiek polynoom van A bevat veel informatie over A. Zo is de constante term gelijk aan $\det A$ en de coëfficient van x^{n-1} is $\pm \mathrm{Tr} A$. De nulpunten van $\chi(A)$ zijn de eigenwaarden van A. Verder heeft $\chi(A)$ graad n met kopcoëfficiënt $(-1)^n$. Een handige stelling is de volgende.

Stelling 5.10. *Voor iedere twee vierkante matrices A, B, geldt dat $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$.*

Een speciaal geval van deze stelling is dat $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ en dat $\det(AB) = \det(BA)$ (dit wisten we al). Als A of B inverteerbaar is, dan volgt deze stelling uit de multiplicativiteit van de determinant en het feit dat $AB - xI = A(BA - xI)A^{-1}$. Voor algemene matrices is het iets ingewikkelder.

Stelling 5.11 (Cayley-Hamilton)**.** *Voor iedere matrix A geldt $\chi_A(A) = 0$.*

Hier moet je $\chi_A(A)$ opvatten als het polynoom in A dat je krijgt door de coëfficienten a_i op te vatten als diagonaalmatrices $a_i I$.

Definitie 5.12. Voor een $n \times n$ matrix A definiëren we het *minimumpolynoom* μ_A van A als het monische polynoom van de laagste graad zodanig dat $\mu_A(A) = 0$.

Stelling 5.13. *Zij A een $n \times n$ matrix. Als p een polynoom is zodat $p(A) = 0$, dan geldt $\mu_A \mid p$. Bovendien is*

$$\mu_A(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} \cdots (x - \lambda_t)^{d_t},$$

waar d_i het maximum is van de dimensies van de Jordanblokken behorende bij de eigenwaarde λ_i.

Bewijs. Voor de eerste bewering, schrijf $p = q\mu_A + r$ voor polynomen q en r zodanig dat $\deg(r) < \deg(\mu_A)$ (deling met rest). Evalueren in A geeft nu dat $r(A) = 0$, in tegenspraak met de minimaliteit van μ_A, tenzij $r = 0$.

In het bijzonder hebben we dus $\mu_A \mid \chi_A$ en alle nulpunten van μ_A zijn dus eigenwaarden van A. Zij nu J de Jordannormaalvorm van de matrix A zodanig dat $A = PJP^{-1}$. Als p een polynoom is, dan is $p(A) = Pp(J)P^{-1}$, dus $p(A) = 0$ dan en slechts dan als $p(J) = 0$. We kunnen dus net zo goed naar de Jordannormaalvorm van A kijken. Als

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_n \end{pmatrix} \text{ dan } p(J) = \begin{pmatrix} p(J_1) & & & \\ & p(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(J_n) \end{pmatrix},$$

omdat dit goed gaat voor machten. We willen dus zien wanneer $p(J_i) = 0$ voor alle i. Omdat λ_i de enige eigenwaarde is van J_i en $\mu_{J_i} \mid \chi_{J_i}$, zien we dat $\mu_{J_i}(x) = (x - \lambda_i)^{e_i}$

voor zekere $e_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Voor alle i, definieer nu k_i als de dimensie van J_i en λ_i als de bijbehorende eigenwaarde. Dan zien we dat $J_i - \lambda_i I$ de $k_i \times k_i$ matrix is met alleen enen boven de diagonaal:

$$J_i - \lambda_i I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}.$$

Het is gemakkelijk in te zien dat voor zo'n matrix precies nul is als je die tot de macht van zijn dimensie verheft. Er geldt dus $e_i = k_i$. We hebben dus de minimumpolynomen van de blokken J_i gevonden. Omdat $p(J) = 0$ dan en slechts dan $p(J_i) = 0$ voor alle i, krijgen we dus het minimumpolynoom van J door de μ_{J_i} te vermenigvuldigen, mits we rekening houden met blokken met dezelfde eigenwaarde: dan voldoet het om alleen het grootste blok te nemen. □

Voorbeeld 5.14. Beschouw de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dan $\mu_A(x) = (x-1)(x-2)$ en $\chi_A(x) = (x-1)^2(x-2)$.

Gevolg 5.15. *(i) Als p een polynoom is zodat $p(A) = 0$, dan zijn alle eigenwaarden van A een nulpunt van p.*

(ii) Als p een polynoom is zodat $p(A) = 0$ en p heeft alleen enkelvoudige nulpunten, dan is A diagonaliseerbaar.

Dit gevolg kan heel nuttig zijn bij het oplossen van matrixvergelijkingen.

Voorbeeld 5.16. Laat zien dat er geen 2×2 matrices A bestaan zodat $A^3 + A = 2A^2$ en $\mathrm{Tr}(A) = 3$.

Bewijs. Stel dat A een matrix is zodat $p(A) = A^3 - 2A^2 + A = 0$. We zien dat $p(x) = x(x-1)^2$, dus de eigenwaarden λ_1 en λ_2 van A zijn bevat in $\{0, 1\}$ wegens bovenstaand gevolg. Op geen enkele manier kan nu $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 3$ gelden. □

Nulpotentie

Definitie 5.17. En $n \times n$ matrix A heet *nulpotent* wanneer er een $k > 0$ is zodanig dat $A^k = 0$.

Een nulpotente matrix heeft dus potentie om de nulmatrix te worden. Vragen over nulpotentie komen relatief vaak voor. Het is daarom goed om de volgende equivalente formuleringen te kennen.

Propositie 5.18. *De volgende uitspraken zijn equivalent:*

1. *A is nulpotent, i.e. $A^k = 0$ voor een k;*
2. *$A^n = 0$, waar n de dimensie is;*
3. *de enige eigenwaarde van A is 0;*
4. *$\mathit{Tr}A^k = 0$ voor $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ en*
5. *$\chi_A(\lambda) = \lambda^n$.*

De meeste equivalenties kun je inzien door gebruik te maken van de Jordannormaalvorm. De enige lastige implicatie is $4 \implies 1$.

Opgaven

Vraag 5.1. Laat zien dat er geen vierkante matrices A en B bestaan zodat $AB - BA = I$.

Vraag 5.2 (IMC 2014, Vraag 1)**.** Bepaal alle paren (a, b) van reële getallen waarvoor er een unieke symmetrische 2×2 matrix M met reële entries bestaat zodanig dat $\mathrm{Tr}(M) = a$ en $\det(M) = b$.

Vraag 5.3. Zij P een vierkante matrix waarvoor de som van de entries uit iedere kolom gelijk is aan 1. Laat zien dat 1 een eigenwaarde is van P.

Vraag 5.4. Een $n \times n$ matrix A heet een *involutie* als $A^2 = I$. Laat zien dat involuties diagonaliseerbaar zijn.

Vraag 5.5. Zij X een inverteerbare $n \times n$ matrix met kolommen $X_1, X_2, \ldots X_n$ en zij Y de matrix met kolommen $X_2, X_3, \ldots, X_n, 0$. Definieer $A := YX^{-1}$ en $B := X^{-1}Y$. Vind de rangen en eigenwaarden van A en B.

Vraag 5.6. Zij $a, d \in \mathbb{R}$ en A de $n \times n$ matrix gegeven door $A_{ij} = a + |i - j| \cdot d$. Bepaal $\det A$.

Vraag 5.7. Zij A de $n \times n$ matrix gegeven door $A_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|} & \text{if } i \neq j \\ 2 & \text{if } i = j \end{cases}$. Bepaal $\det A$.

Vraag 5.8 (IMC, Vraag 1)**.** Zij A een inverteerbare $n \times n$ matrix met positieve reële entries. Laat zien dat A^{-1} ten hoogste $n^2 - 2n$ nullen bevat.

Vraag 5.9. Zij $V = \mathbb{R}^{10}$ en U_1 en U_2 twee lineaire deelruimtes van dimensies 3, respecitevelijk 6 met $U_1 \subset U_2$. Zij $\mathcal{E}$ de verzameling van lineaire afbeeldingen $T : V \to V$ die U_1 en U_2 invariant laten (i.e. $T(U_1) \subset U_1$ en $T(U_2) \subset U_2$). Bereken de dimensie van $\mathcal{E}$ als reële vectorruimte.

Vraag 5.10. Zij A een reële 4×2 matrix en B een reële 2×4 matrix zodat

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vind BA.

Vraag 5.11. Aan elke positief getal van n^2 cijfers voegen we de determinant toe van de matrix verkregen door de cijfers van het getal in volgorde op te schrijven langs de rijen. Bijvoorbeeld aan 8617 voegen we det $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ toe. Bepaal, als functie van n, de som van de determinanten toegevoegd aan alle getallen van n^2 cijfers. (We bekijken alleen getallen zonder voorafgaande nullen, voor $n = 2$ zijn er zo 9000 determinanten.)

Vraag 5.12. Zij A, B, C reële $n \times n$ matrices zodat A inverteerbaar is en $(A - B)C = BA^{-1}$. Laat zien dat $C(A - B) = A^{-1}B$.

Vraag 5.13. Laat A en B complexwaardige vierkante matrices zijn van dezelfde grootte en stel dat $\mathrm{rk}(AB - BA) = 1$. Laat zien dat $(AB - BA)^2 = 0$.

Vraag 5.14. Zij A en B twee 2×2 matrices met gehele coefficienten zodat $A + kB$ voor $k = 0, 1, \ldots, 4$ allen inverteerbaar zijn en dat hun inverses ook gehele coefficienten hebben. Laat zien dat ook $A + 5B$ inverteerbaar is en dat de inverse ook gehele coefficienten heeft.

Vraag 5.15 (IMC 2014, Vraag 2)**.** Zij $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ een symmetrische $n \times n$ matrix met reële entries en eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Toon aan dat

$$\sum_{1 \le i < j \le n} a_{ii} a_{jj} \ge \sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j$$

en bepaal alle matrices waarvoor gelijkheid geldt.
Hint: $(x_1 + \ldots + x_n)^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j$ *voor alle* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Vraag 5.16 (IMC 2005, Vraag 3)**.** In de lineaire ruimte van alle $n \times n$ matrices, vind de grootst mogelijke dimensie van een lineaire deelruimte V zodanig dat

$$\mathrm{Tr}(XY) = 0 \text{ voor alle } X, Y \in V.$$

Hint: bereken eens $Tr(AA^T)$.

Vraag 5.17. Zij $f : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ lineair (i.e. $f(\alpha A + \beta B) = \alpha f(A) + \beta f(B)$) voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$ en alle $n \times n$ matrices A en B).

1. Laat zien dat er een unieke matrix C bestaat, zodanig dat$f(A) = \mathrm{Tr}(AC)$.

2. Laat zien dat als bovendien $f(AB) = f(BA)$, dan $f(A) = \lambda \mathrm{Tr} A$.

Hint voor (a): bekijk eerst eens hele simpele matrices A en kijk wat de conditie voor gevolg heeft voor de entries van C.

Vraag 5.18. Vind alle inverteerbare matrices A met niet-negatieve reële entries, zodanig dat A^{-1} ook niet-negatieve entries heeft.
Hint: beschouw AA^{-1}.

Vraag 5.19 (IMC, Problem 2)**.** Zij A een $n \times n$ matrix met de getallen $1, 2, 3, \ldots, n^2$ als entries. Wat kan $\text{rk}A$ zijn?

Vraag 5.20. Zij $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zodanig dat $A^2 = A,\ B^2 = B$, en $A + B - I$ inverteerbaar is. Toon aan dat $\text{rk}A = \text{rk}B$.

Vraag 5.21. Laat A en B reële $n \times n$ matrices zijn zodanig dat $AB = A + B$. Toon aan dat $\text{rk}A = \text{rk}B$.

Vraag 5.22 (IMC, vraag 1)**.**

1. Laat zien dat voor iedere $n \geq 1$, er een reële $n \times n$ matrix A bestaat zodanig dat $A^3 = A + I$.
2. Laat zien dat $\det A > 0$ wanneer A een reële matrix is met $A^3 = A + I$.

Vraag 5.23 (IMC, vraag 2)**.** Laat zien dat er geen reële 3×3 matrix A bestaat zodat $A^2 + A^T = I$ en $\text{Tr}A = 0$.
Hint: vind eerst een polynoom p zodat $p(A) = 0$.

Vraag 5.24. Stel dat A een matrix is zodat $3A^3 = A^2 + A + I$. Laat zien dat $\lim_{k\to\infty} A^k$ bestaat en idempotent is (i.e. als $L := \lim_{k\to\infty} A^k$, dan $L^2 = L$).

Vraag 5.25. Definieer voor een vierkante matrix A de sinus als

$$\sin(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}.$$

Bestaat er een 2×2 matrix A zodat

$$\sin(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1996 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Vraag 5.26.

(a) Laat zien dat voor iedere twee commuterende nulpotente matrices A and B geldt dat $A + B$ ook nulpotent is.

(a) Geef een voorbeeld van twee nulpotente matrices A en B zodanig dat $A + B$ *niet* nulpotent is (in het bijzonder kunnen A en B dus niet commuteren).

Vraag 5.27 (IMC, Vraag 3)**.** Laat A en B twee $n \times n$ matrices zijn zodanig dat $A^2B + BA^2 = 2ABA$. Laat zien dat er een $k \geq 1$ is zodanig dat $(AB - BA)^k = 0$.
Hint: de conditie $A^2B + BA^2 = 2ABA$ betekent dat $AB - BA$ ergens mee commuteert.

Vraag 5.28. Laat A en B twee reële $n \times n$ matrices zijn zodanig dat $A + t_iB$ nulpotent is voor $n+1$ verschillende reële getallen $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$. Bewijs dat A en B ook nulpotent zijn.
Hint: Probeer de conditie "$A + tB$ is nulpotent" uit te drukken in een aantal polynomiale condities op t.

6 Rijen, recurrentie en reeksen

Rijen

Rijen komen vaak terug in IMC-opgaven en vaak op verschillende manieren. Herinner je ten eerste twee belangrijke stellingen over rijen:

(1) begrensde monotone rijen convergeren en

(2) begrensde rijen hebben een convergente deelrij.

Herinner je ook de rijtjedefinitie van continuïteit.

Definitie 6.1. Een functie f is continu dan en slechts dan als voor elk convergent rijtje (a_n) in het domein van f (i.e. alle a_n en de limiet liggen in dat domein) geldt

$$\lim f(a_n) = f(\lim a_n).$$

Dit heeft tot gevolg dat je in het geval van een recursief gedefinieerde rij gemakkelijk de mogelijke limietwaarden kunt bepalen. Stel dat een rij a_n gegeven is door de recurrente betrekking $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$ voor een zekere $k > 0$ en een functie f die in iedere variabele continu is, bijvoorbeeld $f(x, y) = 2x+3xy$. Als L de limiet is, dan geldt er dat

$$L = \lim_n a_n = \lim f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}) = f(\lim a_{n-1}, \ldots, \lim a_{n-k}) = f(L, L, \ldots, L).$$

Dit geeft je een vergelijking voor L, van waaruit je de mogelijke waardes van L vaak kan bepalen. Let wel op: je bewijst zo niet dat de rij ook naar L *convergeert*; dit zul je apart moeten aantonen. Als $k = 1$ en f een *contractie* is, dan kunnen we meer zeggen.

Stelling 6.2 (Banach fixpuntstelling)**.** *Zij X een gesloten interval in $\mathbb{R}$, of $X = \mathbb{R}$ of $X = \mathbb{C}$. Als $f : X \to X$ een* contractie *is, dat wil zeggen dat er een $c \in [0, 1)$ bestaat zodanig dat*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \text{ voor alle } x, y \in X,$$

dan is er een uniek fixpunt *van f, i.e. een uniek punt $x^* \in X$ zodanig dat $f(x^*) = x^*$. Bovendien geldt er voor iedere $x_0 \in X$ dat de rij gedefinieerd door $x_n = f(x_{n-1})$ convergeert naar x^*.*

Deze stelling ziet er ingewikkeld uit, maar het bewijs is niet zo moeilijk. Je kan met inductie bewijzen dat $|x_{n+1}-x_n| \leq c^n|x_1-x_0|$ en daarmee laten zien dat de rij Cauchy is. Als je wil bewijzen dat een functie f een contractie is, dan komt de middelwaardestelling vaak goed van pas.

Voorbeeld 6.3. Zij (x_n) de rij gedefinieerd door $x_0 = 1$ en $x_{n+1} = \frac{1}{2}\sin(x_n)$. Laat zien dat (x_n) convergeert en bepaal de limiet.

Bewijs. We bekijken $X = [0,1]$ en de functie $f : [0,1] \to [0,1]$ gegeven door $f(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$. We zien dan met de middelwaardestelling dat er voor alle $x, y \in [0,1]$ een $\xi \in (x,y)$ bestaat zodanig dat

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \le \frac{1}{2}|x - y|,$$

wat aantoont dat f een contractie is. De Banach fixpuntstelling zegt dus dat de rij (x_n) convergeert naar het unieke fixpunt van f op $[0,1]$. We zien dat $f(0) = 0$, dus de rij convergeert naar 0. □

Een andere handige stelling voor het berekenen van limieten is de volgende.

Stelling 6.4 (l'Hospital). *Zij f, g differentieerbare functies op een verzameling $S \subset \mathbb{R}$ zodanig dat de limiet*

$$L =: \lim_{x \to s} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

bestaat. Als $\lim_{x\to s} f(x) = \lim_{x\to s} g(x) = 0$ *of* $\lim_{x\to s} |g(x)| = +\infty$*, dan*

$$\lim_{x \to s} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Hierbij mag $s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Deze stelling zegt dus dat je onder goede voorwaarden boven en onder mag differentiëren en die limiet kunt uitrekenen. Ook voor rijtjes is dit handig.

Voorbeeld 6.5. Als $d > 0$, bewijs dan dat

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{d}{n}\right)^n = e^d.$$

Bewijs. We definiëren de functie $f(x) = x\log(1 + d/x) = g(x)/h(x)$, waar $g(x) = \log(1 + d/x)$ en $h(x) = 1/x$. Omdat $h(x) \to +\infty$ als $x \to \infty$, mogen we l'Hospital toepassen om te verkrijgen dat

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{d}{1 + d/x} = d.$$

Er volgt uit continuïteit dus dat

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{d}{n}\right)^n = \exp(\lim_{n\to\infty} f(n)) = e^d.$$

□

Om met limieten en integralen van rijtjes van functies te werken is het nuttig om te weten dat limiet en integraal verwisseld mogen worden, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx, \tag{6.1}$$

onder goede voorwaarden. Zoals altijd is het goed om in de praktijk eerst deze stelling toepassen en je pas later zorgen maken of het mag (cq. of aan de voorwaarden voldaan is). Herinner je ten eerste dat (6.1) geldt wanneer de rij (f_n) uniform convergeert. De volgende stelling geeft een andere voorwaarde.

Stelling 6.6 (Lebesgue gedomineerdeconvergentiestelling)**.** *Vergelijking* (6.1) *geldt als er een functie $g(x)$ bestaat zodat $g(x) \geq |f_n(x)|$ voor alle n en $\int_a^b g(x)dx < \infty$ en als daarnaast $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ bestaat voor alle $x \in (a, b)$.*

Reeksen

Een reeks is een ander woord voor somrij. Dit specifieke soort rijen komt vaak voor in de wiskunde (en in wiskundecompetities) en verdient daarom extra aandacht. In paragrafen 14 en 15 van Ross staan veel nuttige stellingen over reeksen; de belangrijkste nemen we nog even door. Herinner je ten eerste de worteltest.

Stelling 6.7 (worteltest)**.** *De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert als $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < 1$ en de reeks divergeert als $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} > 1$.*

De worteltest kan ook handig zijn in combinatie met hetvolgende.

Stelling 6.8. *Als $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ bestaat, dan bestaat $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ ook en zijn beide waarden gelijk.*

We nemen de meest voorkomende reeksen door.

Stelling 6.9 (meetkundige reeks)**.** *Als $x \neq 1$, dan geldt voor iedere $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ dat*

$$\sum_{k=1}^{n-1} x^k = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

Als $|x| < 1$, dan volgt er dus dat $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Deze stelling bewijs je door de eindige som te vermenigvuldigen met $1 - x$. Dan staat er een telescopische som die gelijk is aan $1 - x^n$. Dit is een truc die vaker werkt: vermenigvuldigen met de juiste factor zodat je som telescopisch wordt.

Stelling 6.10. *De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ convergeert dan en slechts dan als $\alpha > 1$.*

Verder kan het handig zijn om de volgende reeksen te onthouden.

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (convergent voor alle $x \in \mathbb{R}$);
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ (convergent voor alle x met $|x| < 1$);
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (convergent voor alle $x \in \mathbb{R}$);
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ (convergent voor alle $x \in \mathbb{R}$).

Vaak moet je een slimme afschatting bedenken om te laten zien dat een bepaalde reeks wel of niet convergeert.

Voorbeeld 6.11. Laat zien dat de som

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin \log n}{n^\alpha}$$

convergeert als $\alpha > 0$.

Bewijs. We definiëren $a_n := (-1)^n \frac{\sin \log n}{n^\alpha}$ en we nemen aan dat $\alpha > 0$.

Vanwege de alternating series test weten we dat de som zou convergeren als de term $\sin \log n$ er niet zou staan. Het idee is dat deze term er niet toe doet. De term $(-1)^n$ suggereert dat we naar twee opeenvolgende waarden moeten kijken. Beschouw dus

$$a_{2n-1} + a_{2n} = (-1)^{2n-1}\frac{\sin \ln(2n-1)}{(2n-1)^\alpha} + (-1)^{2n}\frac{\sin \log 2n}{(2n)^\alpha} = \frac{\sin \log 2n)}{(2n)^\alpha} - \frac{\sin \log(2n-1)}{(2n-1)^\alpha}.$$

Deze uitdrukking is van de vorm $f(2n) - f(2n-1)$, waar $f(x) = \frac{\log x}{x^\alpha}$. Vanwege de middelwaardestelling kunnen we voor iedere n een $x_n \in (2n-1, 2n)$ vinden zodat $f(2n) - f(2n-1) = f'(x_n)$. Laten we $f'(x)$ dus eens berekenen:

$$|f'(x)| = \left| \frac{\frac{1}{x} \cdot x^\alpha - \alpha x^{\alpha-1} \log x}{x^{2\alpha}} \right| \leq C_0 \frac{\log x}{x^{1+\alpha}} \leq C_1 \frac{1}{x^{1+\alpha/2}},$$

waar de C_i constantes zijn; we zijn alleen geïnteresseerd in het gedrag voor grote x. We vinden dat $f(2n) - f(2n-1)$ begrensd wordt door $\frac{C}{(2n-1)^{1+\alpha/2}}$. Omdat we weten dat $\sum_n \frac{1}{n^{1+\alpha/2}}$ convergeert, doet $\sum_n a_n$ dat ook. $\square$

Opgaven

Vraag 6.1. Bepaal $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

Vraag 6.2. Zij $x \in (0,1)$. Bereken het product

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + x^{2^n}\right).$$

Vraag 6.3. Zij $x, y > 0$. Bepaal twee rijtjes r_n en m_n door $r_1 = \frac{x+y}{2}$, $m_1 = \sqrt{xy}$ en $r_{n+1} = \frac{r_n+m_n}{2}$ en $m_{n+1} = \sqrt{r_n m_n}$ voor $n \geq 0$. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} r_n$ en $\lim_{n\to\infty} m_n$ bestaan en gelijk zijn.

Vraag 6.4. Stel dat $\{f_n\}_{n\geq 1}$ een rij continue functies op het interval $[0, 1]$ is, zodat

$$\int_0^1 f_m(x) f_n(x) dx = \delta_{n,m},$$

waar $\delta_{n,m} = 1$ als $n = m$ en $\delta_{n,m} = 0$ anders. Stel bovendien dat

$$\sup\{|f_n(x)| \mid x \in [0, 1],\ n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Laat zien dat $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ niet voor alle $x \in [0, 1]$ bestaat.
Hint: dit ruikt naar de gedomineerdeconvergentiestelling.

Vraag 6.5. Laat zien dat de rij (a_n) gegeven door

$$a_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{n}}}}$$

convergeert.
Hint: pas de worteltruc toe op $a_{n+1} - a_n$.

Vraag 6.6 (IMC 2014, vraag 2)**.** Beschouw de volgende rij

$$(a_n) = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots).$$

Vind alle paren (α, β) van positieve reële getallen zodat $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n^\alpha} = \beta$.
Hint: bekijk eerst een deelrij van (a_n) die makkelijker te bepalen is.

Vraag 6.7. Zij $\pi : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ een bijectie. Laat zien dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2}$$

divergeert.
Hint: zoek een universele ondergrens voor $\sum_{n=N}^{2N} \frac{\pi(n)}{n^2}$.

Vraag 6.8. Zij $B(n)$ het aantal enen in de binaire expansie van n. Bepaal of

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(n)}{n(n+1)}\right)$$

een rationaal getal is.

Vraag 6.9. Laat $\alpha(n)$ het aantal nullen zijn in de expansie van n in het 3-tallig stelsel. Voor welke positieve x convergeert de rij

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\alpha(n)}}{n^3}?$$

Vraag 6.10. Zij $d \in \mathbb{R}$. Voor elk geheel getal $m \geq 0$ definiëren we een rij $(a_m(j))_{j\geq 0}$ door $a_m(0) = d \cdot 2^{-m}$ en $a_m(j+1) = a_m(j)^2 + 2a_m(j)$ voor $j \geq 0$. Bepaal $\lim_{n\to\infty} a_n(n)$.

Vraag 6.11. Stel dat een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voldoet aan

$$\left|\sum_{k=1}^{n} 3^k(f(x+ky) - f(x-ky))\right| \leq 1,$$

voor $n \in \mathbb{N}$ en alle $x, y \in \mathbb{R}$. Bewijs dat f constant is.
Hint: probeer het somteken in de voorwaarde weg te werken, zodat je een bovengrens vindt voor $|3^k(f(x+ky) - f(x-ky))|$.

Vraag 6.12. Gegeven $\alpha \in \mathbb{R}$ definieer de rij a_n door $a_0 = \alpha$, $a_1 = 1$ en $a_{n+2} = |a_{n+1} - a_n|$ voor $n \geq 0$. Voor welke α bevat deze rij gelijke termen?

Vraag 6.13. Zij $f : [0,1] \to [0,1]$ een continue functie. Definieer een rij x_n door $x_{n+1} = f(x_n)$ voor $n \geq 1$, waar $x_1 \in [0,1]$ willekeurig gekozen kan worden. Bewijs dat x_n convergeert dan en slechts dan als

$$\lim x_{n+1} - x_n = 0.$$

Vraag 6.14. Stel dat $(a_n)_{n\geq 1}$ een stijgende rij positieve reële getallen is zodat $\lim a_n/n = 0$. Bestaan er oneindig veel positieve gehele getallen n zodat $a_{n-i} + a_{n+i} < 2a_n$ voor $i = 1, 2, \ldots, n-1$?

Vraag 6.15. Zij $f : [a,b] \to [a,b]$ een continue functie en zij $p \in [a,b]$. Definieer $p_0 = p$ en $p_{n+1} = f(p_n)$ voor $n \geq 0$. Stel dat de verzameling $T_p = \{p_n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ gesloten is. Laat zien dat T_p maar eindig veel elementen bevat.

NB: een verzameling $T \subset \mathbb{R}$ noemen we gesloten als het de limieten bevat van alle rijtjes s_n met $s_n \in T$ voor alle n.

Vraag 6.16. Zij $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ een continue functie en definieer de rij functies $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ door $f_0(x) = g(x)$ en

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)dt$$

voor $x \in (0,1]$ en $n \geq 0$. Bepaal $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor elke $x \in (0,1]$.

Vraag 6.17. Zij $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een bijectie van de natuurlijke getallen naar zichzelf. Zij bovendien $\{x_n\}_{n\geq 1}$ een rij reële getallen zodat

1. $|x_n|$ een dalende functie is van n;
2. $|\sigma(n) - n| \cdot |x_n| \to 0$ als $n \to \infty$;
3. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.

Zijn deze condities voldoende om te laten zien dat $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} = 1$?

7 Polynomen

Introductie

Een polynoom is een eindige som van *monomen*, termen van de vorm ax^n, met $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en waar a uit verschillende verzamelingen kan komen, hier alleen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$. Je kan met polynomen rekenen als met gehele getallen: je kan optellen, aftrekken en vermenigvuldigen. Ook kun je delen met rest.

Stelling 7.1 (deling met rest)**.** *Laat $p(x)$ en $g(x)$ twee (complexe) polynomen zijn. Dan zijn er unieke polynomen $q(x)$ en $r(x)$ zodanig dat $\deg(r) < \deg(g)$ en*

$$p(x) = q(x)g(x) + r(x).$$

Net zoals met gehele getallen, kun je de polynomen $q(x)$ en $r(x)$ bepalen door te staartdelen.

Het equivalent van priemgetallen voor polynomen zijn de lineaire factoren $(x - a)$. De hoofdstelling van de algebra zegt dat elk polynoom met coefficienten in $\mathbb{C}$ (en dus ook met coefficienten in $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ of $\mathbb{Z}$) een unieke ontbinding heeft in de vorm $p(x) = c\prod_{j=1}^{n}(x - a_j)$, op permutaties van de a_j na. Uit deze ontbinding kun je meteen de nulpunten van het polynoom vinden, namelijk de a_j. Deze expansie expliciet invullen kan vaak veel informatie over een polynoom geven. Anderzijds kun je gegeven de nulpunten dus makkelijk het polynoom maken.

Het verband tussen de coefficienten van een polynoom $p(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + x^n$ (dus de coefficient voor x^n is 1) en de nulpunten wordt gegeven door symmetrische polynomen, namelijk

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= -\sum_{j=1}^{n} a_j, \\ b_{n-2} &= \sum_{1\leq j<k\leq n} a_j a_k \\ b_{n-3} &= -\sum_{1\leq j<k<l\leq n} a_j a_k a_l \\ &\vdots \\ b_0 &= (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n, \end{aligned}$$

waar de a_j de n nulpunten weergeven.

De volgende stelling volgt direct uit de hoofdstelling van de algebra, maar is toch goed om een keer gezien te hebben.

Stelling 7.2 (Bezout)**.** *Als p een polynoom is met coëfficienten in $\mathbb{C}$ en $b \in \mathbb{C}$, dan is $x - b$ een factor van $p(x) - p(b)$.*

In het bijzonder zien we, wanneer p gehele coëfficiënten heeft en $a, b \in \mathbb{Z}$, dat $a - b$ altijd een deler is van $p(a) - p(b)$.

Nulpunten en de afgeleide

Een handig feitje om te weten over nulpunten, is dat ze bij polyomen met reële coëfficiënten in paren komen.

Stelling 7.3. *Als $p(x)$ een reëel polynoom is en $\alpha \in \mathbb{C}$, dan is $p(\alpha) = 0$ dan en slechts dan als $p(\overline{\alpha}) = 0$.*

Deze 'stelling' zie je in door simpelweg de hele uitdrukking $p(\alpha) = 0$ complex te conjungeren.

Verder geeft de hoofdstelling van de algebra aanleiding tot de volgende definitie.

Definitie 7.4. Een nulpunt α van een polynoom p met complexe coëfficiënten heeft *multipliciteit* k als er $c \in \mathbb{C}$ en nulpunten $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ zijn zodat

$$p(x) = c(x - \alpha)^k \prod_{j=1}^{n} (x - a_j)$$

en alle a_j ongelijk zijn aan α. Anders gezegd, de factor $x - \alpha$ komt precies k keer voor.

Behalve algebraische objecten zijn polynomen ook functies doordat je getallen erin kunt vullen. In het bijzonder kun je ze differentiëren. Met behulp van de productregel vind je de volgende gelijkheid.

Stelling 7.5. *Zij $p(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$ een polynoom met complexe coëfficiënten (en nulpunten). Dan geldt er*

$$p'(x) = p(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - a_i}.$$

Door te delen door $p(x)$ vinden we een uitdrukking voor $p'(x)/p(x)$. Dit wordt ook wel de *logaritmische afgeleide* van p genoemd, omdat $p'(x)/p(x) = (\log p(x))'$ wanneer $\log p(x)$ bestaat. We zien met deze stelling bovendien het volgende.

Stelling 7.6. *Als α een nulpunt is van p met multipliciteit $k > 0$, dan is α een nulpunt van p' met multipliciteit $k - 1$.*

Door $k = 2$ te nemen, zien we bijvoorbeeld dat α een nulpunt is van p' wanneer α een nulpunt is van p'. Het omgekeerde is ook waar: als α een nulpunt is van p', dan is het een dubbel nulpunt van p. Op deze manier geeft p' dus informatie over de nulpunten van p.

Voorbeeld 7.7. Zij p een complex polynoom van graad n. Laat zien dat er ten minste $n+1$ verschillende $z \in \mathbb{C}$ zijn zodat $p(z) = 0$ of $p(z) = 1$.

Bewijs. We moeten dus laten zien dat het $2n$-degraads polynoom $q(z) = p(z)(p(z) - 1)$ ten minste $n+1$ verschillende nulpunten heeft. Natuurlijk kunnen we net zo goed aantonen dat $q(z)$ ten hoogste $n-1$ meervoudige nulpunten heeft, geteld met multipliciteit. We berekenen de afgeleide:

$$q'(z) = p'(z)(p(z) - 1) + p(z)p'(z) = p'(z)(p(z) + p(z) - 1).$$

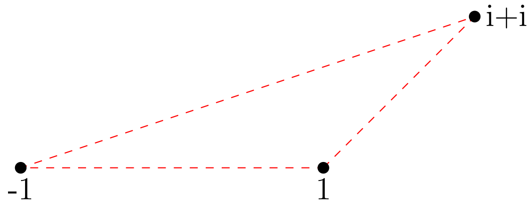
Stel dat α een nulpunt is van q met multipliciteit k. Dan is $p(z) = 0$ of $p(z) = 1$ en dus is $p(z) + p(z) - 1 \neq 0$. Daaruit zien dat de multipliciteit van α als nulpunt van q' gelijk is aan de multipliciteit als nulpunt van p'. Maar p' heeft graad $n-1$ en dus ook $n-1$ nulpunten. We zien dat het aantal meervoudige nulpunten van q, geteld met multipliciteit, dus ten hoogste $n-1$ is. Anders gezegd, q heeft $n+1$ verschillende nulpunten. $\square$

Andersom geven de nulpunten van p ook informatie over die van p'.

Stelling 7.8 (Gauss-Lucas)**.** *Zij f een polynoom met coëfficiënten in $\mathbb{C}$. Dan liggen alle nulpunten van f' in $\mathbb{C}$ binnen het* convexe omhulsel *van de nulpunten van f.*

Het convexe omhulsel van een stel punten in $\mathbb{C}$ is het kleinste convexe polygoon dat al die punten omvat. Formeel gezien is het convexe omhulsel van de punten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in $\mathbb{C}$ de verzameling van alle punten $\sum_{i=1}^n p_i\alpha_i$, waar alle $p_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ en $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Voorbeeld 7.9. Het convexe omhulsel van de punten $1, 2+i$ en -1 is de driehoek die deze punten verbindt.



Figuur 7.1: Het convexe omhulsel van de punten 1,-1 en $1+i$.

Het gedrag van een polynoom

Polynomen hebben altijd een kenmerkende grafiek. Er zijn nulpunten, maximaal n, en er zijn maxima en minima, maximaal $n-1$. De middelbareschooltrucjes om maxima en minima te bepalen werken nog steeds, maar houd er rekening mee dat $p'(a) = 0$ niet per se betekent dat a ook een extreem punt is.

Het is vaak ook handig om te kijken naar het limietgedrag van polynomen in oneindig, wat gegeven wordt door de term in het polynoom met de hoogste graad.

Tenslotte kun je de verzameling polynomen ook nog als (oneindigdimensionale) vectorruimte zien, met als basisvectoren de monomen 1, x, x^2, enzovoorts. Als je dan naar polynomen met een gegeven hoogste graad n kijkt, vormen die een gewone vectorruimte van graad $n+1$ en kun je daar allerlei lineaire algebra toepassen.

Opgaven

Vraag 7.1. Zij $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ een polynoom met complexe coëfficienten en complexe nulpunten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, waarvan alleen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ongelijk aan nul zijn. Wat zijn de coëfficiënten van het polynoom met alleen de nulpunten $1/\alpha_1, \ldots, 1/\alpha_k$?

Vraag 7.2. Bewijs de Stelling van Gauss-Lucas.
Hint: Gebruik Stelling 7.5.

Vraag 7.3. Zij p een polynoom van graad 2013 zodat $p(n) = \frac{n}{n+1}$ voor alle $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 2013\}$. Wat is $p(2014)$?
Hint: Vind eerste een polynoom $q(x)$ zodat de conditie $p(n) = \frac{n}{n+1}$ zich vertaalt naar $q(n) = 0$.

Vraag 7.4. Laat zien dat er geen polynoom $p(x)$ bestaat zodanig dat $p(n)$ priem is voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
Hint: laat eerst zien dat de coefficiënten van p in $\mathbb{Q}$ liggen.
In een simpelere versie van de vraag mag je aannemen dat p gehele coëfficiënten heeft.

Vraag 7.5. Laat $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positieve reële getallen zijn. Bewijs dat het polynoom

$$p(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - \ldots - a_n$$

een uniek positief nulpunt heeft.

Vraag 7.6 (IMC 2014, vraag 3)**.** Zij n een positief geheel getal. Laat zien dat er positieve reële getallen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ bestaan zodanig dat voor iedere keuze van de tekens het polynoom

$$\pm a_nx^n \pm a_{n-1}x^{n-1} \pm \cdots \pm a_1x \pm a_0$$

n verschillende reële nulpunten heeft.
Hint: Gebruik inductie.

Vraag 7.7. Vind een niet-nul polynoom $P(x, y)$ zodat $P(\lfloor a \rfloor, \lfloor 2a \rfloor) = 0$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.

Vraag 7.8. Zij k het kleinste positieve getal waarvoor er verschillende gehele getallen $m_1, m_2, \ldots, m_5$ bestaan zodat

$$p(x) = (x - m_1)(x - m_2)(x - m_3)(x - m_4)(x - m_5)$$

precies k niet-nul coefficienten bevat. Bepaal een verzameling $m_1, \ldots, m_5$ waarvoor dit minimum behaald wordt.

Vraag 7.9. Zij $p(x) = x^5 + x$ en $q(x) = x^5 + x^2$. Vind alle paren $w, z \in \mathbb{C}$ met $w \neq z$ zodat $p(w) = p(z)$ en $q(w) = q(z)$.

Vraag 7.10. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie zodat $f(x)^n$ een polynoom is voor alle $n \geq 2$. Volgt dat f zelf ook een polynoom is?

Vraag 7.11. Zij $p(x)$ een polynoom dat niet-negatief is voor alle reële x. Bewijs dat voor een zekere k er polynomen $f_1, \ldots, f_k$ zijn, zodat

$$p(x) = \sum_{j=1}^{k} f_j(x)^2.$$

Vraag 7.12. Vind alle polynomen $p(x)$ van graad $n \geq 2$ waarvoor er reële getallen $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$ bestaan met $p(r_i) = 0$ $(1 \leq i \leq n)$ en $p'((r_i + r_{i+1})/2) = 0$ $(1 \leq i \leq n-1)$.

Vraag 7.13. Zij

$$f(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = a(z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)(z - r_4)$$

met $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$ en $a \neq 0$. Laat zien dat als $r_1 + r_2 \in \mathbb{Q}$ en $r_1 + r_2 \neq r_3 + r_4$, dan is $r_1 r_2 \in \mathbb{Q}$.

Vraag 7.14. Bestaat er een oneindige rij $a_0, a_1, \ldots$ van niet-nul reële getallen zodat voor $n \geq 1$ de polynomen

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

precies n verschillende reële nulpunten hebben?

Vraag 7.15. Laat $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ een polynoom zijn met reële coefficienten a_i. Definieer

$$\Gamma(p) = a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2.$$

Laat $f(x) = 3x^2 + 7x + 2$. Vind een polynoom $g(x)$ met reële coefficienten zodat $g(0) = 1$ en $\Gamma(g^n) = \Gamma(f^n)$ voor alle n.

8 Functies en continuïteit

Introductie

Een functie f van een verzameling A naar een verzameling B, is een voorschrift dat aan ieder element van A precies één element van de verzameling B toekent. Als f aan $a \in A$ het element $b \in B$ toekent, schrijven we $f(a) = b$. In dit hoofdstuk zijn A en B meestal deelverzamelingen van $\mathbb{R}$.

De polynomen uit het vorige hoofdstuk, zijn bijvoorbeeld functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ die hele mooie eigenschappen hebben.

Continuïteit

Één van de eigenschappen waar we in geïnteresseerd zijn, is continuïteit. Intuïtief kun je zeggen dat een functie f continu is als je zijn grafiek kunt tekenen zonder te potlood van het papier op te tillen. Deze definitie werkt prima om over na te denken, maar iets minder makkelijk voor een formeel bewijs.

Definitie 8.1. Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie, en laat $x \in \mathbb{R}$. De functie f is continu in x als:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in \mathbb{R} \; : \; |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

De functie f heet continu als hij in ieder punt $x \in \mathbb{R}$ continu is.

Bovenstaande definitie kan een beetje worden aangepast als je naar een functie $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ of iets dergelijks wil kijken.

Soms is het makkelijker om de volgende equivalente definitie te gebruiken, die met rijtjes en limieten werkt:

Definitie 8.2. Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie, en laat $x \in \mathbb{R}$. De functie f is continu in x als voor ieder rijtje $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ dat naar x convergeert, geldt dat het rijtje $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ naar $f(x)$ convergeert.

De functie f heet continu als hij in ieder punt $x \in \mathbb{R}$ continu is.

En wie het vak topologie heeft gevolgd, kan desgewenst ook werken met open en gesloten verzamelingen:

Definitie 8.3. Zij $f\colon A \to B$ een functie tussen twee topologische ruimten. Dan heet f continu als $f^{-1}(U)$ open is in A voor elke open deelverzameling $U \subseteq B$.

Continue functies hebben mooie eigenschappen. Een van de meest simpele is de Tussenwaardestelling:

Propositie 8.4 (Tussenwaardestelling)**.** *Zij* $f\colon([a,b]\to\mathbb{R}$ *een continue functie. Dan wordt elke waarde tussen* $f(a)$ *en* $f(b)$ *ook door* f *aangenomen op het interval* $[a,b]$*.*

Op een compact domein, hebben continue functies een paar handige eigenschappen:

Propositie 8.5. *Zij* $f\colon A\to B$ *een continue functie, waarbij* A *compact is. Dan neemt* f *een maximum en een minimum aan op* A*.*

Herinner je dat voor een deelverzameling A van $\mathbb{R}$ geldt dat A compact is dan en slechts dan als A gesloten en begrensd is. En A is gesloten als het complement van A een (mogelijk oneindige) vereniging van open intervallen is.

Ook kunnen we nog een wat strengere vorm van continuïteit definiëren:

Definitie 8.6. Een functie $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heet uniform continu als

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ :\ |x-y|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\epsilon.$$

Het verschil met de vorige definitie is dat de keuze van δ nu niet langer van x af kan hangen. Op een compact domein, komen de continuïteit en uniforme continuïteit overeen:

Propositie 8.7. *Zij* $f\colon A\to B$ *een continue functie, waarbij* A *compact is, en* $A,B\subseteq\mathbb{R}$*. Dan is* f *uniform continu.*

Differentieerbaarheid

Nog wat verdergaand dan continuïteit is het concept differentieerbaarheid. Een functie $f\colon A\to\mathbb{R}$ met $A\subseteq\mathbb{R}$ open heet differentieerbaar in een punt $x\in A$ als er een raaklijn aan de grafiek van f bestaat die door het punt $(x,f(x))$ gaat. Een nettere definitie:

Definitie 8.8. Zij $f\colon A\to\mathbb{R}$ een functie, met A een open deelverzameling van $\mathbb{R}$ en $x\in A$. De functie f heet differentieerbaar in x als

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

bestaat (en eindig is). In dat geval wordt deze limiet $f'(x)$ genoemd. De functie f heet differentieerbaar als hij in ieder punt van A differentieerbaar is. Als de afgeleide functie f' bovendien continu is, heet f continu differentieerbaar.

Een differentieerbare functie is in het bijzonder ook altijd continu. Andersom hoeft dat zeker niet waar te zijn. Hieronder volgen een paar nuttige feitjes over differentieerbare functies:

Propositie 8.9 (Middelwaardestelling)**.** *Zij* $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *differentieerbaar op* (a,b) *en continu op* $[a,b]$*. Dan bestaat er een punt* $c\in(a,b)$ *zodanig dat*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

En ondanks dat een afgeleide van een differentieerbare functie f niet continu hoeft te zijn, geldt er toch een soort tussenwaardestelling:

Propositie 8.10 (Stelling van Darboux). *Zij $f\colon A \to \mathbb{R}$ differentieerbaar, met $A \subseteq \mathbb{R}$ open. Voor een interval $[a,b] \subseteq A$ en y een getal tussen $f'(a)$ en $f'(b)$, geldt dan dat er een $x \in (a,b)$ bestaat met $f'(x) = y$.*

En als een functie een of meerdere keren kan worden gedifferentieerd, kunnen de de stelling van Taylor gebruiken om de functie te benaderen met een polynoom:

Stelling 8.11 (Stelling van Taylor). *Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie die $k+1$ keer differentieerbaar is, met $k \in \mathbb{N}$. Voor $a, x \in \mathbb{R}$, bestaat er een ξ tussen a en x zodanig dat*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}.$$

Integreren

Tegenover differentëren staat het concept integreren. Om deze twee concepten te verbinden is er de Hoofdstelling van de Calculus

Stelling 8.12 (Hoofdstelling van de Calculus). *Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een continue functie. Definieer $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ door*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Dan is F continu op $[a,b]$, en op (a,b) is F bovendien differentieerbaar en geldt $F'(x) = f(x)$.

Als f niet continu is, hoeven F' en f niet overeen te komen. Wel blijft F nog altijd continu, zolang f maar Riemann integreerbaar is.

Limieten van functies

Opgaven over functies gaan ook vaak over rijen van functies. In deze context is het nuttig om te kijken naar limieten van degelijke rijtjes, en welke eigenschappen behouden blijven onder het nemen van de limiet.

Definitie 8.13. Laat $A \subseteq \mathbb{R}$ en laat $\{f_n\colon A \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van functies zijn. We zeggen dat de rij puntsgewijs convergeert naar $f\colon A \to \mathbb{R}$ als voor alle $x \in A$ geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

We zeggen dat de rij uniform convergeert naar $f\colon A \to \mathbb{R}$ wanneer

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \forall x \in A \;:\; |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

De uniforme convergentie is sterker omdat er nu een minimum convergeertempo moet bestaan dat voor alle punten in A tegelijk geldt. In deze situatie wordt continuïteit behouden onder het nemen van de limiet:

Propositie 8.14. *Laat $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van continue functies van A naar $\mathbb{R}$ zijn, waarbij $A \subseteq \mathbb{R}$. Als alle functies f_n continu zijn, en de rij f_n uniform naar $f\colon A \to \mathbb{R}$ convergeert, dan is f continu.*

Evenzo is de uniforme limiet van een rij Riemann integreerbare functies weer Riemann integreerbaar. Kijk ook nog even terug naar Stelling 6.6 voor een handige voorwaarde om met limieten en integralen te werken.

Vreemde voorbeelden

Ondanks dat continuïteit als een hele mooie eigenschap klinkt, blijken er toch hele vreemde continue functies te bestaan. Een bekend voorbeeld hiervan is de zogenaamde Devil's Staircase. Dit is een continue functie van $[0.1]$ naar $[0,1]$. Hij is bijna overal differentieerbaar, met afgeleide 0, maar de functie zelf is niet constant. De functie kan worden opgebouwd als uniforme limiet van continue functies:

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= x\\
f_1(x) &= \begin{cases} \frac{3}{2}x & \text{if } 0 \le x \le 1/3,\\ \frac{1}{2} & \text{if } 1/3 \le x \le 2/3,\\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(x - \frac{2}{3}) & \text{if } 2/3 \le x \le 1.\end{cases}\\
f_2(x) &= \begin{cases} \frac{9}{4}x & \text{if } 0 \le x \le 1/9,\\ \frac{1}{4} & \text{if } 1/9 \le x \le 2/9,\\ \frac{1}{4} + \frac{9}{4}(x - \frac{2}{9}) & \text{if } 2/9 \le x \le 1/3,\\ \frac{1}{2} & \text{if } 1/3 \le x \le 2/3,\\ \frac{1}{2} + \frac{9}{4}(x - \frac{2}{3}) & \text{if } 2/3 \le x \le 7/9,\\ \frac{3}{4} & \text{if } 7/9 \le x \le 8/9,\\ \frac{3}{4} + \frac{9}{4}(x - \frac{8}{9}) & \text{if } 8/9 \le x \le 1.\end{cases}\\
f_3(x) &= \dots
\end{aligned}
$$

In de opgaven set hieronder staat een groot aantal vragen waarbij je naar andere vreemde voorbeelden moet zoeken. Ook op de IMC komen dergelijke opgaven regelmatig voor, vaak in een 'is dit waar of niet' formulering. Om te voorkomen dat je continue functies als 'te mooi' ziet, is het nuttig om een voorbeeld als de Devil's Staircase in je achterhoofd te houden.

Opgaven

Vraag 8.1. Laat f en g twee reëelwaardige functies op $\mathbb{R}$ zijn, waarvoor geldt dat $f(r) \le g(r)$ voor elk rationale getal r. Betekent dit dat $f(x) \le g(x)$ voor elke $x \in \mathbb{R}$ als

(a) f en g niet-dalend zijn?

(b) f en g continu zijn?

Vraag 8.2. Het is een regelmatigvoorkomende fout bij calculus dat gedacht wordt dat de productregel zegt dat $(fg)' = f'g'$. Bepaal of er voor $f(x) = e^{x^2}$ een interval (a,b) en een niet triviale differentieerbare functie $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ bestaat zodat deze verkeerde productregel wel geldt voor $x \in (a,b)$.

Vraag 8.3. De reële getallen a_i voldoen aan

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

Laat zien dat $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ een reëel nulpunt heeft.

Vraag 8.4. Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie zijn. Bewijs of ontkracht de volgende beweringen:

(a) Als f continu is met bereik $\mathbb{R}$, dan is f monotoon.

(b) Als f monotoon is met bereik $\mathbb{R}$, dan is f continu.

(c) Als f monotoon en continu is, dan is het bereik van f heel $\mathbb{R}$.

Vraag 8.5. Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn. Veronderstel dat voor iedere $c > 0$, de grafiek van f kan worden verplaatst naar de grafiek van cf door middel van een translatie of een rotatie. Impliceert dit dat $f(x) = ax + b$ voor zekere reële getallen a en b?

Vraag 8.6. Zij $f : [0,1] \to [0,1]$. Bestaat er een $x \in [0,1]$ zodanig dat $f(x) = x$ als

1. $f : [0,1] \to [0,1]$ een strict stijgende functie is?
2. $f : [0,1] \to [0,1]$ een strict dalende functie is?

Vraag 8.7. Laat $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een begrensde convexe functie zijn. Laat zien dat f continu is op (a,b). Hier betekent convex zijn van een functie dat hij voldoet aan

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

voor alle $x, y \in [a,b]$.

De stelling van Darboux laat zien dat afgeleiden een beetje op continue functies lijken. Zoals bekend hebben continue functies op gesloten begrensde intervallen een maximum, maar:

Vraag 8.8. Geef een voorbeeld van een functie wier afgeleide begrensd is op een gesloten begrensd interval, maar geen maximum heeft.

We kennen allemaal de hoofdstelling van de Analyse, maar toch:

Vraag 8.9. Geef een voorbeeld van een Riemann integreerbare functie die geen afgeleide is van een andere functie.

Anderzijds ook:

Vraag 8.10. Geef een voorbeeld van een differentieerbare functie, waarvan de afgeleide niet Riemann integreerbaar is op een gesloten begrensd interval.

Hint: Geef een voorbeeld van een functie die overal differentieerbaar is maar een onbegrensde afgeleide heeft op een begrensd, gesloten interval.

Vraag 8.11. Geef een voorbeeld van een overal continue en nergens differentieerbare functie.

- Definieer een "zaagtand" functie f, die 1-periodiek is, continu, en niet differentieerbaar in 0, zeg $f(x) = |x|$ voor $|x| \leq \frac{1}{2}$.
- Bekijk de som $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} f(4^n x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
- Laat zien dat g continu is.
- Voor elk reële getal a kiezen we $h_n = \pm 4^{-n}$ zo dat $|f_n(a+h_n) - f_n(a)| = |h_n|$ (laat zien dat dit kan).
- Bepaal nu $|f_m(a+h_n) - f_m(a)|/h_n$ voor alle m.
- Concludeer dat $|g(a+h_n) - g(a)|/h_n$ een even, dan wel oneven geheel getal is naar gelang de pariteit van n.
- Dus g is niet differentieerbaar in a.

Vraag 8.12. Zij f een drie keer continu differentieerbare functie zodat $f(0) = f'(0) = 0 < f''(0)$. Zij

$$g(x) = \left[\frac{\sqrt{f(x)}}{f'(x)}\right]'$$

voor $x \neq 0$ en $g(0) = 0$. Laat zien dat g begrensd is in een omgeving van 0. Geldt dit ook als f slechts twee keer continu differentieerbaar is?

Vraag 8.13. Gegeven een differentieerbare functie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ zodat $f(0) = 0$ en $f(x) > 0$ voor alle $x > 0$. Laat zien dat er een c bestaat zodat

$$2\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$$

geldt. Algemener: Voor welke constantes d is er altijd een c zodat

$$d\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$$

geldt?

Vraag 8.14. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een drie keer continu differentieerbare functie. Bewijs dat er een punt $a \in \mathbb{R}$ bestaat zodat

$$f(a) \cdot f'(a) \cdot f''(a) \cdot f'''(a) \geq 0.$$

Vraag 8.15. Zij $0 < c < 1$ en laat

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{c} & \text{als } x \in [0, c], \\ \frac{1-x}{1-c} & \text{als } x \in [c, 1]. \end{cases}$$

We noemen p een n-periodisch punt als n het kleinste positieve gehele getal is zodat $f^n(p) = p$, waar f^n staat voor het n keer achter elkaar toepassen van f. Bewijs dat er voor elke $n \geq 1$ een positief maar eindig aantal n-periodieke punten is.

Vraag 8.16. Laat $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ een continu differentieerbare functie zijn. Bewijs dat

$$\left| \int_0^1 f^3(x)dx - f^2(0) \int_0^1 f(x)dx \right| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)| \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2.$$

Vraag 8.17. Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een drie keer differentieerbare functie zijn. Bewijs dat er een reëel getal $\xi \in (-1, 1)$ moet bestaan zodanig dat

$$\frac{f'''(\xi)}{6} = \frac{f(1) - f(-1)}{2} - f'(0).$$

Vraag 8.18. Laat f een rationale functie zijn (dat wil zeggen: een quotiënt van twee reële polynomen), en veronderstel dat $f(n) \in \mathbb{Z}$ voor oneindig veel gehele getallen n. Bewijs dat f zelf een polynoom is.

Deze voorbeelden zijn gehaald uit: Counterexamples in Analysis, B.R. Gelbaum en J.M.H. Olmsted.

Vraag 8.19. Geef een voorbeeld van een nergens continue functie, waarvan de absolute waarde continu is.

Vraag 8.20. Geef een functie die continu is in slechts één punt.

Vraag 8.21. Geef voor een willekeurige niet-compacte verzameling D een continue onbegrensde functie f met D als domein.

Merk op dat een continue functie op een compact domein natuurlijk begrensd is.

Vraag 8.22. Geef voor een willekeurige niet-compacte verzameling D een continue, onbegrensde, lokaal begrensde functie f met D als domein.

Een functie f is locaal begrensd als voor elk punt d in zijn domein geldt dat er een omgeving van d (een open verzameling met d erin) is waarop f begrensd is.

Vraag 8.23. Geef een voorbeeld van een functie die overal eindig en locaal onbegrensd is.

Vraag 8.24. Geef voor een willekeurige niet-compacte verzameling D, een voorbeeld van een continue, begrensde functie zonder extreme waarden met D als domein.

Vraag 8.25. Geef een voorbeeld van een begrensde functie zonder locale extrema op een compact domein.

Vraag 8.26. Geef een voorbeeld van een niet-constante periodieke functie f zonder kleinste periode.

Vraag 8.27. Geef een voorbeeld van twee uniform continue functies wier product niet uniform continu is.

Het product van twee continue functies is natuurlijk wel continu.

Vraag 8.28. Geef voorbeeld van een continue injectieve functie f gedefinieerd op een interval van $\mathbb{R}$, waarvan de inverse niet continu is.

Merk op dat als het domein van f compact is, dat de inverse dan sowieso continu is. Bovendien is f^{-1} ook continue als het bereik een deelverzameling van $\mathbb{R}$ is.

Vraag 8.29. Geef een functie die continu is in $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ en discontinu op $\mathbb{Q}$.

Vraag 8.30. Geef een functie met een dichte verzameling van discontinuïteiten die allen ophefbaar zijn.

Een dicontinuïteit a van f is ophefbaar als er een functie g bestaat met $g(x) = f(x)$ als $x \neq a$, zodat g wel continu is in a.

Vraag 8.31. Geef een voorbeeld van een monotone functie wier verzameling van discontinuiteiten een willekeurige aftelbare (eventueel dichte) verzameling is.

Vraag 8.32. Geef een voorbeeld van een functie met een dichte verzameling van continuiteitspunten en een dichte verzameling van discontinuiteitspunten, waarvan geen enkele discontinuiteit ophefbaar is.

Vraag 8.33. Geef een voorbeeld van een injectieve afbeelding tussen twee intervallen die nergens monotoon is.

Vraag 8.34. Geef een voorbeeld van een continue functie die nergens monotoon is.

Hint: Bekijk een som $\sum f_n(x)$, die absoluut convergeert, voor een goed gekozen rij van (continue) functies f_n.

Vraag 8.35. Gegeven een willekeurige gesloten verzameling C, geef een voorbeeld van een continue functie met C als verzameling van discontinuiteiten.

Hint: Bekijk de verzameling $B = \partial A \cup (A^\circ \cap \mathbb{Q})$.

Vraag 8.36. Geef een voorbeeld van een functie $f : [0,1] \to [0,1]$, zodat het beeld van elk niet-gedegenereerde deelinterval van $[0,1]$ onder f gelijk is aan $[0,1]$.

Merk op dat zo'n functie alle punten in het bereik oneindig vaak aanneemt.

Vraag 8.37. Een discontinue lineaire functie f. Hier betekent lineair dat f voldoet aan de vergelijking van Cauchy:

$$f(a+b) = f(a) + f(b).$$

Hint: Keuzeaxioma.

9 Functievergelijkingen

Waardes invullen

Bij functievergelijkingen hebben we een vergelijking waaraan een functie moet voldoen en willen we wat te weten te komen van deze functie. Een methode om zo'n probleem op te lossen is om te proberen door goede dingen in te vullen meerdere uitdrukkingen voor hetzelfde te krijgen. In het voorbeeld doen we dat eerst door meerdere keren $f(0)$ te krijgen en daarna door $y = x$ in te vullen om meerdere keren $f(x)$ te krijgen.

Voorbeeld 9.1 (De vergelijking van Cauchy)**.** Bepaal alle functies $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ die voldoen aan

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{9.1}$$

Bewijs. We vullen $x = y = 0$ is en krijgen $f(0) = 2f(0)$, dus $f(0) = 0$. Met $y = -x$ volgt dat $0 = f(0) = f(x) + f(-x)$, ofwel dat f oneven is. Vervolgens bewijzen we met inductie (naar n) dat $f(nx) = nf(x)$ voor $n \in \mathbb{N}$. De inductiestap is hier verkregen door $y = (n-1)x$ in te vullen zodat $f(nx) = f((n-1)x)+f(x) = (n-1)f(x)+f(x) = nf(x)$ als we weten dat $f((n-1)x) = (n-1)f(x)$.

Wegens onevenheid van f geldt nu zelfs dat $f(nx) = nf(x)$ voor $n \in \mathbb{Z}$. Voor $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ hebben we dan $qf(\frac{p}{q}) = f(q\frac{p}{q}) = f(p) = pf(1)$, dus $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}f(1)$. Voor alle $q \in \mathbb{Q}$ hebben we dus laten zien dat $f(q) = qf(1)$, dus de enige mogelijke oplossingen zijn $f(x) = cx$. Nu controleren we nog dat $f(x) = cx$ ook inderdaad een oplossing is voor alle $c \in \mathbb{Q}$, maar dat volgt meteen uit het invullen in (9.1), want voor deze f geldt $f(x+y) = c(x+y) = cx+cy = f(x)+f(y)$. $\square$

Herhaald invullen

In het bijzonder kan het handig zijn om een bepaalde uitdrukking herhaald in te vullen en alle gevonden vergelijkingen samen te beschouwen. De vorm van de functievergelijking waar je mee begint verraadt soms al wat je in kunt vullen.

Voorbeeld 9.2. Bepaal alle functies $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zodanig dat voor alle $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) + zf(1-z) = 1 + z.$$

Bewijs. Het ligt voor de hand om nu $1 - z$ in te vullen. Dat geeft

$$f(1-z) + (1-z)f(z) = 2 - z,$$

waaruit we vinden dat $f(1-z) = 2 - z + (z-1)f(z)$. Dit kunnen we weer invullen in de vergelijking waar we mee begonnen. Dat levert

$$f(z) + z(2 - z + (z-1)f(z)) = 1 + z,$$

van waaruit we $f(z)$ direct kunnen oplossen. □

Differentiaalvergelijkingen

Een andere manier is om te proberen door in de goede vergelijking te differentiëren een differentiaalvergelijking te krijgen die je kunt oplossen. Let op dat je wel moet weten (of bewijzen) dat je mag differentiëren (al kun je het gewoon doen zonder dat je weet of het mag om een idee te krijgen). De oplossing van de simpelste differentiaalvergelijking kan daarbij van pas komen:

$$\text{als } f(x) = f'(x) \text{ dan is } f(x) = ce^x$$

voor een zekere constante c. Ook is het goed om te herkennen dat voor een positieve functie f geldt dat

$$(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Soms moet je de vergelijking manipuleren om op iets te komen waarvan de afgeleide "mooi" is.

Voorbeeld 9.3. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een twee keer differentieerbare functie die voldoet aan

$$f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x),$$

voor een $g(x) \geq 0$ en alle $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $|f(x)|$ begrensd is.

Bewijs. Door met $f'(x)$ te vermenigvuldigen staat links bijna de afgeleide van $f(x)^2 + f'(x)^2$. In het bijzonder zien we dat

$$\begin{aligned}\left[f(x)^2 + f'(x)^2\right]' &= 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) \\ &= 2f'(x)(f(x) + f''(x)) = -2xg(x)f'(x)^2,\end{aligned}$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$. Nu is de rechterkant hiervan negatief voor positieve x en positief voor negatieve x (want $g(x) > 0$ en $f'(x)^2 \geq 0$. We zien dus dat $f(x)^2 + f'(x)^2$ een absoluut maximum heeft in 0. Dus in het bijzonder is $f(x)^2 \leq f(x)^2 + f'(x)^2 \leq f(0)^2 + f'(0)^2$ en dus is $|f(x)|$ begrensd. □

Goniometrische functies

Soms kan het zo zijn dat het samenstellen met een andere, vaak goniometrische, functie helpt om de vergelijking te versimpelen. In plaats van $f(x)$, kun je dan bijvoorbeeld $f \circ \cos(x)$ of $\tan \circ f(x)$ beschouwen. Vaak kun je dit herkennen aan een verkapte afgeleide van een goniometrische functie die voorkomt in de formule. Ook kan het zo zijn dat een andere gonioformule in de vergelijking verstopt zit. We zetten daarom een aantal gelijkheden op een rijtje.

- $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$

- $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

- $\cos(2x) = 2(\cos x)^2 - 1$

- $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-(\tan x)^2}$

- $(\tan x)' = 1 + (\tan^2 x)$

- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Er zijn natuurlijk nog veel meer formules, maar de bovenstaande zullen waarchijnlijk het vaakst voorkomen.

Opgaven

Vraag 9.1. Bewijs dat $f(n) = 1 - n$ de enige functie $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ is die voldoet aan

1. $f(f(n)) = n$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$;
2. $f(f(n+2)+2) = n$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$;
3. $f(0) = 1$.

Vraag 9.2. Vind alle reëelwaardige continu differentieerbare functies f op $\mathbb{R}$ zodat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$f(x)^2 = \int_0^x f(t)^2 + f'(t)^2 dt + 1990.$$

Vraag 9.3. Vind alle functies $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodanig dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y)).$$

Vraag 9.4. Voor welke $k \in \mathbb{R}$ is er een continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat $f(f(x)) = kx^9$.

Vraag 9.5. Vind alle functies $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ die voldoen aan

$$f(x)f(yf(x)) = f(x + y)$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Vraag 9.6. Vind alle continue functies $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$ zodanig dat voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x.$$

Vraag 9.7. Stel $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn niet-constante differentieerbare functies die voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ voldoen aan

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y), \qquad g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y).$$

Als $f'(0) = 0$ bewijs dan dat $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Vraag 9.8. Gegeven een continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die voldoet aan

$$f(2x - f(x)) = x.$$

Als gegeven is dat f een vast punt heeft, laat dan zien dat $f(x) = x$. Wat gebeurt er als f nu geen vast punt heeft?

Vraag 9.9. ZIj $f \in C^1(a,b)$ (i.e. een continu differentieerbare functie $(a,b) \to \mathbb{R}$), $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \uparrow b} f(x) = -\infty$ en $f'(x) + f(x)^2 \geq -1$ voor $x \in (a,b)$. Bewijs dat $b - a \geq \pi$ en geef een voorbeeld van een functie waarvoor $b - a = \pi$.
Hint: Welke afgeleide van een goniometrische functie herken je?

Vraag 9.10. Vind de verzameling reële getallen k zodat voor alle positieve differentieerbare functies f die voldoen aan $f'(x) > f(x)$ voor alle x er een getal N is zodat $f(x) > e^{kx}$ voor alle $x > N$.
Hint: Denk aan de logaritmische afgeleide.

Vraag 9.11 (Droom van de Calculusstudent, LIMO 2012)**.** In deze opgave werken we met functies $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ die beide minstens één keer continu differentieerbaar zijn. Voor sommige calculusstudenten gelden soms hele simpele rekenregels, die in werkelijkheid vaak lastiger zijn. Wij gaan verkennen wanneer deze regels toch gelden.

(a) Vind een niet-triviale oplossing van

$$(f+g)^2 = f^2 + g^2$$

De triviale oplossingen zijn die oplossingen waar f danwel g constant 0 is.

(b) Laat zien dat als de vergelijking uit vraag (a) geldt, dat dan ook

$$(fg)' = f'g'.$$

(c) Vind niet-triviale functies f en g die voldoen aan zowel de vergelijking uit vraag (b) als aan

$$\int f \int g = \int (fg),$$

waar $\int h$ de primitieve van de functie h voorstelt.

Vraag 9.12. Bepaal alle differentieerbare functies $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ waarvoor er een positief reëel getal a bestaat zodat $f'(a/x) = x/f(x)$ voor alle $x > 0$.

Vraag 9.13. Zij f een continue functie die voldoet aan $f(2x^2 - 1) = 2xf(x)$ voor alle x. Laat zien dat $f(x) = 0$ voor $x \in [-1, 1]$. *Hint: Aan welke gonioformule doet dit je denken?*

Vraag 9.14. Vind alle strict monotone functies $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ die voldoen aan $f\left(\frac{x^2}{f(x)}\right) = x$ voor alle $x > 0$.

Vraag 9.15. Zij $c > 0$. Bepaal (i.e. beschrijf) alle continue functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan $f(x) = f(x^2 + c)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Vraag 9.16. Laat zien dat er geen functies $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ bestaan zodat

$$f(x)^2 \geq f(x + y)(f(x) + y)$$

voor alle $x, y > 0$.

Vraag 9.17. Zij $a, b \in (0, 1/2)$ en laat g een continue functie zijn die voldoet aan $g(g(x)) = ag(x) + bx$ voor alle reële x. Bewijs dat $g(x) = cx$ voor een zekere constante c.

10 Getaltheorie

Priemfactorisatie

Een hele belangrijke methode bij getaltheorieopgaven is het vinden van de juiste ontbinding. Bij olympiadeachtige opgaven is dit nog meer zo dan in het "echt", aangezien je met een goede ontbinding vaak heel vreemd uitziende uitspraken heel makkelijk kunt bewijzen.

Voorbeeld 10.1. Zij $p > 3$ een priemgetal. Laat zien dat $p^2 - 1$ deelbaar is door 24.

Bewijs. De priemfactorisatie van $24 = 2^3 \cdot 3$, dus we moeten laten zien dat $p^2 - 1$ drie keer deelbaar is door 2 en één keer door 3. Merk nu op dat $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ en dat $p - 1$ en $p + 1$ even getallen zijn. Daaruit volgt al dat $p^2 - 1$ deelbaar is door 4. Maar één van twee opeenvolgende even getallen is deelbaar door 4, dus is $p^2 - 1$ zelfs deelbaar door 8. Verder is één van de drie opeenvolgende getallen $p - 1, p, p + 1$ deelbaar door 3. Dat is niet p, want p is priem en $p > 3$. Dus is $p - 1$ of $p + 1$ deelbaar door 3, en dus $p^2 - 1$. Er volgt dat $3 \cdot 8 = 24$ een deler is van $p^2 - 1$. □

Belangrijk is het feit dat elk getal een unieke priemfactorisatie heeft. Je kunt dus zien of twee getallen aan elkaar gelijk zijn door te controleren dat ze door elk priemgetal even vaak gedeeld worden en omgekeerd. Eventueel kun je aan beide kanten door eenzelfde factor delen zodat je kunt aannemen dat twee getallen in een vergelijking onderling ondeelbaar zijn.

Modulorekenen

Modulorekenen is ook een handig hulpmiddel bij getaltheorieopgaven. Rekenen modulo een getal n betekent in feite dat je kijkt naar de groep $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ of $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})*$. Dat x deelbaar is door n is immers hetzelfde als zeggen dat $x \equiv 0 \mod n$, ofwel $[x] = 0 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ook is bijvoorbeeld $x^k - 1$ deelbaar door een getal n dan en slechts dan als de orde van $[x]$ in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ het getal k deelt. Herinner je immers de volgende stelling.

Stelling 10.2 (Lagrange)**.** *Als G een groep is en $g \in G$, dan deelt de orde van het element g de orde van de groep G.*

De orde van $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ wordt gegeven door de Euler-phi functie $\phi(n)$. De formule voor $\phi(n)$ wordt gegeven door

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \frac{p-1}{p}.$$

Het is goed om te onthouden dat $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ als p een priemgetal is en dat $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$ als $\text{ggd}(n, m) = 1$.

Voorbeeld 10.3. Bewijs dat voor geen enkele $n > 1$ geldt dat n een deler is van $2^n - 1$.

Bewijs. Stel dat n wel $2^n - 1$ deelt. Het is duidelijk dat n dan oneven moet zijn, omdat $2^n - 1$ dat is. Zij p nu het kleinste priemgetal dat n deelt. Omdat $p \neq 2$, is $\text{ggd}(2, p) = 1$, dus $2 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. We zien dat $2^n \equiv 1 \mod p$, dus de orde van 2 in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ deelt n. Maar die orde deelt ook de orde van de groep, en dat is $\phi(p) = p - 1$. De orde van 2 in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ is duidelijk groter dan 1, dus we zien dat dat $\text{ggd}(n, p - 1) > 1$. Dit betekent dat n een priemdeler heeft kleiner dan p. Een tegenspraak, dus n deelt niet $2^n - 1$. □

De volgende stellingen volgen uit de stelling van Lagrange, maar zijn goed om apart te onthouden.

Stelling 10.4 (Kleine Stelling van Fermat)**.** *Zij p een priemgetal en $a \in \mathbb{Z}$ zodanig dat p niet a deelt. Dan geldt er dat*

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p.$$

Als p wel a deelt, dan is $a \equiv 0 \mod p$ en vinden we het volgende.

Stelling 10.5. *Zij p een priemgetal en $a \in \mathbb{Z}$. Dan geldt er dat*

$$a^p \equiv a \mod p.$$

Stelling 10.6 (Euler)**.** *Als* $\text{ggd}(a, n) = 1$, *dan is*

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n.$$

Vaak helpt het om niet modulo een geheel getal n te kijken, maar modulo de verschillende priemmachten in de factorisatie van n. De Chinese Reststelling helpt hierbij.

Stelling 10.7 (Chinese Reststelling)**.** *Zij $m, n \in \mathbb{Z}$ met* $\text{ggd}(m, n) = 1$. *Dan geeft de afbeelding gegeven door* $(a \mod mn) \mapsto (a \mod n, a \mod m)$ *aanleiding tot groepsisomorfismes*

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/(mn)\mathbb{Z} \text{ en } (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \simeq (\mathbb{Z}/(mn)\mathbb{Z})^*.$$

Opgaven

Vraag 10.1. Vind alle paren $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ zodanig dat

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{14}.$$

Vraag 10.2. Vind alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ zodanig dat de volgende implicatie geldt: als $a, b \in \mathbb{Z}$ en $11 \mid a^n + b^n$, dan $11 \mid a$ en $11 \mid b$.

Vraag 10.3. Bewijs dat elk samengesteld getal geschreven kan worden in de vorm $xy + yz + zx + 1$ voor zekere positieve gehele getallen x, y en z.

Vraag 10.4. Hoeveel priemgetal bestaan er die geschreven kunnen worden als een rijtje om en om 1 en 0, dus van de vorm $101 \cdots 01$? *Hint: Schrijf zo'n getal uit als som van machten van 100 en gebruik de meetkundige reeks.*

Vraag 10.5. Bewijs dat

$$\frac{ggd(m,n)}{n}\binom{n}{m}$$

geheel is voor alle $n \geq m \geq 1$.

Vraag 10.6. Bewijs dat er oneindig veel n bestaan zodat zowel n, $n+1$ als $n+2$ te schrijven zijn als som van twee kwadraten.

Vraag 10.7. Laat zien dat voor elk positief geheel getal n geldt

$$n! = \prod_{i=1}^{n} kgv(1, 2, \ldots, \lfloor n/i \rfloor).$$

Vraag 10.8. Laat zien dat er geen $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ bestaan zodanig dat

$$x^2 + 10y^2 = 3z^2.$$

Vraag 10.9. Gegeven $m \in \mathbb{N}$ bepaal alle drietallen (n, x, y) van positieve gehele getallen, met $ggd(n, m) = 1$ die voldoen aan

$$(x^2 + y^2)^m = (xy)^n.$$

Vraag 10.10. Zij p een oneven priemgetal en schrijf

$$F(n) = 1 + 2n + 3n^2 + \cdots + (p-1)n^{p-2}.$$

Bewijs dat $F : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ een injectieve functie is.

Vraag 10.11. Zij S de verzameling rationale getallen verschillend van $\{-1, 0, 1\}$. Definieer $f : S \to S$ door $f(x) = x - 1/x$. Bewijs of ontkracht dat

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(S) = \emptyset,$$

waarbij f^n voor de n-voudig geïtereerde van f staat.

Vraag 10.12. Bewijs dat er unieke gehele getallen a en n bestaan zodat $a^{n+1} - (a+1)^n = 2001$.

Vraag 10.13. Definieer een rij door $a_0 = 1$ en $a_{2n+1} = a_n$ en $a_{2n+2} = a_n + a_{n+1}$ voor $n \geq 0$. Bewijs dat elk rationaal getal voorkomt in de verzameling

$$\{\frac{a_{n-1}}{a_n} \mid n \geq 1\} = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \ldots\}.$$

Vraag 10.14. Schrijf drie, niet noodzakelijk verschillende, positieve gehele getallen op het bord. Je mag steeds twee van de getallen, zeg x en y met $x < y$, uitvegen en vervangen door $2x$ en $y - x$. Bewijs dat je ervoor kan zorgen dat je 0 op het bord mag schrijven.

11 Ongelijkheden

Opgaven over ongelijkheden komen regelmatig voor op de LIMO en IMC. Soms is de opgave zelf een ongelijkheid, soms vormen de ongelijkheden alleen een deel van het bewijs (bijvoorbeeld om een afschatting te maken). Om een dergelijke opgave aan te pakken, helpt het om een aantal standaardongelijkheden te kennen die je op weg kunnen helpen. Ook is het nuttig in het oog te houden voor welke waarden van een parameter je de ongelijkheid wil bewijzen, en wanneer er eventueel gelijkheid zou kunnen optreden.

De meest bekende ongelijkheid, waar vele andere ongelijkheden uit kunnen worden afgeleid, is

$$x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Gelijkheid geldt dan en slechts dan als $x = 0$.

Om nieuwe ongelijkheden uit deze ongelijkheid af te leiden, kun je gebruik maken van een aantal rekenregels: Ten eerste mag je aan beide kanten van een ongelijkheid hetzelfde getal optellen, om een nieuwe ongelijkheid te krijgen. Ook mag je een ongelijkheid links en rechts met een positief getal vermenigvuldigen. Met een negatief getal (of een negatieve uitdrukking) vermenigvuldigen mag ook, maar dan draait het teken van de ongelijkheid om.

Wanneer je twee ongelijkheden hebt, mag je deze ook bij elkaar optellen (zolang de tekens maar dezelfde kant opstaan). Als alle termen in de ongelijkheden positief zijn, mag je ze bovendien ook met elkaar vermenigvuldigen. In het bijzonder mag je een ongelijkheid tussen positieve uitdrukkingen kwadrateren.

Tenslotte kun je een niet-dalende functie op een ongelijkheid toepassen. Als $A, B \in \mathbb{R}$, $A < B$ en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een niet-dalende functie is, dan geldt $f(A) \leq f(B)$. Als f strikt stijgend is, geldt zelfs dat $f(A) < f(B)$. Veel van de bovenstaande rekenregels zijn toepassingen van dit idee. Voor de functie f worden ook vaak de functies e^x of $\log x$ gebruikt. Deze functies komen goed van pas wanneer je van een produkt een som wil maken, of juist andersom.

Bij het bewijzen van ongelijkheden is het vaak handig om van achter naar voren te werken. Je begint met de te bewijzen ongelijkheden, en probeert daarvandaan naar een bekende ongelijkheid toe te werken. Je mag hierbij nog steeds de operaties gebruiken die hierboven beschreven werden, want die werken allemaal twee kanten op. Echter, zorg ervoor dat je goed blijft onderscheiden wat je hebt bewezen en wat je nog wilt bewijzen, want het is makkelijk om hiermee in de war te raken. Ook is het een stuk netter om je uiteindelijke uitwerking in de 'goede' volgorde te schrijven: begin met wat je weet, en eindig met de uitdrukking die je wil bewijzen.

Voorbeeld 11.1. Bewijs de ongelijkheid $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ voor $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wanneer we deze opgave 'van achteren naar voren' aanpakken, is het een nuttige eerste stap om de breuk weg te werken. We moeten dus bewijzen dat $2\sqrt{xy} \leq x + y$. Als we nu alle termen naar één kant halen, komt er $x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$ te staan. Omdat $x - 2\sqrt{xy} + y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$, is deze laatste ongelijkheid waar.

Om hier een netter leesbaar bewijs van te maken, schrijven we het alsvolgt op:

Er geldt $x - 2\sqrt{xy} + y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$, en dus blijkt dat $x + y \geq 2\sqrt{xy}$. Hieruit volgt dat $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

Gemiddelden

Het zojuist behandelde voorbeeld is een kleine versie van de RM-ongelijkheid. Hierbij staat R voor het rekenkundig gemiddelde (arithmetic mean):

$$R := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

waarbij x_1 t/m x_n reële getallen zijn. De M staat voor het meetkundig gemiddelde (geometric mean):

$$M := \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

voor niet-negatieve reële getallen x_1 t/m x_n.

De RM-ongelijkheid zegt dat voor $n \in \mathbb{N}$ en niet-negatieve reële getallen x_1 t/m x_n altijd geldt dat $M \leq R$. Gelijkheid geldt alleen wanneer alle x_i gelijk zijn.

We kunnen nog een paar bekende gemiddelden aan het rijtje toevoegen. Het harmonisch gemiddelde H is gedefinieerd voor positieve x_1 t/m x_n:

$$H := \frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \cdots + 1/x_n}.$$

En tenslotte is er het kwadratisch gemiddelde K:

$$K := \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}{n}}.$$

Stelling 11.2. *Voor $n \in \mathbb{N}$ en $x_1, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{>0}$ geldt dat*

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq H \leq M \leq R \leq K \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\},$$

waarbij gelijkheid alleen optreedt wanneer alle x_i gelijk zijn.

Bovenstaande stelling verbindt vier veel voorkomende gemiddelden. Het rekenkundig, harmonisch en kwadratisch gemiddelde zijn allemaal van de vorm

$$M_p := \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{1/p},$$

voor $p = 1$, $p = -1$ en $p = 2$ respectievelijk. Maar het M_p gemiddelde kan als hierboven worden gedefinieerd voor elke p ongelijk aan 0. Wanneer we vervolgens definiëren dat M_0 het meetkundige gemiddelde is, geldt de volgende stelling:

Stelling 11.3. *Voor $p < q$, $n \in \mathbb{N}$ en $x_1, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{>0}$ geldt dat*

$$M_p \leq M_q$$

waarbij gelijkheid alleen optreedt wanneer alle x_i gelijk zijn.

Deze stelling kan nog iets worden uitgebreid door naar gewogen gemiddelden te kijken. Als $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}_{>0}$ gewichten zijn met $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$, dan definiëren we

$$M_{p,w} := (w_1 x_1^p + w_2 x_2^p + \cdots + w_n x_n^p)^{1/p}$$

voor $p \neq 0$ en

$$M_{0,w} := x_1^{w_1} x_2^{w_2} \cdots x_n^{w_n}.$$

Stelling 11.4. *Voor $p < q$, $n \in \mathbb{N}$, $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}_{>0}$ gewichten met $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$ en $x_1, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{>0}$ geldt dat*

$$M_{p,w} \leq M_{q,w}$$

waarbij gelijkheid alleen optreedt wanneer alle x_i gelijk zijn.

Enkele andere veelgebruikte ongelijkheden

Één van de meest gebruikte ongelijkheden is de Cauchy-Schwarz ongelijkheid. Hij komt in vele gedaanten voor, omdat het een ongelijkheid op ruimten met een inwendig produkt betreft:

Stelling 11.5. *Voor alle vectoren x en y van een ruimte X met inwendig produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ geldt dat:*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle.$$

Gelijkheid geldt dan en slechts dan als x en y lineair afhankelijk van elkaar zijn.

Per inprodukt ruimte krijgen we dus een aparte versie van de Cauchy-Schwarz ongelijkheid. Voor complexe getallen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ krijgen we bijvoorbeeld:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \right).$$

Een andere ongelijkheid over produkten en rijtjes getallen is de Herschikkingsongelijkheid:

Stelling 11.6. *Voor rijtjes $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ en $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ van reële getallen, en een permutatie $\sigma \in S_n$ geldt dat*

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \geq x_1 y_{\sigma(1)} + x_2 y_{\sigma(2)} + \cdots + x_n y_{\sigma(n)} \geq x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1.$$

Wanneer bovendien geldt dat $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ en $y_1 > y_2 > \cdots > y_n$, kan gelijkheid links alleen optreden als $\sigma = id$, en rechts alleen als $\sigma(k) = n + 1 - k$ voor alle k.

Door meerdere herschikkingsongelijkheden bij elkaar op te tellen, kan weer een nieuwe nuttige ongelijkheid worden afgeleid: de ongelijkheid van Tsjebychev:

Stelling 11.7. *Voor rijtjes $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ en $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ van reële getallen geldt dat*

$$\frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n}{n} \geq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} \geq \frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1}{n}.$$

En tenslotte komt ook Schur's ongelijkheid regelmatig van pas:

Stelling 11.8. *Voor niet-negatieve reële getallen x, y en z en een positief getal t geldt dat*

$$x^t(x-y)(x-z) + y^t(y-z)(y-x) + z^t(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Jensen ongelijkheid

Een van de belangrijkste trucjes bij het werken met ongelijkheden is de Jensen ongelijkheid. Die kan ingewikkelde ongelijkheden soms een heel eind voor je vereenvoudigen. Hij kan worden toegepast wanneer je kijkt naar een som van termen $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$ voor een convexe functie f, en staat je toe deze som van termen van te schatten met één enkele term.

Ter herinnering: een functie f heet convex op een interval I wanneer voor alle $x, y \in I$ en $t \in (0,1)$ geldt dat

$$ft(x) + (1-t)f(y) \geq f(tx + (1-t)y).$$

Dit betekent precies dat het lijnstuk tussen $(x, f(x))$ en $(y, f(y))$ boven de grafiek van f ligt, en dat $\{(x,z)|x \in I, z \geq f(x)\}$ een convexe deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ is.

Stelling 11.9. *Zij f een convexe functie op het interval I en laat $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$. Dan geldt dat*

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

In plaats van met het gewone rekenkundig gemiddelde (zoals hierboven), kun je Jensen's ongelijkheid ook met een gewogen rekenkundig gemiddelde toepassen:

Stelling 11.10. *Zij f een convexe functie op het interval I, $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}_{>0}$ gewichten met $w_1 + \ldots + w_n = 1$ en laat $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$. Dan geldt dat*

$$w_1f(x_1) + 1_2f(x_2) + \cdots + w_nf(x_n) \geq f\left(w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n\right).$$

Ongelijkheden voor integralen

De meeste klassieke ongelijkheden die gaan over sommen van een aantal getallen zijn ook geldig in integraalvorm. In het bijzonder geldt (als analogon van de ongelijkheid van het p en q gemiddelde):

Stelling 11.11. *Voor $p \geq q$ en een willekeurige (meetbare) functie f geldt dat*

$$\left(\int_C |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \geq \left(\int_C |f(x)|^q dx\right)^{1/q},$$

voor een willekeurige (meetbare) verzameling C met gelijkheid als $p = q$ of als f constant. Ook bij oneigenlijke integralen (bijvoorbeeld met $C = (-\infty, \infty)$) is dit waar, maar dan kan eventueel aan één of beide kanten van de ongelijkheid oneindig of 1/oneindig staan.

De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz geldt voor elke bilineaire vorm, dus ook voor integralen via

$$\left(\int_C f(x)g(\bar{x})dx\right)^2 \leq \left(\int_C |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_C |g(x)|^2 dx\right),$$

voor weer een willekeurige meetbare verzameling C. Gelijkheid geldt hier als $f(x)/g(x)$ constant is.

Een generalisatie hiervan is Hölder's ongelijkheid:

Stelling 11.12. *Laat (S, Σ, μ) een maatruimte zijn, en $p, q \in [1, \infty]$ met $1/p + 1/q = 1$. Dan geldt voor alle meetbare complexwaardige functies f en g op S dat*

$$\left(\int_S |fg| d\mu\right) \leq \left(\int_S |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_S |g|^q d\mu\right)^{1/q}.$$

Wanneer bovendien geldt dat $p, q \in (1, \infty)$ en $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$, dan geldt gelijkheid dan en slechts dan als $|f|^p$ en $|g|^q$ lineair afhankelijk zijn in $L^1(\mu)$.

De ongelijkheid van Jensen kan ook voor integralen worden toegepast, en zegt dat voor een convexe functie f op een interval D dat voor een positieve functie $w : D \to [0, \infty)$ zodanig dat $\int_D w(x)dx = 1$ geldt

$$\int_D f(x)w(x)dx \geq f\left(\int_D w(x)dx\right),$$

als beide integralen bestaan.

Een andere techniek die lokaal goede ongelijkheden geeft is het gebruiken van de Stelling van Taylor. Op deze manier is bijvoorbeeld $\sin(x) \leq x$ voor $4 \geq x \geq 0$ heel makkelijk te bewijzen.

Vaak moet je een slimme transformatie uitvoeren om op een mooie ongelijkheid uit te komen. Laat je hierbij leiden door wanneer gelijkheid geldt (de functie waarvoor dat gaat moet door de transformatie versimpelen).

Opgaven

Vraag 11.1. Voor welke reële getallen c geldt $\cosh(x) \leq \exp(cx^2)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Vraag 11.2. Vind de minimale waarde voor $x > 0$ van

$$\frac{(x+1/x)^6 - (x^6 + 1/x^6) - 2}{(x+1/x)^3 + (x^3 + 1/x^3)}.$$

Vraag 11.3. Stel dat a, b, c, A, B, C reële getallen zijn met $a, A \neq 0$ zodat

$$|ax^2 + bx + c| \leq |Ax^2 + Bx + C|$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$. Laat zien dat dan ook

$$|b^2 - 4ac| \leq |B^2 - 4AC|.$$

Vraag 11.4. Bestaat er een bijectieve afbeelding $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zodat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2} < \infty?$$

Vraag 11.5. Gegeven dat $x_1, x_2, \ldots, x_n$ een permutatie is van $1, 2, \ldots, n$ bepaal de maximale waarde (als functie van n) van

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1.$$

Vraag 11.6. Zij f een continue functie op $[0,1]$ zodat voor elke $x \in [0,1]$ geldt

$$\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2}.$$

Laat zien dat

$$\int_0^1 f^2(t)dt \geq \frac{1}{3}.$$

Vraag 11.7. Zij x_i een dalende rij positieve getallen. Laat zien dat

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}}.$$

Laat zien dat er een constante C bestaat zodat als x_i een dalende rij positieve getallen is geldt

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{\sum_{i=m}^{\infty} x_i^2} \leq C \sum_{i=1}^{\infty} x_i.$$

Vraag 11.8. Zij $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ een continu differentieerbare functie. Laat zien dat

$$\left| \int_0^1 f^3(x)dx - f^2(0) \int_0^1 f(x)dx \right| \leq \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2.$$

Vraag 11.9. Zij f een twee keer continu differentieerbare functie op $[0, N]$ zo dat $|f'(x)| < 1$ en $f''(x) > 0$ voor alle $x \in [0, N]$. Laat $0 \leq m_0 < m_1 < \cdots < m_k \leq N$ gehele getallen zijn zodat $n_i = f(m_i)$ ook geheel is voor $i = 0, 1, \ldots, k$. We definieren $b_i = n_i - n_{i-1}$ en $a_i = m_i - m_{i-1}$ voor $i = 1, 2, \ldots, k$.

1. Laat zien dat
$$-1 < \frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_2} < \cdots < \frac{b_k}{a_k} < 1.$$
2. Bewijs dat voor elke $A > 1$ er hoogstens N/A indices j zijn met $a_j > A$.
3. Bewijs dat $k \leq 3N^{2/3}$ (i.e. dat er hoogstens $3N^{2/3}$ gehele punten op de kromme $y = f(x)$ bestaan).

Vraag 11.10. Stel dat $f(x, y)$ een continue reëelwaardige functie is op het eenheidsvierkant $[0, 1] \times [0, 1]$. Laat zien dat

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right)^2 dy + \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right)^2 dx$$
$$\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy \right)^2 + \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)^2 dxdy.$$

Vraag 11.11. Zij C de klasse van reëelwaardige continue differentieerbare functies f op het interval $[0, 1]$ die voldoen aan $f(0) = 0$ en $f(1) = 1$. Bepaal het grootste gehele getal u zodat

$$u \leq \int_0^1 |f'(x) - f(x)|dx$$

voor alle $f \in C$.

Vraag 11.12. Zij $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ een continue functie met de eigenschap dat voor elke $x, i \in [0, 1]$ geldt

$$xf(y) + yf(x) \leq 1.$$

Bewijs dat

$$\int_0^1 f(x)dx \leq \frac{\pi}{4}$$

en vind een voorbeeld van zo'n functie f waarvoor gelijkheid geldt.

Vraag 11.13. Zij $a_1, a_2, \ldots, a_n$ and $b_1, b_2, \ldots, b_n$ niet-negatieve reële getallen. Laat zien dat

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} + (b_1 b_2 \cdots b_n)^{1/n} \leq \Big((a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n) \Big)^{1/n}.$$

Vraag 11.14. Zij m en n positieve gehele getallen. Laat zien dat

$$\frac{(m+n)!}{(m+n)^(m+n)} < \frac{m!}{m^m}\frac{n!}{n^n}.$$

Vraag 11.15. Vind het minimum van

$$|\sin(x)+\cos(x)+\tan(x)+\cot(x)+\sec(x)+\csc(x)|$$

voor reële getallen x. (NB $\cot(x) = 1/\tan(x)$, $\sec(x) = 1/\cos(x)$ en $\csc(x) = 1/\sin(x)$).

Vraag 11.16. Laat T_1 en T_2 driehoeken zijn met zijden a_1, b_1 en c_1, respectievelijk a_2, b_2 en c_2. Stel dat $a_1 \le a_2$, $b_1 \le b_2$ en $c_1 \le c_2$ en dat T_2 een scherphoekige driehoek is. Volgt nu dat de oppervlakte van T_2 groter is dan de oppervlakte van T_1?

Vraag 11.17. Zij H een $n\times n$ matrix met alle coefficienten ± 1 waarvan de rijen onderling loodrecht staan. Stel H heeft een $a \times b$ ondermatrix waarin alle elementen 1 zijn. Laat zien dat $ab \le n$.

Vraag 11.18. Laat zien dat voor alle gehele getallen $n > 1$ geldt

$$\frac{1}{2ne} < \frac{1}{e} - \left(1-\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{ne}.$$

Vraag 11.19. Laat $f(x, y)$ een continue, reëelwaardige functie zijn op het eenheidsvierkant $0 \le x, y \le 1$. Laat zien dat

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)^2 dy + \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)^2 dx \le \left(\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy\right)^2 + \int_0^1\int_0^1 f(x,y)^2 dxdy.$$

Vraag 11.20. Zij $f(x)$ een continue, reëelwaardige functie op het interval $[0, 1]$. Laat zien dat

$$\int_0^1\int_0^1 |f(x)+f(y)|dxdy \ge \int_0^1 |f(x)|dx.$$

Vraag 11.21. Bewijs dat er een constante C bestaat zodat geldt dat als $p(x)$ een polynoom is van graad 2006, dan is

$$|p(0)| \le C\int_{-1}^1 |p(x)|dx.$$

Vraag 11.22. Zij f een reëelwaardige functie met een continue derde afgeleide zodat $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ en $f'''(x)$ positief zijn voor alle $x \in \mathbb{R}$. Stel dat $f'''(x) \le f(x)$ voor alle x. Laat zien dat $f'(x) < 2f(x)$ voor alle x.

Vraag 11.23. Laat A, B en C verschillende punten in het vlak $\mathbb{Z}^2$ zijn (dus met gehele coördinaten). Bewijs dat als

$$(|AB| + |BC|)^2 < 8Opp(\triangle ABC) + 1$$

dan vormen A, B en C drie hoekpunten van een vierkant.

12 Genererende functies

Genererende functies zijn een belangrijk hulpmiddel om opgaven op te lossen die te maken hebben met recursief gedefinieerde rijen. Vooral in de combinatoriek komt dit vaak voor. Het idee is dat de rij (a_n) gecodeerd wordt in de genererende functie

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Vaak is het makkelijker om deze functie uit te rekenen dan om a_n te bepalen. Als je een expliciete formule voor F hebt gevonden, kun je daar vaak weer de rij-elementen a_n uit terugvinden. Omdat dit hele verhaal zich in ringen afspeelt, is dit onderwerp minder geschikt voor eerstejaarsstudenten.

Ring van formele machtreeksen

Zij R een ring. Als we twee polynomen $f = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ en $g = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ in $R[X]$ met elkaar vermenigvuldigen, krijgen we

$$fg = \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \right) X^i.$$

Het is dus natuurlijk om op de verzameling $R[[X]]$ van formele machtreeksen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, met alle $a_n \in R$, de volgende vermenigvuldiging te definiëren:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m X^m \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \right) X^i.$$

Samen met de coëfficiëntsgewijze optelling maakt dit $R[[X]]$ tot een ring, die we de *ring van formele machtreeksen over R* noemen.

Merk op dat, net als bij polynomen, de notatie met een X er slechts is omdat dat er natuurlijker uit ziet. Eigenlijk zijn formele machtreeksen niets anders dan rijtjes $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ met een ingewikkeld gedefinieerde vermenigvuldiging. De overgang van een rij naar een formele machtreeks is dus helemaal niet zo gek.

We kunnen machreeksen ook differentiëren.

Definitie 12.1. Zij R een ring en $f = \sum_n a_n X^n \in R[[X]]$. Dan definieren we de *formele afgeleide* van f als

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} X^{n-1}.$$

Met deze definitie voldoet de afgeleide aan de product-, ketting- en quotiéntregel zoals je die gewend bent. Een fijne eigenschap van machtreeksen is dat ze vaak inverteerbaar zijn.

Stelling 12.2. *Als K een lichaam is en $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in K[[X]]$ met $a_0 \neq 0$, dan heeft f een inverse in $K[[X]]$.*

Bewijs. We gaan de inverse g van f expliciet construeren. Dit doen we als volgt. Zij $b_0 = a_0^{-1}$. Stel nu dat we $b_0, \ldots, b_n$ hebben gekozen zodanig dat $b_0 = a_0^{-1}$ en $\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} = 0$ voor alle $1 \leq i \leq n$. We kunnen

$$b_{n+1} := -a_0^{-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j b_{n+1-j} \right)$$

definiëren omdat het rechterlid alleen afhangt van de waardes $b_0, \ldots, b_n$ en zodoende vinden we dat ook $\sum_{j=0}^{n+1} a_j b_{n+1-j} = 0$. Op deze manier definiëren we recursief de formele machtreeks $g = \sum b_n X^n$, waarvoor geldt dat $fg = 1$. $\square$

Vanaf nu zullen we, tenzij anders aangegeven, alleen nog werken in de ring $\mathbb{C}[[X]]$. Het fijne van werken met formele machtreeksen is dat we ons niet meer druk hoeven te maken over convergentie. Hier willen we ons ook niet druk over maken, want we zijn alleen geïnteresseerd in de coëfficiënten van de reeks, niet in limieten. De formule voor de meetkundige reeks geldt nu altijd!

Voorbeeld 12.3 (Formele meetkundige reeks)**.** Expliciete vermenigvuldigen in $\mathbb{C}[[X]]$ geeft dat

$$(1-X) \left(\sum_{n=0}^{\infty} X^n \right) = 1,$$

zodat inderdaad geldt dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} X^n = (1-X)^{-1}.$$

Ook bij het optellen en vermenigvuldigen van reeksen hoeven we ons geen enkele zorgen te maken over 'of dit wel mag'. De optelling en vermenigvuldiging in de ring zijn simpelweg zo gedefinieerd. We kunnen formele machtreeksen dus gewoon manipuleren zoals we gewend zijn bij machtreeksen.

Genererende functies in de combinatoriek

Definitie 12.4. Zij S een verzameling. Dan definiëren we een *gewichtsfunctie* op S als een functie $\omega: S \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Aan ieder element van S voegt een gewichtsfunctie we dus een gewicht $\omega(\sigma)$ toe. Dit is precies de situatie waar we ons vaak in de combinatoriek in bevinden. Stel dat we bijvoorbeeld het aantal deelverzamelingen van $\{1, 2, \ldots, n\}$ van k elementen willen weten. Dan is $S = \mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\})$ en $\omega(A) = |A|$ voor iedere $A \in \mathcal{P}(S)$ is de gewichtsfunctie. We zijn dan op zoek naar het aantal elementen A in S met $\omega(A) = k$.

Definitie 12.5. Zij S een verzameling met gewichtsfunctie ω. Dan is de bijbehorende *genererende functie* gedefinieerd als

$$\Phi_S(X) = \sum_{\sigma \in S} X^{\omega(\sigma)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{\sigma \in S \\ \omega(\sigma)=k}} X^{\omega(\sigma)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[[X]],$$

waar a_k het aantal elementen $\sigma \in S$ is met $\omega(\sigma) = k$.

Een genererende functie is dus eigenlijk geen functie, maar een formele machtreeks. We zien dat de genererende functie als coëfficiënten precies de rij (a_k) heeft die we zoeken. Als we dus $\Phi_S(X)$ kunnen bepalen en om kunnen schrijven naar een machtreeks, dan is het combinatorische probleem dus opgelost. Voordat we een paar voorbeelden gaan zien, eerst twee lemma's.

Lemma 12.6 (Somlemma)**.** *Zij S een verzameling met gewichtsfunctie ω zodanig dat $S = A \sqcup B$ een disjuncte vereniging is van A en B. Dan is*

$$\Phi_S(X) = \Phi_A(X) + \Phi_B(X).$$

Bewijs. Dit is bijna triviaal:

$$\phi_S(X) = \sum_{\sigma \in S} X^{\omega(\sigma)} = \sum_{\sigma \in A} X^{\omega(\sigma)} + \sum_{\tau \in B} X^{\omega(\tau)} = \Phi_A(X) + \Phi_B(X).$$

□

Lemma 12.7 (Productlemma)**.** *Zij A en B twee verzamelingen met gewichtsfuncties respectievelijk ω_A en ω_B. Op $A \times B$ definiëren we de gewichtsfunctie $\omega = \omega_A + \omega_B$. Dan geldt er dat*

$$\Phi_{A\times B}(X) = \Phi_A(X)\Phi_B(X).$$

Bewijs. We zien dat

$$\begin{aligned}\Phi_{A\times B}(X) &= \sum_{(a,b)\in A\times B} X^{\omega_A(a)+\omega_B(b)} = \sum_{a\in A}\sum_{b\in B} X^{\omega_A(a)} X^{\omega_B(b)} \\ &= \sum_{a\in A} X^{\omega_A(a)} \sum_{b\in B} X^{\omega_B(b)} = \Phi_A(X)\Phi_B(X).\end{aligned}$$

□

Partities

In dit voorbeeld gaan we berekenen op hoeveel manieren het getal n geschreven kan worden als som van k positieve gehele getallen. We zijn dus op zoek naar rijtjes $(x_1, \ldots, x_k)$ zodanig dat $x_1 + \ldots + x_k = n$. Daarom definiëren we $S = \mathbb{Z}_{>0}^k$ en $\omega : S \to \mathbb{Z}_{>0}$ door $\omega(x_1, \ldots, x_k) = x_1 + \ldots + x_k$. Dit ziet eruit als een situatie waar we het productlemma kunnen toepassen. We definiëren dus $S_1 = S_2 = \ldots = S_k = \mathbb{Z}_{>0}$ en $\omega_i : S_i \to \mathbb{Z}_{>0}$ door $\omega_i(x) = x$. Dan is $S = S_1 \times \ldots \times S_k$ en $\omega = \omega_1 + \ldots + \omega_k$. Ook zien we dat $\Phi_{S_i}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} X^j = \frac{X}{1-X}$. Met het productlemma volgt nu dat

$$\Phi_S(X) = \prod_{i=1}^{k} \Phi_{S_i}(X) = \frac{X^k}{(1-X)^k}.$$

Als we nu de reeks $(1-X)^{-k}$ konden bepalen, waren we klaar. Het antwoord blijkt bijzonder elegant. Herinner je de gegeneraliseerde binomiaalcoëfficiënten

$$\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!}$$

voor $\alpha \in \mathbb{R}$.

Stelling 12.8 (Binomium van Newton)**.** *Voor iedere $n \in \mathbb{Z}$ geldt dat*

$$(1+X)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} X^m.$$

Het is niet zo moeilijk deze stelling voor $n < 0$ met inductie te bewijzen als je gebruik maakt van het feit dat

$$\binom{-n}{m} = \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-m+1)}{m!} = (-1)^m \binom{n+m-1}{m}.$$

Het antwoord waar we naar op zoek waren, was de n-de coëfficient van $\Phi_S(X)$. Deze noteren we als $[X^n]\Phi_S$. Er volgt nu dat het aantal manieren om n te schrijven als som van k positieve gehele getallen gelijk is aan

$$[X^n]\Phi_S = [X^{n-k}](1-X)^{-k} = (-1)^{n-k}\binom{-k}{n-k} = \binom{n-1}{n-k} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Stel nu dat we het aantal manieren a_n willen vinden waarom n te schrijven is als som van positieve gehele getallen. We beschouwen dan de verzameling van rijtjes met lengte $1, 2, 3 \ldots, n-1$ of n. Onze verzameling T wordt dan

$$T = \mathbb{Z}_{>0} \sqcup \mathbb{Z}_{>0}^2 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{Z}_{>0}^n$$

met gewichtsfunctie ρ die aan een rijtje van lengte j zijn som toekent. Met het somlemma, of gewoon door logisch na te denken, zien we dan in dat

$$a_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1}.$$

Genererende functies en recursie: de rij van Fibonacci

Een klassiek voorbeeld van een toepassing van genererende functies is de rij van Fibonacci. De rij van Fibonacci is recursief gedefinieerd door $F_0 = F_1 = 1$ en $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ voor $n \geq 2$. Als we de genererende functie $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n X^n$ bekijken, dan volgt uit deze recursie dat

$$\begin{aligned} f(X) &= 1 + X + \sum_{n\geq 2} F_n X^n = 1 + X + \sum_{n\geq 2} (F_{n-1} + F_{n-2}) X^n \\ &= 1 + X + X \sum_{n\geq 2} F_{n-1} X^{n-1} + X^2 \sum_{n\geq 2} F_{n-2} X^{n-2} = 1 + X + X(f(X) - 1) + X^2 f(X). \end{aligned}$$

Hieruit lossen we op dat

$$f(X) = \frac{1}{1 - X - X^2}.$$

Nu is het zaak om $f(X)$ te schrijven als een machtreeks. Herinner je een truc die vaak gebruikt wordt om integralen op te lossen. Met de abc-formule vinden we dat de nulpunten van $1/f$ zijn $\beta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$ en $-\beta^{-1} = -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$. We zoeken nu $A, B \in \mathbb{R}$ zodanig dat

$$\frac{A}{\beta - X} + \frac{B}{-\beta^{-1} - X} = \frac{1}{1 - X - X^2}.$$

Oplossen geeft nu dat $A(-\beta^{-1} - X) + B(\beta - X) = -1$ en dus $-A\beta^{-1} + B\beta = -1$ en $-A - B = 0$. Er volgt dat $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ en $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. We zien dus dat

$$\begin{aligned} f(X) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\beta - X} - \frac{1}{-\beta^{-1} - X} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\beta^{-1}}{1 - \beta^{-1} X} - \frac{-\beta}{1 - (-\beta) X} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\beta^{-n-1} - (-\beta)^{n+1} \right) X^n. \end{aligned}$$

We concluderen dat

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

In het bijzonder is het rechter lid blijkbaar geheel voor iedere $n \geq 0$, wat op zich al niet triviaal is.

Reeksen bepalen met een genererende functie

Genererende functies kunnen ook toegepast worden om somrijen mee uit te rekenen. Stel dat we de som $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ willen bepalen. Dit voorbeeld is gemakkelijk, omdat

$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$ en we dus een telescopische som hebben die duidelijk convergeert naar 1. We gaan de som nu echter op een andere manier berekenen. We definiëren de genererende functie

$$f(X) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} X^n.$$

We zijn geïnteresseerd in de waarde $f(1)$ en die gaan we bepalen door f in gesloten vorm te schrijven. Merk op dat de dubbele afgeleide van f er al een stuk beter uit ziet:

$$f''(X) = \sum_{n=2}^{\infty} X^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n = \frac{1}{1-X}.$$

Om f te vinden moeten we nu primitiveren. We kunnen $\log(1-X)$ definiëren als de machtreeks $\log(1-X) = -\sum_{n\geq 1} \frac{X^n}{n}$ en de afgeleide van $-\log(1-X)$ is dan $f''(X)$. De primitieven van $f''(X)$ worden dus gegeven door $g(X) = -\log(1-X) + C$, waar C een constante is. Omdat $f'(0) = 0$ vinden we dat $C = 0$ en dus $f'(X) = -\log(1-X)$. We weten dat de primitieve van $\log(X)$ gelijk is aan $X\log(X) - X$, dus de primitieve van f' wordt $(1-X)\log(1-X) - (1-X) + D$. Er geldt dus dat

$$f(X) = (1-X)\log(1-X) + X + B$$

voor zekere $B \in \mathbb{R}$. Omdat $f(0) = 0$ vinden we $B = 0$. Er volgt dat

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = f(1) = 1 + \lim_{x\to 1}(1-X)\log(1-X) = 1 + \lim_{y\to 0} y \log y = 1,$$

zoals verwacht. De limiet $\lim_{y\to 0} y\log y = 0$ kun je berekenen met l'Hospital. In dit geval hadden we toevallig ook een eenvoudige manier om de som te berekenen, maar vaak heb je die niet en is het gebruiken van een genererende functie de enige optie.

Exponentiële genererende functies

Definitie 12.9. Zij (a_n) een rij in $\mathbb{C}$. Dan is de *exponentiële genererende functie* van (a_n) gedefinieerd als

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{X^n}{n!} \in \mathbb{C}[[X]].$$

De exponentiële genererende functies hebben handige eigenschappen.

Lemma 12.10. *Beschouw de exponentiële genererende functies* $A(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{X^n}{n!}$ *en* $B(X) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{X^n}{n!}$. *Dan geldt er dat*

(i) $A'(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \frac{X^n}{n!}$;

(ii) $\int A(X) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \frac{X^n}{n!}$ *en*

(iii) $A(X)B(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} X^n$.

Opgaven

Vraag 12.1. Bereken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Vraag 12.2. Voor iedere $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, vind $\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{2^n}$.

Vraag 12.3. Bereken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.

Vraag 12.4. Zij (F_n) de rij van Fibonacci. Laat zien dat $F_{n+2} = 1 + F_0 + F_1 + \ldots + F_n$.

Vraag 12.5. Zij a_n het aantal manieren om een pad van lengte n te betegelen met tegels van lengtes 1 en 2. Gebruik genererende functies om aan te tonen dat (a_n) de rij van Fibonacci is.

Vraag 12.6. Bewijs Stelling 12.8.

Vraag 12.7. Zij $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Vind een simpele uitdrukking voor $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Vraag 12.8. Wat is het aantal manieren om $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ te schrijven als een som van k oneven positieve gehele getallen?

Vraag 12.9. Voor iedere $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, vind een simpele uitdrukking voor

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Vraag 12.10. Het n-de Catalan getal is gedefinieerd als

$$C_n := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Laat zien dat de bijbehorende genererende functie gelijk is aan

$$G(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Vraag 12.11. Geef een simpele uitdrukking voor

$$s_{i,n} = \sum_{k \equiv i \mod 3} \binom{n}{k}$$

voor $i \in \{0,1,2\}$ en waar de som loopt over alle $k \in \mathbb{Z}_{\{} \geq 0\}$ zodanig dat $k \equiv i \mod 3$.

Vraag 12.12. Bepaal het aantal deelverzamelingen met k elementen van $\{1, 2, \ldots, n\}$ zodanig dat geen twee elementen uit zo'n deelverzameling opeenvolgende getallen zijn. *Hint: Stel dat $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ zo'n deelverzameling vormen. Bekijk dan eens $y_1 = x_1, y_2 = x_2 - x_1, y_3 = x_3 - x_2, \ldots, y_k = x_k - x_{k-1}$ en $y_{k+1} = x_k$.*

Vraag 12.13. Vind het aantal manieren om een $3 \times n$ schaakbord te vullen met 2×1 dominostenen. *Hint: Als U_n dit aantal manieren is, definieer V_n als het aantal manieren om een $3 \times n$-zonder-hoek bord te vullen met dominostenen en stel een stelsel van recurrente betrekkingen op.*

Vraag 12.14. Voor een verzamelig S van niet negatieve getallen definiëren we $r_S(n)$ als het aantal geordende paren (s_1, s_2) met $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$ en $s_1 + s_2 = n$. Is het mogelijk om $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ te verdelen in twee verzamelingen A en B zodat $r_A(n) = r_B(n)$ voor alle n?

13 Puzzels en spelletjes

Als afsluiter een hoofdstuk over puzzels en spelletjes, variërend van leuke raadseltjes tot IMC-opgaven.

Bij het analyseren van een spel, kun je het beste gestructureerd de mogelijkheden afgaan. Een goede manier om dat te doen is door een gerichte graaf te tekenen van de mogelijke situaties (met als punten de toestanden van het spel en als pijlen de mogelijke zetten van de twee spelers). Vervolgens kun je vanaf de mogelijke eindsituaties terugredeneren.

Van eindsituaties weet je wie er wint. Als je een situatie hebt waarbij elke zet leidt tot een toestand waarvan je de einduitslag weet, kun je ook bepalen wie (onder perfect spel) in die situatie moet winnen. Als de speler aan zet van die situatie alleen naar situaties kan waarin hij verliest is het een verloren positie, maar als er ook maar één mogelijkheid is waarmee hij wint dan is de situatie gewonnen voor hem.

In de praktijk zijn deze grafen vaak te groot om praktisch mee te kunnen werken, maar het idee blijft bestaan. Een winnende tactiek kan dan vaak beschreven worden met behulp van invarianten: de speler moet om te winnen een bepaalde invariant in stand houden.

De belangrijkste truc bij het oplossen van opgaven in de trant van "Is er een manier om . . . te doen in x aantal zetten?" is het tellen hoeveel informatie er per zet verkregen kan worden. Als je elke zet een antwoord op een ja/nee vraag krijgt zijn er maar na n zetten maar 2^n verschillende series antwoorden. Dus je kunt ook maar 2^n verschillende toestanden onderscheiden.

Naast laten zien dat er een zeker minimum aantal zetten nodig is, is dit ook een leidraad voor het vinden van een goed strategie: je moet ervoor zorgen zoveel mogelijk informatie uit één vraag te halen. In feite wil je dat (met ja/nee vragen) alle nog mogelijke begintoestanden in twee even grote groepen worden verdeeld door jouw vraag.

Het is niet altijd even gemakkelijk om in te zien wat wel en wat geen informatie is. Raadsels zoals het onderstaande grapje zijn daarop gebaseerd:

Voorbeeld 13.1. Drie logici zitten in een café. De serveerster vraagt: 'Wil iedereen koffie?' De eerste logicus antwoordt: "Dat weet ik niet." De tweede antwoordt: "Dat weet ik niet." Dan zegt de derde: "Ja."

Probeer bij een dergelijk raadsel zo helder mogelijk op een rijtje te zetten wat iedereen weet, en wat elke stap aan de kennis van alle aanwezigen toevoegt. Als A leert dat B iets ook niet weet, dan is dat nog altijd informatie.

Tenslotte kan het voor een spelletjesopgave natuurlijk ook erg nuttig zijn het spel ook daadwerkelijk even te spelen. Vaak kan dit door je zetten gewoon op te schrijven, maar je kunt natuurlijk ook best met een schaar wat speelkaarten knippen als dit je goed uitkomt.

Opgaven

Vraag 13.1. Het volgende probleem werd begin 2015 bekend op social media.

Cheryl heeft twee vrienden, Albert en Bernard. Ze zijn benieuwd naar haar verjaardag. "Dat zeg ik jullie niet", zegt Cheryl, "maar ik zal jullie een hint geven".

Ze schrijft tien mogelijke data op: 15, 16 en 19 mei, 17 en 18 juni, 14 en 16 juli en 14, 15 en 17 augustus. Vervolgens vertelt ze aan Albert alleen de goede maand, en aan Bernard alleen de goede dag. Dan zegt Albert: "Ik weet het niet, maar ik weet dat Bernard het ook niet weet". Vervolgens reageert Bernard: "Eerst wist ik het ook niet, maar nu weet ik het wel". En dan zegt Albert meteen: "Dan weet ik het nu ook". Op welke dag is Cheryl jarig?

Vraag 13.2. Twee spelers pakken achtereenvolgens 1, 2, 3 of 4 stenen van een stapel met in het begin 101 stenen. De speler die de laatste steen pakt, wint. Stel dat beide spelers perfect spelen, wint dan de eerste of tweede speler?

Wat als de speler die de laatste steen pakt verliest?

Vraag 13.3. Gegeven een zandloper van 7 minuten en een van 11 minuten. Wat is de snelste manier om een ei te koken voor 2 minuten? Hierbij mag je een zandloper alleen omdraaien als al het zand op de bodem ligt.

Verandert er iets als je de zandlopers ook mag omdraaien als ze niet helemaal doorgelopen zijn?

Vraag 13.4. Tijdens een boswandeling kom je bij een splitsing op de weg. Bij de splitsing staan twee dwergen. Je weet dat de ene altijd de waarheid spreekt, en de andere altijd liegt, maar niet welke dwerg welke is. Je mag één van de dwergen één vraag stellen. Welke vraag moet je stellen om erachter te komen welke route je het bos uit leidt?

Vraag 13.5. Wat is het kleinste aantal gewichten dat nodig is om elk geheel aantal tussen 1 en 63 gram te wegen, als de gewichten alleen aan één kant van een balans geplaatst mogen worden? Generaliseer naar een willekeurig aantal grammen.

Wat is het minimale aantal gewichten om elk geheel aantal tussen 1 en 40 te kunnen wegen als je de gewichten aan beide zijden van de balans mag plaatsen? Generaliseer weer.

Vraag 13.6. Een apotheker ontvangt 10 flesjes met 1000 pillen. Hij krijgt een bericht van de pharmaceut dat er een flesje tussen zit waarvan de pillen 10 milligram te zwaar zijn. Hoe kan de foute fles er met één weging uitgehaald worden?

Kan het ook in één weging als de apotheker alleen weet dat er flesjes met foute pillen zijn, maar niet weet dat het er maar één is?

Vraag 13.7. Spelers $1, 2, \ldots, n$ zitten rond een (ronde) tafel met elk een cent voor de neus. Speler geeft één cent aan zijn buur, speler 2, die vervolgens 2 centen doorgeeft aan speler 3, die weer één cent aan 4 geeft, die weer 2 cent aan 5 geeft etc. waarbij om de buurt steeds 1 of 2 cent wordt doorgegeven. Een speler die geen geld meer heeft stapt van de tafel weg en doet niet meer mee. Vind een oneindig aantal waarden voor n waarvoor een speler uiteindelijk al het geld krijgt.

Vraag 13.8. Je doet mee aan een quiz die een vaste formule volgt. Als je een reeks vragen goed beantwoordt, mag je één van de drie deuren kiezen. Achter één van deze deuren zit een prijs.

Na je keuze opent de quizmaster één van de andere twee deuren, en laat zien dat hier niets achter ligt. Hij geeft je de kans nog van keuze te wisselen tussen de twee ongeopende deuren. Kun je dit beter wel of niet doen?

Vraag 13.9. Beschouw het volgende spel met $2n$ kaarten, genummerd 1 tot en met $2n$. Het pak kaarten wordt geschud en twee spelers A en B krijgen elk n kaarten. Vervolgens leggen beide spelers om de beurt een kaart weg. Iemand wint als de som van de afgelegde kaarten na zijn beurt een veelvoud is van $2n + 1$. Wat is de kans dat de eerste speler wint?

Vraag 13.10. Beschouw een veelvlak met minstens 5 vlakken, zodat in elk hoekpunt precies 3 zijden samenkomen. Twee spelers spelen het volgende spel:

Om de beurt kleuren beide spelers een vlak in hun kleur. De winnaar is de eerste speler die drie vlakken gekleurd heeft die samenkomen in een hoekpunt.

Laat zien dat de eerste speler een winnende strategie heeft.

Vraag 13.11. Iemand heeft 12 munten, waarvan 1 vals is en daarom lichter of zwaarder is dan de andere 11. Wat is het minimale aantal wegingen nodig om de valse munt te vinden en te weten of hij zwaarder of lichter is dan de andere?

Voor een gegeven $k \in \mathbb{N}$. Stel dat je n munten krijgt met één valse (dus weer zwaarder of lichter dan de andere). Wat is de grootste n zodat je in k wegingen kunt bepalen welke munt vals is en of de valse munt te ligt of te zwaar is?

Vraag 13.12. In determinant boter, kaas en eieren zetten twee spelers om de beurt een 1 (speler 1) of een 0 (speler 2) in een 3×3 matrix totdat de matrix vol staat met enen en nullen. Speler 2 wint als de determinant van die matrix 0 is en speler 1 wint als de determinant niet nul is. Wie heeft een winnende strategie en wat is die?

Vraag 13.13. Piet heeft op het voorhoofd van Anna en Bert een geheel positief getal geschreven en zegt dat de som van de twee getallen gelijk is aan 100 of 101. Vervolgens vraagt hij aan Anna of zij het getal op haar voorhoofd weet, waarop zij "Nee" antwoordt. Vervolgens vraagt hij het aan Bert, en ook hij antwoordt "Nee", enzovoorts. Stel dat zowel Anna als Bert perfect logisch kunnen rederenen. Laat zien dat op een gegeven moment één van de twee "Ja" zegt.

Vraag 13.14. Er zijn n munten zijn in een cirkel geplaatst met kop of munt boven. Speler A wil alle munten met kop naar boven draaien, maar kan de huidige situatie niet zien. Telkens mag hij een (willekeurig) aantal posities aangeven, waarna B de munten willekeurig mag ronddraaien (langs de cirkel) en daarna de munten op de posities die A aangaf om moet draaien. Voor welke waarden van n kan A slagen.

Bijvoorbeeld als $n = 2$ kan A achtereenvolgens $\{1, 2\}$, $\{1\}$ en weer $\{1, 2\}$ zeggen, waarna het altijd goed moet zijn.

Vraag 13.15. Zij S de verzameling van alle woorden (i.e. eindige rijtjes letters) gemaakt met de letters x, y en z en beschouw een equivalentierelatie $\sim$ op S die voldoet aan de volgende eigenschappen

1. $uu \sim u$ voor alle $u \in S$;
2. Als $v \sim w$ dan ook $uv \sim uw$ en $vu \sim wu$ voor alle $u, v, w \in S$.

Laat zien dat elk woord in S equivalent is aan een woord van lengte hoogstens 8.

Vraag 13.16. Zij G een eindige simpele graaf (dus zonder meervoudige zijden of loops) en v een punt van G. De omgeving $N(v)$ van v bestaat uit v en alle punten die met v verbonden zijn door een zijde. Laat zien dat er een deelverzameling S van de punten uit G bestaat zodat $|S \cap N(v)|$ oneven is voor alle hoekpunten v uit G.

Vraag 13.17 (IMC 2012, Vraag 1)**.** Homer Simpson en Albert Einstein spelen een spel. Om en om geven ze een coëfficiënt a_i van het polynoom

$$p(x) = x^{2015} + a_{2014}x^{2014} + \ldots + a_1x + a_0$$

een reële waarde. Als een coëfficiënt eenmaal een waarde heeft, mag die niet meer worden veranderd. Homer begint. Het is zijn doel om te zorgen dat $p(x)$ deelbaar is door een polynoom $m(x)$; Albert moet dit zien te voorkomen. Wie heeft er een winnende strategie als

(a) $m(x) = x - 2015$ en wie als

(b) $m(x) = x^2 + 1$?

Vraag 13.18. Tien kabouters worden op een trap gezet, ieder op een trede. Ze kijken omlaag en kunnen dus hun medekabouters op lagere treden zien, en die op hogere treden niet. Elke kabouter krijgt een muts op, die rood, wit of blauw kan zijn. Van bovenaf wordt de kabouters één voor één gevraagd welke kleur de muts op hun hoofd is.

Als de kabouters vooraf de spelregels weten en een strategie kunnen afspreken, hoeveel kabouters kunnen de vraag dan goed beantwoorden?

Opmerking: als antwoord op de vraag mag een kabouter alleen 'rood' , 'wit' of 'blauw' zeggen. De overige kabouters kunnen dit antwoord horen.

Vraag 13.19. Aftelbaar veel kabouters worden op een aftelbare trap gezet, met hun blik naar beneden gericht. De krijgen allemaal een muts op, die rood, wit of blauw kan zijn. Van bovenaf aan wordt één voor één aan de kabouters gevraagd welke kleur hun muts is.

De kabouters krijgen de spelregels vooraf te horen en mogen een strategie afspreken. Ze hebben bijzonder goede zintuigen en kunnen alle kabouters op lagere treden zien, en alle kabouters op hogere treden horen. Bovendien kunnen ze het keuze-axioma uitvoeren en aan elkaar communiceren.

Hoeveel kabouters kunnen de vraag goed beantwoorden?

Vraag 13.20. Hoe verandert de vorige vraag als alle kabouters tegelijk antwoord moeten geven?

En wat als er niet 3, maar aftelbaar veel kleuren mutsen zijn?