COHOMOLOGÍA DE ČECH PARA ESQUEMAS DE SEMIANILLOS

NATALIA MAYO GARCÍA

Índice

Introducción

Es indudable que estructuras algebraicas como los grupos, los anillos y los cuerpos tienen una presencia fundamental en las matemáticas, sin embargo, cabe preguntarse qué hallamos al suprimir algunas de propiedades requeridas en sus definiciones.

Algunos de estos casos no nos son nada ajenos, por ejemplo, los números naturales con la suma y el producto habituales no es un anillo, sino un semianillo. Los semianillos serán unos de los principales objetos de interés del trabajo, presentes en la geometría tropical entre otras ramas de investigación.

El objetivo del documento es estudiar una definición dada en [7] de la cohomología de Čech para esquemas de semianillos, con la que se obtienen resultados que replican y generalizan los conocidos para esquemas sobre el espectro de un anillo. Veremos cómo la construcción ha de adaptarse, dadas las diferencias entre ambas teorías.

Comenzamos estudiando los rudimentos de la teoría de semianillos, donde empezará a aparecer otra de las claves del trabajo, que es la idea quedarse con lo que resulte esencial de las definiciones, para poder trabajar con una mayor generalidad, sin perder de vista la influencia que tiene el relajar ciertas hipótesis.

Esta idea se retomará en la última sección, donde se dan algunas pinceladas sobre la conexión de la literatura de semianillos con la del "cuerpo de un elemento". El modo de aproximarse a este concepto, de definición un tanto incierta, será seguir persiguiendo la idea de construir esquemas más allá de los esquemas de anillos.

1. Preliminares: Monoides, semianillos y semimódulos

Introduciremos las nociones básicas de la teoría de semianillos. Intuitivamente, un semianillo es un anillo en que no tenemos una operación inversa a la suma y un monoide es un grupo donde no tenemos inversos. Parte de las diferencias entre la teoría de anillos y semianillos son consecuencia de no tener una operación inversa a la suma, mientras que otras son debidas a la diversidad de operaciones con las que podemos obtener estructuras de semianillos.

Para elaborar esta sección se ha seguido principalmente el libro de Golan [6], que es una de las referencias fundamentales en la literatura sobre semianillos, donde se pueden encontrar los detalles de la mayoría de los resultados de esta sección.

1.1. Cuestiones generales.

En primer lugar, se reemplaza la noción de grupo por la de monoide:

Definición 1.1. *Se llama* ***monoide****,* $(A, *, e)$*, a un conjunto* A *dotado de una operación binaria, interna verificando que* $*$ *es asociativa y un elemento neutro* $e \in A$*. Si además* $*$ *es conmutativa se dice que el monoide es conmutativo.*

Definición 1.2. *Dados* A*,* B *monoides,* $f : A \to B$ *es un* ***morfismo de monoides*** *si* $f(a * b) = f(a) * f(b)$ *para cualesquiera* $a, b \in A$ *y* $f(e) = e$*.*

A partir de la definición de monoide tenemos la siguiente:

Definición 1.3. *Se llama* ***semianillo****,* $(S, +, \cdot, 0, 1)$*, a un conjunto* S *dotado de dos operaciones binarias e internas cumpliendo:*

- $(S, +, 0)$ *es un monoide conmutativo.*
- $(S, \cdot, 1)$ *es un monoide.*
- *El producto distribuye a la suma:* $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ *y* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ $\forall x, y, z \in S$*.*
- *0 es un elemento absorbente respecto al producto:* $0 \cdot x = 0 = x \cdot 0$ $\forall x \in S$*.*
- $1 \neq 0$*.*

Además si $(S, \cdot, 1)$ *es un monoide conmutativo se dice que el semianillo es* ***conmutativo****. Se llama* ***semicuerpo*** *a un semianillo* $(S, +, \cdot, 0, 1)$ *tal que* $(S - \{0\}, \cdot)$ *es un grupo abeliano.*

Definición 1.4. *Dados* S*,* S' *semianillos,* $f : S \to S'$ *es un* ***morfismo de semianillos*** *si* $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$*,* $f(a + b) = f(a) + f(b)$ *para cualesquiera* $a, b \in S$*,* $f(0) = 0$ *y* $f(1) = 1$

La noción de **subsemianillo** es análoga a la de subanillo. La categoría de semianillos tiene productos directos y sumas directas arbitrarias, además tiene límites inductivos y proyectivos (Véase Capítulos 2 y 9 en [6]).

Ejemplo 1.5. Algunos semianillos conmutativos son:

- El semianillo $\mathbb{N}_0 := (\mathbb{N} \cup \{0\}, +, \cdot, 0, 1)$ es un subsemianillo del semianillo $\mathbb{Q}_{\geq 0} := (\mathbb{Q}_{\geq 0}, +, \cdot, 0, 1)$ que es a su vez un subsemianillo del seimanillo $\mathbb{R}_{\geq 0} := (\mathbb{R}_{\geq 0}, +, \cdot, 0, 1)$.
- Dado $t \in \mathbb{R}_{>1}$, definimos $\mathbb{R}_t := (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus_t, \odot_t, -\infty, 0)$ donde las operaciones son $x \oplus_t y = \log_t(t^x + t^y)$, $x \odot_t y = \log_t(t^x t^y) = x + y$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ y $t^{-\infty} = 0$. Así, $\mathbb{R}_t$ es un semianillo.

Observación 1.6. *La noción de monoide se puede dar de modo más general para una categoría cualquiera lo que nos permite pensar un anillo como "un monoide de un grupo abeliano" y un semianillo como "un monoide de un monoide conmutativo" (véase Capítulo 7 en [14] sobre las **categorías monoidales**).*

Se dice que un semianillo S es (aditivamente) **idempotente** si $x + x = x$ para todo $x \in S$. Todo semianillo idempotente define un **orden** (parcial) **canónico** en el conjunto S donde $x \leq y$ cuando $x + y = y$. Diremos que S es un **semianillo idempotente totalmente ordenado** si el orden canónico es un orden total en S.

Ejemplo 1.7. Algunos semianillos idempotentes son:

- El **semicuerpo tropical** $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot, -\infty, 0)$ donde $x \oplus y = \max(x, y)$ y $x \odot y = x + y$ y el orden canónico es un orden total.
- Dado el conjunto $B = \{-\infty, 0\}$, con las notaciones previas, el **semianillo booleano** definido como $\mathbb{B} = (B, \oplus, \odot, -\infty, 0) \subset \mathbb{T}$ es un semianillo idempotente totalmente ordenado.
- El conjunto de todos los ideales de un anillo conmutativo es un semianillo conmutativo con la suma y la multiplicación de ideales. También el conjunto de los cerrados de un espacio topológico con la intersección como suma y la unión como producto. En ambos casos, el orden canónico no es un orden total en general.

Se dice que un semianillo S es **multiplicativamente cancelativo** si $xy = xz$ con $x \neq 0$ implica que $y = z$ y es **aditivamente cancelativo** si $x + y = x + z$ implica que $x = y$. Cabe destacar que ser multiplicativametne cancelativo no es lo mismo que decir que el semianillo no tiene divisores de cero, porque no tenemos una operación inversa a la suma.

Ejemplo 1.8. El semianillo $\mathbb{N}_0$ es aditivamente y multiplicativamente cancelativo.

Al igual que en la teoría de anillos podemos definir ideales en un semianillo:

Definición 1.9. *Un subconjunto I de S es un **ideal** de S si $I \subset S$ es tal que si $a \in I$, para todo $s \in S$, entonces $sa \in I$.*

*Un ideal $\mathfrak{p} \subset S$ es un **ideal primo** si verifica que si $xy \in \mathfrak{p}$ entonces $x \in \mathfrak{p}$ o $y \in \mathfrak{p}$.*

Las definiciones de **ideal maximal** y **semiaillo local** son análogas a la teoría de semianillo y además se verifica que todo ideal está contenido en algún ideal maximal y que los ideales maximales son primos.

Nótese que dado $f : S \to S'$ un morfismo de semianillos e $I \subset S'$ un ideal, entonces $f^{-1}(I)$ es un ideal de S (Proposición 9.46 en [6]), además si I es primo, $f^{-1}(I)$ también lo es. En particular $f^{-1}(0_{S'})$ es un ideal, al que denotaremos $\operatorname{Ker} f$.

De ahora en adelante los semianillos considerados serán siempre conmutativos.

Sea S un semianillo. Tenemos una noción análoga a la de módulo sobre un anillo:

Definición 1.10. *Dado M un monoide conmutativo, una estructura de S-**semimódulo** en M es una aplicación $S \times M \to M$ con $(s, m) \mapsto s \cdot m$ tal que para todo $s, s' \in S$ y $m, m' \in M$:*

- $s \cdot (m + m') = s \cdot m + s \cdot m'$.
- $(s + s') \cdot m = s \cdot m + s' \cdot m$ *y* $(s \cdot s') \cdot m = s \cdot (s' \cdot m)$.
- $1_S \cdot m = m$, $0_S \cdot m = 0_M$ *y* $s \cdot 0_M = 0_M$

Definición 1.11. *Dados M, M' dos S-semimodulos, $f : M \to M'$ es un* ***morfismo de S-semimódulos*** *si es un morfismo de monoides tal que $f(s \cdot m) = s \cdot f(m)$ para todo $s \in S$, $m \in M$.*

La definición de **subsemimódulo** es análoga a la de la de submódulo. El **núcleo** y la **imagen** de un morfismo de semimodulos como antes se definen del modo obvio y son subsemimodulos de M y M' respectivamente.

La categoría de semimodulos tiene sumas directas y productos directos arbitrarios, además tiene límites inductivos y proyectivos (véase Capítulo 14 en [6]). Sin embargo la categoría de semimódulos, a diferencia de la categoría de módulos sobre un anillo, **NO es una categoría abeliana** ya que los morfismos entre dos semimódulos no son un grupo abeliano sino un monoide y tampoco se verifica el teorema de factorización como expondremos en lo que sigue.

Definición 1.12. *Dar un* ***cociente*** *de un semianillo S es dar un subsemianillo $S' \subset S$ y un morfismo de semianillos epiyectivo $\pi : S \to S'$.*

Un ***cociente*** *de un semimódulo M es un subsemimódulo $M' \subset M$ y un morfismo de semimódulos epiyectivo $\pi : M \to M'$.*

Aquí encontramos una discrepancia notable respecto a la teoría de anillos, puesto que el cociente de dos módulos $M' \subset M$ se define a partir de la relación de equivalecia $m_1 \sim_R m_2 \Leftrightarrow m_1 - m_2 \in M'$.

Definición 1.13. *Una* ***congruencia en una semianillo*** *S es una relación de equivalencia $R \subset S \times S$ tal que es un subsemianillo. Además se dice que R es una* ***congruencia prima*** *cuando verifica que si $(xy, 0) \in R$ entonces $(x, 0) \in R$ o $(y, 0) \in R$.*

Una ***congruencia en un S-semimódulo*** *M es una relación de equivalencia $R \subset M \times M$ tal que es un sub-S-semimódulo de $M \times M$*

Se llama **congruencia impropia** en S (análogamente para M un S-semimódulo) a R tal que $(s, s') \in R$ para todo $s, s' \in S$, el resto de las congruencias se llaman **congruencias propias**. Dada una congruencia propia, el conjunto de las clases de equivalencia S/R es un semianillo con $[s]+[s'] = [s+s']$ y $[s]\cdot[s'] = [s\cdot s']$ para todo $s, s' \in S$ (análogamente M/R es un S-semimódulo con $[m]+[m'] = [m+m]$ y $s\cdot[m] = [s\cdot m]$ para todo $m, m' \in M$ y $s \in S$).

Con las notaciones precedentes, tenemos el siguiente resultado cuya demostración es sencilla, suponiendo que excluimos el caso impropio:

Teorema 1.14. *Sea R una relación de equivalencia en M, entonces R es un sub-S-semimódulo, es decir, una congruencia en M; si y solo si M/R es un conciente de M. Además se tiene el resultado análogo para una relación de equivalencia en S.*

Dado M un S-semimódulo y $N \subset M$ un subsemimódulo, dos congruencias distinguidas son:

- **Relación de Bourne**: dos elementos m, m' de M son equivalentes, $m \sim_N m'$, si y solo si existen $n, n' \in N$ tales que $m + n = m' + n'$. Al conjunto de las clases de equivalencia lo denotaremos $M/N := M/_{\sim_N}$ y es un subsemimódulo de M cuando la congruencia es propia.
- **Relación de Iizuka**: dos elementos m, m' de M son equivalentes, $m \sim^N m'$ si y solo si existen $n, n' \in N$ y $m'' \in M$ tales que $m + n + m'' = m' + n' + m''$. Al

conjunto de las clases de equivalencia lo denotaremos $M[/]N := M/_{\sim^N}$ y es un subsemimódulo de M cuando la congruencia es propia.

Podemos dar definiciones análogas para el caso en que $M = S$ un semianillo y $N = I$ un ideal, en cuyo caso obtenemos sendas congruencias en el semianillo S y se obtienen los subsemianillos S/I y $S[/]I$ cuando las congruencias son propias.

Notación 1.15. Utilizaremos la letra R para referirnos a una congruencia cualquiera, mientras que se utilizará $\sim$ cuando sea alguna de estas u otras congruencias distinguidas.

Como hemos visto, un ideal define una congruencia a partir de la de la relación de Bourne, así el cociente de un semianillo por un ideal será S/I (y de modo análogo se define el cociente de un semimódulo por un subsemimódulo). También, dada una congruencia R podemos definir $I_R = \{s \in S : (s, 0) \in R\}$ que es un ideal, (los ideales de la forma I_R para alguna congruencia R se conocen en la literatura como **ideales saturados**).

Nótese que la correspondecia entre ideales y congruencias no es 1 a 1.

Ejemplo 1.16. El semicuerpo tropical $\mathbb{T}$ tiene un único ideal propio $\{-\infty\}$, sin embargo existe una congruencia no trivial R, generada por $\{(a, 0)\}_{a\in\mathbb{R}}$, tal que $\mathbb{T}/R = \mathbb{B}$.

Dada R la congruencia en T generada por $\{(a, 0)\}_{a\in\mathbb{R}}$, el ideal $I_R = \{t \in \mathbb{T} : (t, -\infty) \in R\} = \{-\infty\}$ es el ideal cero de T.

Ejemplo 1.17. Un ideal distinto del total que define una congruencia impropia es el ideal máximal $\mathfrak{m} = \mathbb{N}_0 - \{1\} \subset \mathbb{N}$ ya que $1 \sim_{\mathfrak{m}} 0$ porque $1 + 2 = 0 + 3$ y así $\mathbb{N}_0/\mathfrak{m} = 0$.

En la teoría de anillos un ideal I de un anillo A es el núcleo de algún morfismo de anillos $A \to B$, sin embargo esto no es cierto en general para ideales de un semianillo. Un ideal I de S un semianillo es el núcleo de algún morfismo de anillos si I si verifica que si $a+b \in I$ y $a \in I$ entonces $b \in I$ (a estos ideales se les conoce como **ideales sustractivos**).

Otra particularidad es que se define la noción de **semiisomorfimso** como un morfismo epiyectivo de semianillos $f : S \to S'$ con $\operatorname{Ker} f = 0$ y si bien se cumple que todo isomorfismo de semianillos es un semiisomorfismo, no todo semiisomorfismo es biyectivo.

Ejemplo 1.18. Consideremos los semianillos $S = (\{0, 0.5, 1\}, \text{máx}, \text{mín}, 0, 1)$ y $\mathbb{B}$, el mofimso $f : S \to \mathbb{B}$ definido por $f(0) = -\infty$ y $f(0.5) = f(1) = 0$ es un morfismo de semianillos que es semiisomorfimso, pero no isomorfismo.

Claramente, esta mismas patologías y definiciones se dan para semimódulos.

Dado un morfismo de semianillos $f : S \to S'$ se define la **congruencia núcleo** en S siguiente, dados $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \sim_f s_2$ si y solo si $f(s_1) = f(s_2)$. En general, esta congruencia no es la misma que la congruencia de Bourne que define el ideal $\operatorname{Ker} f$.

Teorema 1.19. *Si $f : S \to S'$ es morfismo de semianillos, entonces la imagen es un semianillo, $S/_{\sim_f} \simeq \operatorname{Im} f$ es isomorfismo y $S/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f$ es semiisomorfismo.*

Demostración. Se deduce de las proposiciones 9.45 y 10.16 en [6]. □

Como hemos visto, el no tener una operación inversa a la suma hace que algunas definiciónes sean distintas a las que estamos habituados y que ciertas nociones, como la de sucesión exacta, no tengan a priori una generalización directa a la teoría de semianillos.

1.2. Espectro de un semianillo y localización.

Para dar la noción de esquema de semianillos hemos de introducir antes el espectro de un semianillo y también la de localización de semianillos.

Sea S un semianillo.
Se definen los ceros de un ideal $I \subset S$ como $V(I) = \{\mathfrak{p} \subset S \text{ ideal primo} : I \subseteq \mathfrak{p}\}$

Definición 1.20. *Llamaremos* ***espectro de un semianillo*** *S al conjunto de los ideales primos de S distintos de S dotado de la topología de Zariski, donde $\{V(I)\}$ con I ideal de S es una base por cerrados de la topología, y lo denotaremos* $\operatorname{Spec} S$.

Proposición 1.21 ([**Proposición 7.20 en** [**6**]]). *El espectro de un semianillo es un espacio cuasicompato y T_0.*

Dado un morfismo de semianillos induce un aplicación continua entre los espectros del modo evidente.

Observación 1.22. *Por lo previamente expuesto, es posible definir el "espectro" de las congruencias primas. Esta y otras construcciones han sido consideradas por distintos autores (v.g. véase [9], [10]) obteniendo diversos resultados.*

También se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.23 (**Teorema de los ceros de Hilbert** [**Proposición 7.28 en** [**6**]]). *Dado $I \subset S$ un ideal, se tiene*

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p} = \{a \in S : a^n \in I \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$$

donde $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} S : I \subseteq \mathfrak{p}\}$.

La localización de semianillos tiene una definición y propiedades similares a las de la teoría de anillos.

Definición 1.24. *Un suconjunto $T \subset S$ es un* ***sistema multiplicativo*** *si cumple que $1 \in T$ y si $t, t' \in T$, entonces $t \cdot t' \in T$.*

Definición 1.25. *La* ***localización*** *de S por un sistema multiplicativo T se define como $S_T := (S \times T)/\sim$ donde $\sim$ es una congruencia en $S \times T$ tal que:*

$$(s_1, t_1) \sim (s_2, t_2) \Leftrightarrow \exists\, r \in T : rs_1t_2 = rs_2t_1$$

De la definición se deduce que la localización S_T es un subsemianillo de S. El morfismo $\varphi : S \to S_T$ con $s \mapsto \frac{s}{1}$ es un morfismo de semianillos y se llama **morfismo de localización**.

Teorema 1.26 (**Propiedad universal de la localización** [**Proposición 11.13 en** [**6**]]). *Sea S un semianillo, $T \subset S$ un sistema multiplicativo, y $\varphi : S \to S_T$ el morfismo de localización. Si S' es un semianillo y $f : S \to S'$ un morfismo de semianillos tal que $f(T)$ es invertible en S', entonces existe un único morfismo $g : S_T \to S'$ tal que $f = g \circ \varphi$.*

Al igual que en el caso clásico, para un ideal (resp. ideal primo) $I \subset S$ tal que $I \cap T = \emptyset$, $I_T = \{\frac{i}{t} : i \in I, t \in T\}$ es un ideal (resp. ideal primo). Si tomamos $T = S - \mathfrak{p}$ donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo, se tiene que $S_{\mathfrak{p}} := S_T$ es un semianillo local de maximal $\mathfrak{p}_T$. Por otra parte, si $f : S \to S'$ es un morfismo de semianillos y $\mathfrak{p} \subset S'$ un ideal primo, induce un morfismo $f_{\mathfrak{p}} : S_{\mathfrak{q}} \to S'_{\mathfrak{p}}$ con $\frac{a}{b} \mapsto \frac{f(a)}{f(b)}$ dodne $\mathfrak{q} = f^{-1}(\mathfrak{p})$.

La localización de un semimódulo se define igual que en la teoría de anillos.

1.3. Grupo, anillo y módulo asociado.

Veremos ahora como a partir de un monoide, un semianillo y un seimódulo se puede definir de modo functorial un grupo, un anillo y un módulo, respectivamente.

Dado $(T, +, 0)$ un monoide, se tiene que $T \times T$ es un monoide y consideramos la relación de equivalencia en $T \times T$ dada por $(a, b) \sim (a', b')$ si y solo si existe algún $s \in T$ tal que $a + b' + s = a' + b + s$.

Se llama **grupo asociado** a $(T, +)$ a $T^{\Delta} := (T \times T)/\sim$ donde $[(a, b)] + [(a' + b')] = [(a+a', b+b')]$, así el elemento neutro de T^{Δ} para esta suma es $0 = [(0, 0)]$ y todo elemento $[(a, b)] \in T^{\Delta}$ tiene opuesto que es $[(b, a)]$.

Observemos que el morfismo natural $\phi : T \to T^{\Delta}$ definido por $a \mapsto [(a, 0)]$ es morfismo de moniodes y se verifica que para cualquier grupo $(G, +)$ se tiene que

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{gr}(T^{\Delta}, G) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{mon}(T, G) \\ f & \longmapsto & f \circ \phi \end{array}$$

es una biyección.

Además si $g : T \to T'$ es un morfismo de monoides, induce un morfismo de grupos entre los grupos asociados $g_* : T^{\Delta} \to T'^{\Delta}$ con $g([(a, b)]) = [(g(a), g(b))]$.

Dado $(S, +, \cdot, 0, 1)$ un semianillo, se llama **anillo asociado** a S a $S^{\Delta} := (S \times S)/\sim$, donde $\sim$ denota a la relación de equivalencia antes definida. S^{Δ} es un anillo con la suma $[(a, b)] + [(a' + b')] = [(a + a', b + b')]$ y el producto $[(a, b)][(a' + b')] = [(aa' + bb', ab' + a'b)]$.

De forma similar a antes, tenemos que el morfismo natural $\phi : S \to S^{\Delta}$ definido por $s \mapsto [(s, 0)]$ es morfismo de semianillos y se verifica que para cualquier anillo $(A, +, \cdot)$ se tiene que

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(S^{\Delta}, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{SRing}}(S, A) \\ f & \longmapsto & f \circ \phi \end{array}$$

es una biyección.

Además si $g : S \to S'$ es un morfismo de semianillos, induce un morfismo de anillos entre los anillos asociados $g_* : S^{\Delta} \to S'^{\Delta}$ con $g([(s, s')]) = [(g(s), g(s'))]$.

Observación 1.27. *Esta construccion es equivalente a considerar en el semianillo producto $S \times S$ el ideal de la diagonal $\Delta = \{(s, s) : s \in S\}$ y tomar el cociente $S \times S/\Delta$ definido por la relación de Bourne.*

Ejemplo 1.28. El anillo asociado al semianillo $\mathbb{N}_0$ es $\mathbb{Z}$.

Dado N un S-semimódulo, N^{Δ} es un S^{Δ}-módulo. Se cumple que para M un S^{Δ}-módulo cualquiera, $\mathrm{Hom}_{S^{\Delta}-mod}(N^{\Delta}, M) \to \mathrm{Hom}_{S-smod}(N, M)$ con $f \mapsto f \circ \phi$ donde $\phi : N \to N^{\Delta}$, es una biyección.

Observación 1.29. *Se puede dar el caso de que el grupo, anillo o módulo asociado sea cero, esto no sucede cuando $\{s \in S : \exists a \in S \text{ con } a + s = a\} \neq S$ donde S es un monoide o* *un semianillo. Por ejemplo, el anillo asociado a un semianillo aditivamente idempotente cualquiera es cero, en este sentido, podemos decir que estos semianillos están "muy lejos" de ser anillos.*

Observación 1.30. *Si consideremos el functor de olvido F : **Ring** $\to$ **SRing** de la categoría de anillos a la categoría de semianillos, al componer con el functor G que a cada semianillo le hace corresponder su anillo asociado, obtenemos la identidad, $G \circ F \simeq \mathrm{Id}$. De igual manera podemos considerar el functor de olvido de la categoría de grupos a la categoría de monoides o el de la categoría de módulos a la de semimódulos obteniendo identicos resultados.*

2. Cohomología de Čech para esquemas de semianillos

En esta sección, la referencia principal será [7].

2.1. Esquemas de semianillos.

Vamos a replicar la construcción de esquema de anillos para el caso de un semianillo. Empezaremos tratando el caso afín, es decir, consideramos el espacio topológico $X = \operatorname{Spec} S$ donde S es un semianillo, y vamos dotarlo de un haz estructural $\mathcal{O}_X$ que asigne a cada abierto de X un semianillo.

Vamos a detallar la construcción del haz $\mathcal{O}_X$ como haz asociado al prehaz de localización, que definiremos de forma análoga a la que se da en el caso del espectro de un anillo.

Consideramos el prehaz en X dado por el functor contravariante $\tilde{S} : \mathcal{C}_X \to$ **SMod** donde $\mathcal{C}_X$ es la categoría de los abiertos de X y **SMod** la categoría de semimódulos con $U \rightsquigarrow S_U$ donde S_U es la localización por los elementos de S que no se anulan en ningún punto de U y los morfismos de restricción son los obvios. $\tilde{S}$ es un prehaz de semianillos teniendo en cuenta que, para cada abierto $U \subset X$, $\tilde{S}(U) = S_U$ tiene estructura de semianillo y los morfismos de restricción son morfismos de semianillos.

El prehaz $\tilde{S}$ es haz en los abiertos básicos de X ya que la localización de semianillos se comporta igual que en la teoría de anillos y podemos dar la misma demostración.

El germen del prehaz en un punto $x \in X$ es

$$\tilde{S}_x = \varinjlim_{x \in U} \tilde{S}(U) = \varinjlim_{x \in U} \tilde{S}(U_f) = \varinjlim_{x \notin V(f)} S_f = S_x$$

donde denotamos por $U_f = X - V(f)$ los abiertos básicos y S_f es la localización por el sistema multiplicativo $\{f^i\}_{i \geq 0}$. La definición tiene sentido porque la categoría de semianillos tiene límites inductivos y se demuestra igual que para anillos.

Consideramos $\underline{\tilde{S}} = \bigsqcup_{x \in X} S_x$ el espacio éltalé asociado al prehaz $\tilde{S}$ y $\pi : \underline{\tilde{S}} \to X$. Hacificando el prehaz anterior, definimos en cada abierto $U \subseteq X$:

$$\mathcal{O}_X(U) := \{\tilde{\sigma} : U \to \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} S_{\mathfrak{p}} \text{ secciones continuas } \},$$

donde $\tilde{\sigma}$ es la sección de π que induce la sección del prehaz $\sigma \in \tilde{S}(U)$ y $\tilde{\sigma}(x) := \sigma_x \in S_x$ es el germen de la sección en el punto x y dotamos a $\underline{\tilde{S}}$ de la topología final para todas las posibles σ definidas sobre los abiertos $U \subseteq X$.

Por construcción $\mathcal{O}_X$ es haz de semianillos definiendo en $\mathcal{O}_X(U)$ la suma y el producto de secciones a partir de la estructura de semianillo que se tiene en $\sqcup_{x\in U} S_x$ por ser producto directo de semianillos.

Proposición 2.1. *Sea S un semianillo y $(X = \operatorname{Spec} S, \mathcal{O}_X)$ un esquema afín de semianillos:*

(1) *Para todo $f \in S - \{0\}$ se tiene que $S_f \simeq \mathcal{O}_X(U_f)$ donde $U_f = \{x \in X : f \notin x\} = = X - V(f)$. En particular $S \simeq \mathcal{O}_X(X)$.*
(2) *Dado $x \in X$, el germen del haz $\mathcal{O}_{X,x}$ es un semianillo local isomorfo a S_x.*

Las demostraciones son las mismas *mutatis mutandis* que en la categoría de anillos y se pueden encontrar en las proposiciones 2.2.4 y 2.2.5 en [8]. Cabe destacar que para demostrar el primer apartado se hace uso del Teorema de los ceros de Hilbert para semianillos.

Definición 2.2. *Decimos que $(X = \operatorname{Spec} S, \mathcal{O}_X)$ es un **esquema afín** de semianillos.*

Definición 2.3. *Dado $(X, \mathcal{O})$ donde X es un espacio topológico y $\mathcal{O}$ un haz de semianillos se dice que es un **esquema de semianillos** si las firbas del haz en todos los puntos son semianillos locales y todo punto tienen un entorno isomorfo a un esquema afín.*

Los morfismos de esquemas de semianillos se definen igual que en el caso clásico.

Teorema 2.4. *La categoría opuesta a la categoría de esquemas afines de semianillos es equivalente a la categroía de semianillos.*

Demostración. Sean S, S' semianillos, $(X = \operatorname{Spec} S, \mathcal{O}_X)$ y $(Y = \operatorname{Spec} S', \mathcal{O}_Y)$ dos esquemas afines de semianillos. Queremos ver que $\operatorname{Hom}(S, S') = \operatorname{Hom}(Y, X)$.

Sea $g : S \to S'$ un morfismo de semianillos queremos ver que induce un mosfismo entre los esquemas afines. Tenemos que para cada $\mathfrak{q} \in Y$, g induce un morfismo local de semianillos $g_\mathfrak{q} : S_{g^{-1}(\mathfrak{q})} \to S'_\mathfrak{q}$ y un morfismo continuo entre los espectros $f : Y \to X$ con $\mathfrak{q} \mapsto g^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$.

Por otra parte g induce un morfismo de haces $f^\# : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$. En cada abierto $U \subseteq X = \operatorname{Spec} S$ tenemos que

$$\mathcal{O}_X(U) = \{\sigma | \sigma : U \to \sqcup_{\mathfrak{p}\in U} S_\mathfrak{p}\}$$

y la imagen directa es

$$f_*\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)) = \{\tau \mid \tau : f^{-1}(U) \to \sqcup_{\mathfrak{q}\in f^{-1}(U)} S'_\mathfrak{q}\}.$$

Como tenemos definido en cada $\mathfrak{p} \in Y$ el morfismo $g_\mathfrak{p}$ anterior, consideramos

$$\varphi := \bigsqcup_{\mathfrak{q}\in f^{-1}(U)} g_\mathfrak{p} : \bigsqcup_{\mathfrak{q}\in f^{-1}(U)} S_{g^{-1}(\mathfrak{q})} \to \bigsqcup_{\mathfrak{q}\in f^{-1}(U)} S'_\mathfrak{q}$$

de este modo definimos el morfismo de haces como $f^\#(U) : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U))$ con $\sigma \mapsto \tau := \varphi \circ \sigma \circ f$ en cada abierto $U \subset X$ ya que:

$$\begin{tikzcd} \bigsqcup_{\mathfrak{p}\in U} S_\mathfrak{p} \arrow[r, "\varphi"] & \bigsqcup_{\mathfrak{q}\in f^{-1}(U)} S'_\mathfrak{q} \\ U \subseteq X \arrow[u, "\sigma"] & f^{-1}(U) \subseteq Y \arrow[l, "f"] \arrow[u, "\tau"'] \end{tikzcd}$$

Se comprueba que $f^{\#}(U)$ está bien definido (se pueden encontrar los detalles en la Proposición 2.2.6 en [8]) y por construcción es claro que es compatible con la inclusión de abiertos. Que $f^{\#}$ es un morfismo de semianillos y es local en cada abierto, esto se deduce fácilmente de que $f^{\#}_{\mathfrak{p}} = g_{\mathfrak{p}}$. Luego hemos obtenido un morfismo de esquemas afines.

Para ver el recíproco utilizamos la Proposición 2.1. Supongamos que $(f, f^{\#}) : Y \to X$ es un morfismo de esquemas afines, tomando secciones globales obtenemos $h = f^{\#}(X) : \mathcal{O}_X(X) = S \to \mathcal{O}_Y(f^{-1}(X)) = \mathcal{O}_Y(Y) = S'$ morfismo de semianillos. Veamos ahora que el morfismo de esquemas inducido por el morfismo de semianillos h coincide con $(f, f^{\#})$. Como h es compatible con tomar germen del haz, localizando en cada punto, en cada punto obtenemos para $\mathfrak{q} \in Y$:

$$\begin{array}{ccc} S = \mathcal{O}_X(X) & \xrightarrow{h} & S' = \mathcal{O}_Y(f^{-1}(X)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{f(\mathfrak{q})} = \mathcal{O}_{X,f(\mathfrak{q})} & \xrightarrow{f^{\#}_{\mathfrak{q}}} & S'_{\mathfrak{q}} = \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{q}} \end{array}$$

Se tiene que $h^{-1}(\mathfrak{q}) = f(\mathfrak{q})$ y construyendo el morfismo de esquemas afines $(g, g^{\#})$ a partir de h como antes, tenemos también que $h^{-1}(\mathfrak{q}) = g(\mathfrak{q})$ y también $f^{\#}_{\mathfrak{q}} = g^{\#}_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in Y$ se deduce que $g^{\#}$ y $f^{\#}$ coinciden en cada abierto y por tanto son iguales. $\square$

Observación 2.5. *Dado M un S-semimódulo se le puede asociar un haz de $\mathcal{O}_X$-semimódulos $\tilde{M}$ de igual modo que en el caso clásico definiento*

$$\tilde{M}(U) := \{\tilde{\sigma} : U \to \bigsqcup_{x \in U} M_x \text{ secciones continuas } \}$$

con $\tilde{\sigma}(x) \in M_x$. Además se puede demostrar que $(\tilde{M})_x = M_x$ y $\tilde{M}(U_f) = M_f$ con las notaciones ya establecidas.

2.2. Complejos de semimódulos y semimódulos de cohomología.

Al no tener una forma natural de definir sucesiones exactas en la categroía de semimódulos, para dar la noción de complejo de semimódulos utilizaremos la construcción dada por Patchkoria en [15], que permite expresar las sumas altenadas como suma de los términos positivos y los términos negativos. En este sentido, la idea guarda cierta similitud con la de anillo y módulo asociado.

Sea S un semianillo.

Definición 2.6. *Dada una colección de S-semimódulos M^n con $n \in \mathbb{Z}$ y ∂_n^+ y ∂_n^- morfimos de S-semimódulos:*

$$\cdots \overset{\partial^+_{n-2}}{\underset{\partial^-_{n-2}}{\rightrightarrows}} M^{n-1} \overset{\partial^+_{n-1}}{\underset{\partial^-_{n-1}}{\rightrightarrows}} M^n \overset{\partial^+_{n}}{\underset{\partial^-_{n}}{\rightrightarrows}} M^{n+1} \overset{\partial^+_{n+1}}{\underset{\partial^-_{n+1}}{\rightrightarrows}} \cdots$$

*$M^\bullet = \{M^n, \partial_n^+, \partial_n^-\}$ es un **complejo de cocadenas de semimódulos** si para todo $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que:*

$$\partial^+_{n+1} \circ \partial^+_n + \partial^-_{n+1} \circ \partial^-_n = \partial^-_{n+1} \circ \partial^+_n + \partial^+_{n+1} \circ \partial^-_n \tag{2.1}$$

Nótese que si M^n son módulos sobre un anillo y consideramos $M^\bullet = \{M^n, \partial_n^+, \partial_n^-\}$, se veirifica que $M^\bullet$ es un complejo de semimódulos si y solo si $\{M, d_n = \partial_n^+ - \partial_n^-\}$ es un complejo de módulos. Esto es así ya que la condición de ser complejo de semimódulos en el caso de módulos equivale a que $\partial_{n+1}^{+}(\partial_n^{+}-\partial_n^{-})-\partial_{n+1}^{-}(\partial_n^{+}-\partial_n^{-})=d_{n+1}\circ d_n=0$.

En particular, si $M^\bullet=\{M^n,\partial_n^+,\partial_n^-\}$ es un complejo de S-semimódulos, entonces $(M^\bullet)^\Delta=\{(M^n)^\Delta,\partial_n^+-\partial_n^-\}$ es un complejo de S^Δ-módulos.

Definición 2.7. *Dado $M^\bullet$ un complejo de semimódulos se llama n-**cociclos** al S-semimódulo:*

$$Z^n(M^\bullet)=\{m\in M^n:\partial_n^+(m)=\partial_n^-(m)\}\subset M^n$$

*Se define el n-**ésimo** S-**semimódulo de cohomología** como:*

$$H^n(M^\bullet)=Z^n(M^\bullet)/B^n$$

donde B^n es la congruencia en $Z^n(M^\bullet)$ tal que $(x,y)\in B^n$ si y solo si para ciertos $u,v\in M^{n-1}$:

$$x+\partial_{n-1}^+(u)+\partial_{n-1}^-(v)=y+\partial_{n-1}^+(v)+\partial_{n-1}^-(u)$$

De nuevo, si M^n son módulos sobre un anillo y $M^\bullet=\{M^n,\partial_n^+,\partial_n^-\}$, la definición coincide con la del n-ésimo grupo de cohomología del complejo de módulos $\{M,d_n=\partial_n^+-\partial_n^-\}$. En tal caso $Z^n(M^\bullet)=\operatorname{Ker} d_n$ son los ciclos y la congruencia equivale a que $x\sim y$ si y solo si $x-y=d_{n-1}(v)-d_{n-1}(u)$ y $H^n(M^\bullet)$ es el n-ésimo grupo de cohomología.

Nótese además que la definición dada de los n-cociclos se corresponde con el ecualizador de ∂_n^+ y ∂_n^-.

Definición 2.8. *Dados $L^\bullet$ y $K^\bullet$ dos complejos de cocadenas de semimódulos una colección de morfismos de semimódulos $f=\{f^n:L^n\to K^n\}$, que denotamos $f:L^\bullet\to K^\bullet$*

- *f es un **morfismo de complejos** si para todo $n\in\mathbb{Z}$:*
$$\partial_{L,n}^+\circ f^n+f^{n+1}\circ\partial_{K,n}^-=\partial_{L,n}^-\circ f^n+f^{n+1}\circ\partial_{K,n}^+$$
- *f es un $\pm$-**morfismo** si para todo $n\in\mathbb{Z}$:*
$$f^{n+1}\circ\partial_{L,n}^+=\partial_{K,n}^+\circ f^n \qquad y \qquad f^{n+1}\circ\partial_{L,n}^-=\partial_{K,n}^-\circ f^n$$

Nótese que un $\pm$-morfismo es un morfismo de compejos. Además, si tomamos $L^\bullet$ y $K^\bullet$ complejos de módulos, la definición de morfismo de complejos coincide con la habitual.

Proposición 2.9. *Dados $L^\bullet$ y $K^\bullet$ dos complejos de S-semimódulos y $f=\{f^n\}:L^\bullet\to K^\bullet$ un $\pm$-morfismo, induce un morfismo de semimódulos en cohomología para cada $n\in\mathbb{Z}$*

$$\begin{aligned}H^n(f):H^n(L^\bullet)&\longrightarrow H^n(K^\bullet)\\ [x]&\longmapsto [f^n(x)]\end{aligned}$$

donde $[x]$ es la clase de un ciclo $x\in Z^n(L^\bullet)$ en $H^n(L^\bullet)$.

Demostración. En primer lugar veamos que $f(Z^n(L^\bullet))\subseteq Z^n(K^\bullet)$. Esto es así ya que si $m\in Z^n(L^\bullet)$ tenemos que $\partial_{L,n}^+(m)=\partial_{L,n}^-(m)$ y por ser f un $\pm$-morfismo, deducimos que $\partial_{K,n}^+(f(m))=\partial_{K,n}^-(f(m))$, luego $f(m)\in Z^n(K^\bullet)$. Además si $(x,y)\in B_L^n$, es decir, existen $u,v\in L^{n-1}$ tales que $x+\partial_{L,n-1}^+(u)+\partial_{L,n-1}^-(v)=y+\partial_{L,n-1}^+(v)+\partial_{L,n-1}^-(u)$, entonces por ser f^n morfismo de semimódulos $f^n(x)+f^n(\partial_{L,n-1}^+(u))+f^n(\partial_{L,n-1}^-(v))=f^n(y)+f^n(\partial_{L,n-1}^+(v))+f^n(\partial_{L,n-1}^-(u))$ y por ser f $\pm$-morfismo se tiene que

$$f^n(x)+\partial_{K,n-1}^+(f^{n-1}(u))+\partial_{K,n-1}^-(f^{n-1}(v))=f^n(y)+\partial_{K,n-1}^+(f^{n-1}(v))+\partial_{K,n-1}^-(f^{n-1}(u)),$$

luego $(f(x),f(y))\in B_K^n$. A partir de lo visto, se comprueba fácilmente que $H^n(f)$ es en efecto un morfismo de semimódulos. $\square$

Observación 2.10. *Al elaborar este documento no se ha profundizado en la posibilidad de plantear la cohomología de haces de semimódulos haciendo uso de functores derivados o si en algún caso se puede plantear alguna versión del teorema de De Rham. A título informativo mencionaremos que, en el Capítulo 17 en [6], se estudian los semimódulos proyectivos e inyectivos, posteriormente en [17] se probó que la categoría de semimódulos sobre un semianillo aditivamente idempotente todo semimódulo se puede resolver por semimódulos inyectivos.*

Por otra parte, ademas del problema antes mencionado en referencia a las sucesiones exactas de semimódulos, en [7] se apunta a que hay ciertos problemas para plantear una teoría de functores derivados para la cohomología de haces de semimódulos.

2.3. Cohomología de Čech.

Dado X un espacio topológico, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos y $\mathcal{F}$ un haz en X con valores en una categoría abeliana, la cohomología de Čech se define a partir del complejo de Čech $C^\bullet = \{C^n, d\}$, que en grado n es

$$C^n = C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{(i_0 \dots i_n)\in I^{n+1}} \mathcal{F}(U_{i_0\dots i_n})$$

donde $U_{i_0\dots i_n} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}$ y $d : C^n \to C^{n+1}$ se define como

$$(d_n(x))_{i_0\dots i_{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k x_{i_0\dots \widehat{i_k}\dots i_n} |_{U_{i_0\cdots i_{n+1}}}$$

donde $s_{i_0\dots i_n+1}$ denotada a la coordenada de $s \in C^{n+1}$ en $\mathcal{F}(U_{i_0\dots i_n+1})$. Notemos que en este caso pueden repetirse los índices y que no estamos suponiendo un orden total en el conjunto de ínidices, es decir, que aparecen términos repetidos en las cadenas, sin embargo se puede demostrar que la cohomología de Čech no depende del orden total en el conjunto de índices (véase [1]).

En el caso que vamos a estudiar, el haz toma valores en una categoría que no es abeliana y no ha sido probado que la definición sea independiente del orden. No obstante, en este documento trabajaremos definiremos la cohomología de Čech ordenada por simplicidad.

Sea S un semianillo, dado X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un haz de S-semimódulos, se puede definir la cohomología de Čech para haces de semimódulos generalizando la construcción conocida. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de X indexados por I un conjunto de totalmente ordenado, denotaremos como antes $U_{i_0\dots i_p} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$ y definimos las n**-cocadenas** para cada $n \in \mathbb{N}$ como el conjunto:

$$C^n = C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{i_0<\dots<i_n} \mathcal{F}(U_{i_0\dots i_n})$$

En particular, definimos $C^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ para $i < 0$. Dado $x \in C^n$ denotaremos por $x_{i_0\dots i_n}$ a la coordenada de x en $\mathcal{F}(U_{i_0\dots i_n})$. Se definen las **diferenciales** como:

$$(d_n^+(x))_{i_0\dots i_{n+1}} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^{n+1} x_{i_0\dots \widehat{i_k}\dots i_n} |_{U_{i_0\cdots i_{n+1}}}$$

$$(d_n^-(x))_{i_0\dots i_{n+1}} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impar}}}^{n+1} x_{i_0\dots\widehat{i_k}\dots i_n}|_{U_{i_0\cdots i_{n+1}}}$$

donde $\widehat{i_k}$ denota que quitamos ese índice.

De esta manera $C^\bullet = \{C^n, d_n^+, d_n^-\}$ es un complejo de cadenas de semimódulos porque las diferenciales d_n^+ y d_n^- verifican la ecuación (2.1), cosa que no es difícil de comprobar teniendo en cuenta cómo se suprimen los índices. Denotaremos el **n-ésimo semimódulo de cohomología de Čech** de $\mathcal{F}$ respecto de $\mathcal{U}$ como

$$\check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := Z^n(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}))/B^n.$$

Observación 2.11. *La demostracion en el caso clásico de que la cohomología de Čech no depende del orden total en el conjunto de índices (Lema 23.6 en [1]) considera el signo de ciertas permutaciones y habría de adaptarse a este caso en el que no podemos trabajar con sumas alternadas, además de dar una definición adecuada de equivalencia homotópica.*

Ahora veremos que, con esta definición de la cohomología de Čech, se verifican los siguientes resultados:

Proposición 2.12. *Dado X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un haz de S-semimódulos en X y $\mathcal{U}$ un recubrimiento por abiertos de X, entonces*

$$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}(X)$$

Demostración. Por definición $\check{H}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})/B^0$ donde $(x, y) \in B^0$ si y solo si $x + d_{-1}^+(u) + d_{-1}^-(v) = y + d_{-1}^-(u) + d_{-1}^+(v)$, y por ser $C^{-1} = 0$, esto equivale que $(x, y) \in B^0$ si y solo si $x = y$, es decir, B^0 es la congruencia trivial y así $\check{H}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Para calcular los 0-cociclos consideremos:

$$\prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \overset{d_0^+}{\underset{d_0^-}{\rightrightarrows}} \prod_{i<j} \mathcal{F}(U_{ij})$$

donde d_0^+ es el producto de los morfimos $\mathcal{F}(U_j) \to \mathcal{F}(U_{ij})$ inducidos por las inclusiones $U_{ij} \hookrightarrow U_j$ y d_0^- es el producto de los morfismos $\mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{F}(U_{ij})$ inducidos por las inclusiones $U_{ij} \hookrightarrow U_i$.

Para cada $i \in I$ tenemos el morfismo de inclusión $U_i \hookrightarrow X$ que induce $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U_i)$. Por la condición de haz si dos secciónes $\sigma', \sigma'' \in \mathcal{F}(X)$ cumplen que $\sigma'|_{U_i} = \sigma''|_{U_i}$ para todo $i \in I$, entonces $\sigma' = \sigma''$, luego $\mathcal{F}(X) \subseteq Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ mandando σ a $(\sigma|_{U_i})_{i\in I}$ que es morfismo de semianillos. También por la condición de haz, si $(\sigma_i)_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es tal que $\sigma_i|_{U_{ij}} = \sigma_j|_{U_{ji}}$, o sea, si $(\sigma_i) \in Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, entonces existe $\sigma \in \mathcal{F}(X)$ con $\sigma|_{U_i} = \sigma_i$ con lo que el morfimso anterior es epiyectivo. De este modo concluimos que tenemos el isomorfismo de semianillos $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ que buscabámos. □

Proposición 2.13. *Dado X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un haz de S-semimódulos en X y $\mathcal{U}$ un recubrimiento por n abiertos (propios) de X , entonces*

$$\check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0 \text{ para } i \geq n$$

Demostración. Como $C^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ para $i \geq n$, entonces $\check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ para $i \geq n$. □

Dado un recubrimiento de X un espacio topológico, podemos obtener un sistema inductivo de semimódulos tomando los recubrimientos abiertos de un espacio topológico ordenados por los refinamientos.

Recordemos que se dice que un recubrimiento $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ de X es un **refinamiento** de $\mathcal{U} := \{U_i\}_{i\in I}$ si existe una aplicación $\sigma : J \to I$ tal que $V_j \subseteq U_{\sigma(j)}$ para todo $j \in J$. Llamando $C^\bullet_{\mathcal{U}} := \{C^n(\mathcal{U},\mathcal{F}), \partial^+_n, \partial^-_n\}$ y $C^\bullet_{\mathcal{V}} := \{C^n(\mathcal{V},\mathcal{F}), d^+_n, d^-_n\}$ donde $\mathcal{F}$ es un haz de S-semimódulos, se define $\Sigma^\bullet : C^\bullet_{\mathcal{U}} \to C^\bullet_{\mathcal{V}}$ definido por

$$\Sigma^n : C^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^n(\mathcal{V},\mathcal{F}) \text{ con } \Sigma^n(x)_{j_0\dots j_n} = x_{\sigma(j_0)\dots\sigma(j_n)} \mid_{V_{j_0\cdots j_n}} .$$

En [7] se comprueba que $\Sigma^\bullet$ es un $\pm$-morfismo y por tanto, induce un morfismo en cohomología $H^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^\bullet(\mathcal{V},\mathcal{F})$ obteniendo así un sistema inductivo de semimódulos. Como la categoría de semimódulos tiene límites inductivos, tiene sentido la siguiente:

Definición 2.14. *Dado X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un haz de S-semimódulos en X se define el* ***n-ésimo semimódulo de cohomología*** *de Čech de X como*

$$\check{H}^m(X,\mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^m(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

En particular $\check{H}^0(X,\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$

2.4. Espacio proyectivo sobre un semicuerpo idempotente totalmente ordenado.

Sea $(T,+,\cdot,0,1)$ un semicuerpo aditivamente idempotente, totalmente ordenado, o sea, $a+b = a$ ó b para cualesquiera $a,b \in T$. Recordemos que $(T-\{0\},\cdot)$ es un grupo abeliano.

Sea $T[x_0,...,x_n]$ el semianillo de polinomios en n-variables con coeficientes en T, que es aditivamente idempotente por serlo T, definimos el **espacio proyectivo** sobre T como

$$\mathbb{P}^n_T := T^n - \{0,...,0\}/\sim$$

donde $\mathbf{x} \sim \lambda\mathbf{x}$ para cualquier $\lambda \in T - \{0\}$ y $\mathbf{x} := (x_0,...,x_n) \in T^n - \{0,...,0\}$. Denotaremos por $(x_0 : ... : x_n)$ las coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}^n_T$. Igual que en el caso clásico, podemos tomar un recubrimiento de $X = \mathbb{P}^n_T$ por abiertos $U_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{P}^n_T : x_i \neq 0\}$ para $i = 0,...,n$ de modo que tenemos la identificación con T^n dada por $(x_0 : ... : x_n) \mapsto (x_0x_i^{-1},...,x_{i-1}x_i^{-1},x_{i+1}x_i^{-1},...,x_nx_i^{-1})$. En las intersecciones $U_i \cap U_j$ se definen los morfismos de pegado igual que en el caso clásico $(\frac{x_0}{x_i},...,\frac{x_j}{x_i},...,\frac{x_n}{x_i}) \mapsto (\frac{x_0}{x_j},...,\frac{x_i}{x_j},...,\frac{x_n}{x_j})$.

Podemos considerar X como esquema identificando $U_i := \operatorname{Spec} T[\frac{x_0}{x_i},...,\frac{x_n}{x_i}]$ para $i = 0,...,n$ y $\mathcal{O}_{U_i}$ el haz estructural de semianillos en U_i. Como $(U_i,\mathcal{O}_{U_i})$ verifican las condiciones de recollement nos permiten definir el esquema $(X,\mathcal{O}_X)$ donde para cada $U \subseteq X$ se define

$$\mathcal{O}_X(U) = \{\sigma_i \in \mathcal{O}_{U_i}(U\cap U_i) : \sigma_i|_{U\cap U_i\cap U_j} = \sigma_j|_{U\cap U_j\cap U_i}\}$$

En primer lugar, veamos el caso de la recta proyectiva. Sea $X = \mathbb{P}^1_T$ considerado como el esquema de semianillos en el que tomamos el recubrimiento por abiertos $\mathcal{U} = \{U_0,U_1\}$ donde $U_0 = \operatorname{Spec} T[x]$ y $U_1 = \operatorname{Spec} T[\frac{1}{x}]$ que pegamos en la intersección mandando $x \mapsto \frac{1}{x}$ como en el caso clásico.

Sabemos que $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(X) = \check{H}^0(X,\mathcal{O}_X)$ y $\mathcal{O}_X(X) = T$

Por otra parte, $\check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) = 0$ para $i \geq 2$, luego solo nos falta por calcular $\check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$. Tenemos

$$0 \rightrightarrows C^0 = \mathcal{O}_X(U_0)\times\mathcal{O}_X(U_1) \underset{d_0^-}{\overset{d_0^+}{\rightrightarrows}} C^1 = \mathcal{O}_X(U_{01}) \underset{d_1^-}{\overset{d_1^+}{\rightrightarrows}} 0$$

donde $d_0^+(a_0,a_1)=a_1$ y $d_0^-(a_0,a_1)=a_0$. Por la definición de $\mathcal{O}_X$, tenemos que $\mathcal{O}_X(U_0)=T[x]$, $\mathcal{O}_X(U_1)=T[\frac{1}{x}]$ y $\mathcal{O}_X(U_{01})=T[x,\frac{1}{x}]$

$$0 \rightrightarrows T[x]\times T[\frac{1}{x}] \underset{d_0^-}{\overset{d_0^+}{\rightrightarrows}} T[x,\frac{1}{x}] \underset{d_1^-}{\overset{d_1^+}{\rightrightarrows}} 0.$$

Tenemos que $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)=\{s\in C^1 : d_1^+(s)=d_1^-(s)\}=C^1=T[x,\frac{1}{x}]$. Vamos a ver que cualquier $x\in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$ es congruente a cero y esto se cumple si y solo si existen $u,v\in C^0$ con $u=(u_0,u_1)$ y $v=(v_0,v_1)$ tales que

$$x+d_0^+(u)+d_0^-(v)=d_0^+(v)+d_0^-(u),$$

esto es

$$x+u_1+v_0=u_0+v_1.$$

Expresando $x=x_0+x_1$ donde $x_0\in T[x]$ y $x_1\in T[\frac{1}{x}]$ y tomando $u=(x_0,0),v=(0,x_1)$ deducimos que $\check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)=0$.

En el caso general en que $X=\mathbb{P}^n_T$ considerado como el esquema de semianillos en el que tomamos el recubrimiento por abiertos $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i=0}^n$ se razona de un modo similar. Por lo visto anteriormente sabemos que $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)=\mathcal{O}_X(X)=T$ y $\check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)=0$ para $i\geq n+1$. Para demostrar que $\check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)=0$ para $1\leq i\leq n$ se fija un tal i y basta probar que dado $t\in Z^i(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$, entonces $(t,0)\in B^i$, es decir, t es congruente con 0.

Para demostrarlo escribiremos $t=(t_L)$ donde L es un índice de la forma $i_0<...<i_r$ con $i_0,...,i_r\in\{0,...,n\}$. Como $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i=0}^n$ es un recubrimiento, escribimos cada t_L podemos escribirlo como suma de elementos de $C^{r-1}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$ como $t_L=\sum_j s_{L_j}$ con L_j de la forma $j_0<...<j_{r-1}$ con $j_0,...,j_{r-1}\in\{0,...,n\}$, o sea, si $t_L=t_{i_0,...,i_r}$ escribimos $t_{i_0,...,i_r}=\sum_{0\leq j\leq r} s_{i_0,...,\widehat{i_j},...,i_r}$ donde $s_{i_0,...,\widehat{i_j},...,i_r}\in U_{i_0,...,\widehat{i_j},...,i_r}$. Definiendo $u=(u_K)$ con $u_K=\sum_L\sum_{L_j=K}s_{L_j}$ y $u=v$ se tiene para cada índice L como antes que

$$t_L+(d_{r-1}^+(u))_L+(d_{r-1}^-(v))_L=(d_{r-1}^+(u))_L+(d_{r-1}^-(v))_L=(d_{r-1}^+(v))_L+(d_{r-1}^-(u))_L$$

donde hemos usado en la primera igualdad que $t_L+t_L=t_L$ por la idempotencia de la suma, con lo que concluimos.

3. Otras construcciones relacionadas con los esquemas de semianillos

De igual modo que los semianillos generalizan la noción de anillo, cabe plantearse otras generalizaciones de ambas estructuras de manera que se pueda dar una teoría de esquemas común. Una de las posibles generalizaciones es desarrollada por Lorscheid en [12] definiendo los blueprints. Esta y otras nociones (como la definición de *sesquiad* dada por Deitmar en [4]) se relacionan con la literatura sobre $\mathbb{F}_1$ el "cuerpo de un elemento". En lo que resta presentaremos los blueprints y conectaremos lo visto con la idea detrás de las posibles definiciones de $\mathbb{F}_1$ y el interés de la categoría de $\mathbb{F}_1$-esquemas.

En esta sección los monoides considerados serán siempre conmutativos y utilizaremos la notación multiplicativa, $A=(A,\cdot,1)$. Llamaremos **monoide con cero** a un monoide A tal que existe un elemento $0\in A$ tal que $0\cdot a=0$ para todo $a\in A$. Se llama morfismo de moniodes con cero a $f:A\to A'$ un morfismo de monoides tal que $f(0_A)=0_{A'}$.

Observación 3.1. *Dado un monoide A se puede definir, de forma equivalente, una categoría pequeña con un único objeto donde los morfismos se corresponden con los elementos de A, la composición viene dada por la operación que tenemos en A y los morfismos de monoides se corresponden con los functores entre cateogrías pequeñas con un solo objeto (véase Ejemplo 1.4.12 en [2]).*

3.1. Blueprints.

3.1.1. Primera noción de blueprint.

Empezaremos viendo una forma sencilla en la que se pueden introducir los blueprints como una generalización simultanea de los monoides (con cero) y los semianillos para después dar la definición con toda generalidad. Para ello seguiremos [13].

Definición 3.2. *Se llama **blueprint** a una pareja $B = (B^\bullet, B^+)$ donde B^+ es un semianillo y $B^\bullet$ un monoide con cero contenido en B^+ (como monoide multiplicativo) que genera (aditivamente) B^+.*

*Dados $B = (B^\bullet, B^+)$ y $C = (C^\bullet, C^+)$ dos blueprints, un **morfimo de blueprints** $f : B \to C$ es un morfimso de semianillos $f^+ : B^+ \to C^+$ tal que $f^+(B^\bullet) \subseteq C^\bullet$.*

Nótese que el morfismo f está determinado por la restricción del morfismo f^+ a los monoides, $f^\bullet : B^\bullet \to C^\bullet$ ya que dichos conjuntos generan B y C respectivamente, además $f^\bullet$ es trivialmente un morfismo de monoides con cero por ser f^+ morfismo de semanillos.

Ejemplo 3.3. Las parejas $(\{0, 1\}, \mathbb{N}_0)$, $(\{-1, 0, 1\}, \mathbb{Z})$ y $([0, 1], \mathbb{R}_{\geq 0})$ son blueprints.

Tomando esta definición de bluepirnts es claro que podemos definir sendos functores de olvido de la categoría de blueprints a la categoría de semainillos y de la categoría de blueprints a la categoría de monoides con cero:

$$(-)^+ : \mathbf{Blpr} \to \mathbf{SRing} \qquad\qquad (-)^\bullet : \mathbf{Blpr} \to \mathbf{Mon}_0$$

Dado S un semianillo podemos asociarle un blueprint $(S)^{blue} = (S, S)$ y a partir de un morfimo de semianillos obtenemos un morfismo entre los blueprints asociados.

Lema 3.4. *El functor $(-)^+$: $\boldsymbol{Blpr} \to \boldsymbol{SRing}$ es adjunto por la izquierda e inverso por la izquierda de $(-)^{blue}$: $\boldsymbol{SRing} \to \boldsymbol{Blpr}$.*

Demostración. Es claro que dado S un semianillo, $((S)^{blue})^+ = ((S, S))^+ = S \simeq \mathrm{Id}_{\mathbf{SRing}}(S)$, por tanto $(-)^+$ es inverso por la izquierda de $(-)^{blue}$.

Veamos ahora la otra afirmación. Sea $B = (B^\bullet, B^+)$ un blueprint y S un semianillo. Un mofismo de blueprints $f : B \to S^{blue}$ es un morfismo de semianillos $f^+ : B \to S$ y se cumple trivialmente $f^+(B^\bullet) \subseteq S$ y por tanto se tiene una biyección natural entre $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Blpr}}(B, S^{blue}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{SRing}}(B^+, S)$, que es la condición para que $(-)^+$ sea adjunto por la izquierda de $(-)^{blue}$. $\square$

De forma similar, dado A un monoide con cero se le puede asociar un bluerprint y obtener un functor $(-)^{blue}$: $\mathbf{Mon}_0 \to \mathbf{Blpr}$ para el que se puede demostrar (Lema 4.2.4 en [13]) que $(-)^\bullet$ es adjunto por la derecha e inverso por la izquierda de $(-)^{blue}$.

3.1.2. Blueprints axiomaticos.

Recogemos ahora una definición más general de blueprint, que es la dada originalmente por Lorscheid en [12] donde también se definen los esquemas de blueprints que en particular generalizan los esquemas de anillos y de semianillos. Nos limitaremos a comentar algunos resultados y propiedades a modo de presentación de esta teoría.

Sea A un monoide (multiplicativo), definimos el semianillo $\mathbb{N}_0[A]$ como el conjunto de sumas formales finitas $\sum a_i$ con $a_i \in A$, no necesariamente distintos y la suma vacía $\emptyset$, y donde la suma se define como $\sum_{i\in I} a_i + \sum_{j\in J} a_j = \sum_{i\in I\cup J} a_i$; la suma vacía, $\emptyset$, es el elemento neutro para la suma y el producto se define exteniendo por linealidad la multiplicación de A, o sea, $(\sum_{i\in I} a_i)\cdot(\sum_{j\in J} a_j) = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} a_i \cdot a_j$; y el elemento neutro para el producto es 1 considerado como suma formal.

Vamos a dotar a los monoides de una estructura adicional que podemos pensar como una "deconstrucción" de la suma expresando la esencia de esta operación a través de una relación de equivalencia:

Definición 3.5. *Una* ***presuma*** *en A es una relación de equivalencia, $\equiv$, en $\mathbb{N}_0[A]$ que es un subsemianillo de $\mathbb{N}_0[A]\times\mathbb{N}_0[A]$, es decir, es tal que si $\sum a_i \equiv \sum b_j$ y $\sum c_k \equiv \sum d_l$ entonces $\sum a_i + \sum c_k \equiv \sum b_j + \sum d_l$ y $(\sum a_i)\cdot(\sum c_k) \equiv (\sum b_j)\cdot(\sum d_l)$ para todo $a_i, b_j, c_k, d_l \in A$.*

Esto equivale a decir que una presuma en A es una congruencia en el semianillo $\mathbb{N}_0[A]$. Además si $\equiv$ es una presuma en A diremos que:

- es **cancelativa** si $\sum a_i + \sum c_k \equiv \sum b_j + \sum c_k$, entonces $\sum a_i \equiv \sum b_j$
- **tiene inversos** si para cada $a \in A$ existe un $b \in A$ tal que $a + b \equiv \emptyset$
- **tiene cero** si existe $a \in A$ tal que $a \equiv \emptyset$
- es **propia** si cuando $a \equiv b$ como sumas formales donde $a, b \in A$, entonces $a = b$ como elementos de A.

Definición 3.6. *Se llama* ***blueprint (axiomático)*** *a una pareja, $(A, \equiv)$, donde A es un monoide y $\equiv$ es una presuma en A.*

Se dice que un blueprint $(A, \equiv)$ es cancelativo, tiene inversas, tiene cero o es propio si lo es $\equiv$.

Dados $(A_1, \equiv_1)$ y $(A_2, \equiv_2)$ dos blueprints, un ***morfismo de blueprints (axiomaticos)****, $f : (A_1, \equiv_1) \to (A_2, \equiv_2)$, es un morfimso de monoides $f^\bullet : A_1 \to A_2$ tal que el morfismo inducido entre los semianillos $f^{++} : \mathbb{N}_0[A_1]\times\mathbb{N}_0[A_1] \longrightarrow \mathbb{N}_0[A_2]\times\mathbb{N}_0[A_2]$ cumple que $f^{++}(\equiv_1) \subseteq \equiv_2$ (pensando $\equiv_1, \equiv_2$ como subsemianillos).*

En este caso, Lorscheid no incluye en la definición de blueprint la condición de ser propio puesto que esta hipótesis en la presuma en ocasiones puede suponer una restricción de la estructura multiplicativa del monoide.

Ejemplo 3.7. Recordemos que $(\{0, 0.5, 1\}, \text{máx}, \text{mín})$ es un semianillo. Considerando el monoide $B = (\{0, 0.5, 1\}, \text{máx})$, podemos definir una presuma, $\equiv$, como la relación de equivalencia dada por el mínimo y en la que impongamos que $0.5 \equiv 1$ y claramente $0.5 \neq 1$.

Observemos que dado un blueprint $(A, \equiv)$, tenemos que $A \subset \mathbb{N}_0[A] \times \mathbb{N}_0[A]$ mandando $a \mapsto (a, a)$ y por ser $\equiv$ una relación de equivalencia en particular es reflexiva, por tanto tenemos que $A \subset \equiv$. Esto permite dar otra caracterización de los morfismo de blueprints $f : (A_1, \equiv_1) \to (A_2, \equiv_2)$ como un un morfismo de semianillos $f^{eq} \equiv_1 \to \equiv_2$ tal que $f^{eq}(A_1) \subseteq A_2$.

Observación 3.8. *Se puede demostrar que los blueprints antes definidos se corresponden con los blueprints axiomáticos propios con cero (véase Ejercicio 4.1.7 en [13]).*

Aunque nuestro recorrido particular por la teoría de los blueprints acabe aquí, en [12] se profundiza en el estudio de la categoría **Blpr** y las subcategorias de blueprints cancelativos, porpios, con inversos y con cero; así como el modo de embeber las categorías de monoides, monoides con cero y semianillos en **Blpr**. A modo de resumen se obtiene la siguiente figura:

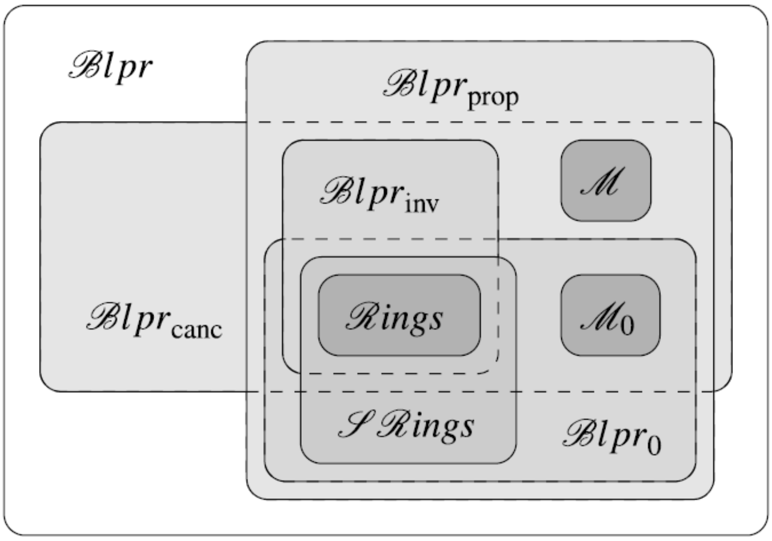

FIGURA 1. Subcategorías plenas de **Blpr** tomado de [12].

Además en la Sección 2 de [12] se definen las nociones de congruencia e ideal para blueprints, que en particular generalizan de las correspondientes definiciones para anillos y semianillos. Una vez hecho esto, en la sección 3, se definen los espacios blueprinted como X un espacio topológico dotado de un haz $\mathcal{O}_X$ de la categoría formada por los abiertos de X a la categoría **Blpr** y se desarrolla la teoría de esquemas de blueprints.

3.2. $\mathbb{F}_1$, el "cuerpo de un elemento".

La primera aparición de $\mathbb{F}_1$, el "cuerpo de un elemento", es en [16] donde Tits estudia ciertos grupos algebraicos sobre un cuerpo y define $\mathbb{F}_1$ como el formado por un elemento $1 = 0$ que, por descontado, no es un cuerpo.

La idea de Tits es que tiene sentido llamar espacio proyectivo n-dimensional sobre $\mathbb{F}_1$ a un conjunto de $n+1$ puntos. En este caso una proyectividad es una permutación cualquiera de los puntos y se tiene que el grupo simétrico S_{n+1} actúa como grupo de transformaciones.

No obstante, hay varias definiciones en la literatura de $\mathbb{F}_1$, puesto que todavía no está claro todavía cual es la definición adecuada. La existencia de este objeto está motivada por la existencia de resultados para cuerpos finitos $\mathbb{F}_p$, por ejemplo, en el contexto de la geometría aritmética, que "tienen sentido" en el caso $p = 1$, además que se cree que podría permitir demostrar la hipótesis de Riemann.

La geometría aritmética se estudian, entre otras cosas, la categoría, $\mathbf{Sch}_{\mathbb{Z}}$, de esquemas sobre $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Como se explica en [11], a grandes rasgos, lo que se busca para hacer geometría sobre $\mathbb{F}_1$ es dar una categoría, $\mathbf{Sch}_{\mathbb{F}_1}$, de esquemas sobre $\mathbb{F}_1$ con objeto final $\mathrm{Sch}_{\mathbb{F}_1}\mathbb{F}_1$ y un functor de cambio de base $-\otimes_{\mathbb{F}_1}\mathbb{Z} : \mathbf{Sch}_{\mathbb{F}_1} \to \mathbf{Sch}_{\mathbb{Z}}$ tal que mande el objeto final de $\mathbf{Sch}_{\mathbb{F}_1}$ al objeto final de $\mathbf{Sch}_{\mathbb{Z}}$, que es $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Así, por ejemplo Deitmar en [3] define la categoría de anillos sobre $\mathbb{F}_1$ como la categoría de monoides y $\mathbb{F}_1 = \{1\}$ (pensado como el objeto inicial en la categoría de monoides). Por otra parte, Lorscheid en [12] toma $\mathbb{F}_1 = \{0, 1\}$ pensado como el objeto inicial de los monoides con cero que a su vez es el objeto inicial de la categoría de blueprints con cero. Otro enfoque parecido, es el dado por los hermanos Giansiracusa en [5] donde la categoría de $\mathbb{F}_1$-módulos se identifica con los conjuntos punteados, esto es, conjuntos finitos donde se distingue un elemento y toman $\mathbb{F}_1 = \{0, 1\}$ pensado como monoide con cero.

Referencias

[1] Cohomology of sheaves, 2022. `https://stacks.math.columbia.edu/download/cohomology.pdf`.

[2] Awodey, S. *Category theory*, vol. 49 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2006.

[3] Deitmar, A. Schemes over $\mathbb{F}_1$. In *Number fields and function fields—two parallel worlds*, vol. 239 of *Progr. Math.* Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2005, pp. 87–100.

[4] Deitmar, A. Cogruence schemes. *International Journal of Mathematics 24*, 02 (2013), 1350009.

[5] Giansiracusa, J., and Giansiracusa, N. Equations of tropical varieties. *Duke Math. J. 165*, 18 (2016), 3379–3433.

[6] Golan, J. S. *Semirings and their applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999. Updated and expanded version of ıt The theory of semirings, with applications to mathematics and theoretical computer science [Longman Sci. Tech., Harlow, 1992; MR1163371 (93b:16085)].

[7] Jun, J. Čech cohomology of semiring schemes. *J. Algebra 483* (2017), 306–328.

[8] Jun, J. U. *Algebraic geometry over semi-structures and hyper-structures of characteristic one*. PhD thesis, Johns Hopkins University, 2015.

[9] Lescot, P. Absolute algebra II—ideals and spectra. *J. Pure Appl. Algebra 215*, 7 (2011), 1782–1790.

[10] Lescot, P. Absolute algebra III—the saturated spectrum. *J. Pure Appl. Algebra 216*, 5 (2012), 1004–1015.

[11] Lorscheid, O. Algebraic groups over the field with one element. *Math. Z. 271*, 1-2 (2012), 117–138.

[12] Lorscheid, O. The geometry of blueprints: Part I: Algebraic background and scheme theory. *Adv. Math. 229*, 3 (2012), 1804–1846.

[13] Lorscheid, O. Blueprints and tropical scheme theory, 2018. Lecture notes of a course at IMPA, `https://oliver.impa.br/notes/2018-Blueprints/versions/lecturenotes180405.pdf`.

[14] Mac Lane, S. *Categories for the working mathematician*, second ed., vol. 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[15] Patchkoria, A. On exactness of long sequences of homology semimodules. *J. Homotopy Relat. Struct. 1*, 1 (2006), 229–243.

[16] Tits, J. Sur les analogues algébriques des groupes semi-simples complexes. In *Colloque d'algèbre supérieure, tenu à Bruxelles du 19 au 22 décembre 1956*, Centre Belge de Recherches Mathématiques. Établissements Ceuterick, Louvain; Librairie Gauthier-Villars, Paris, 1957, pp. 261–289.

[17] Wang, H. X. Injective hulls of semimodules over additively-idempotent semirings. *Semigroup Forum 48*, 3 (1994), 377–379.