

Máster universitario en Física y Matemáticas

Trabajo de Fin de Máster



**VNiVERSiDAD
D SALAMANCA**

MÓDULO DE CURVAS ALGEBRAICAS

Autora: Natalia Mayo García
Tutor: Daniel Hernández Ruipérez

Julio 2023

Máster Universitario en Física y Matemáticas
Trabajo Fin de Máster



VNiVERSiDAD
DSALAMANCA

MÓDULI DE CURVAS ALGEBRAICAS

Julio 2023

Autora

Natalia Mayo García

Tutor

Daniel Hernández Ruipérez

No propuse otra batalla
que librar el corazón
de ponerse cuerpo a tierra
bajo el paso de una historia
que iba a alzar hasta la gloria
el poder de la razón

Luis Eduardo Aute - *La belleza*

Índice general

Introducción	5
1. Problemas de móduli	9
1.1. Functor de puntos y funtores representables	9
1.2. Funtores de móduli	12
1.2.1. Espacio de móduli fino y familia universal	15
1.2.2. Espacio de móduli grosero y familia tautológica	16
2. Curvas y esquemas	19
2.1. Pero... ¿qué es una curva?	19
2.1.1. Inmersión de una curva en un espacio proyectivo	20
2.1.2. Polinomio de Hilbert de un esquema proyectivo	24
2.1.3. Familias planas	25
2.1.4. Dualizante de una familia plana	26
2.2. Funtores representables en la categoría de esquemas	29
2.2.1. Ejemplo: funtores y esquemas de Hilbert	30
2.3. Esquemas en grupos	32
2.3.1. Cocientes por la acción de un grupo algebraico afín	35
2.3.2. Espacio de móduli grosero como espacio de órbitas	37
3. Móduli de curvas algebraicas	39
3.1. Problema y functor de móduli	39
3.2. No existencia de espacio de móduli fino	40
3.3. Construcción de espacios de móduli	41
3.3.1. Curvas de género $g = 0$	42
3.3.2. Curvas con n puntos marcados: rigidificación de \mathcal{M}_0	43
3.3.3. Curvas de género $g = 1$	48
3.3.4. Curvas de género $g \geq 2$	53
4. Móduli de curvas estables	55
4.1. Curvas estables y grafo dual a una curva	56
4.2. Móduli de curvas estables	60
4.2.1. Algunos resultados previos	60
4.2.2. Construcción de los espacios de móduli $\overline{\mathcal{M}}_g$ y $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$	62
4.2.3. Breve introducción a la noción de stack	67

5. Móduli de curvas tropicales	74
5.1. Curvas tropicales y su móduli	75
5.1.1. Móduli de curvas tropicales estables	78
5.2. Relación entre las curvas algebraicas y tropicales y comparación de sus espacios de móduli	84
5.2.1. Equivalencia tropical y modelo estable de una curva nodal	84
5.2.2. Nodos de una curva algebraica estable y longitud de las aristas de la curva tropical asociada	85
5.2.3. Dualidad en la estratificación de $\overline{M}_{g,n}$ y $\overline{M}_{g,n}^{\text{trop}}$	86
Conclusiones	89
Bibliografía	91

Introducción

Los problemas de clasificación son inherentes a la experiencia humana, lo que los hace estar presentes en las distintas disciplinas del saber, siendo especialmente relevantes en matemáticas por lo natural de su planteamiento. Los conjuntos de clases de equivalencia son de hecho unos de los primeros objetos a los que los matemáticos nos enfrentamos cuando comenzamos nuestro riguroso camino en esta disciplina, siendo el paso en esta ocasión devolverles la estructura geométrica de la que se desprendieron con la introducción de los espacios de móduli. Con esto, la idea que se pretende transmitir es que al clasificar objetos geométricos, como puedan ser las curvas algebraicas lisas, se obtiene un conjunto de clases de equivalencia y lo que se busca es dotar a este conjunto de una estructura geométrica que refleje las propiedades de los objetos que codifica.

El presente trabajo se plantea como una revisión bibliográfica sobre algunos resultados sobre los espacios móduli de curvas algebraicas lisas, partiendo del enfoque dado por la Teoría Geométrica de Invariantes de Mumford et. al. en [23]; siguiendo el camino en búsqueda de espacios de móduli que sí sean compactos (i.e. propios en el contexto de la geometría algebraica) a diferencia de los anteriores, parametrizando no solo curvas lisas sino curvas con cierto tipo de singularidades conocidas como curvas estables; y acabando en un estudio de una naturaleza más combinatoria, que entronca con el trabajo en áreas de más reciente aparición en la geometría algebraica como es la geometría tropical.

Los objetivos fundamentales del documento son la construcción y el estudio de los espacios de móduli de curvas algebraicas desde el mencionado punto de vista de la teoría geométrica de invariantes, profundizando en técnicas generales de geometría algebraica plasmando los aspectos geométricos de un problema clásico. Además se recoge la evolución de estos los resultados desde los años 60 del siglo pasado hasta algunos desarrollos y enfoques más recientes.

Para tratar estos tres tipos de problemas de móduli comenzamos presentando en el **Capítulo 1** el **lenguaje categorial** con el que, de manera general, se pueden plantear estos problemas de modelado tornándolos en un cuestión sobre la representabilidad de un functor construido a partir de la relación de equivalencia dada. De esta manera además se pueden estudiar familias parametrizadas de objetos y cuándo dichas familias son equivalentes. Si el **functor de móduli** construido es representable, se dice que el representante es un espacio de móduli fino y este codifica además la información sobre las familias parametrizadas; sin embargo, como este no es siempre el caso, habrá otra noción más débil aunque también de utilidad que es la de espacio de móduli grosero, cuyos puntos cerrados estarán en correspondencia biyectiva con las clases de equivalencia de nuestro

interés, pero con la que no se tiene un control total sobre las equivalencias entre familias parametrizadas.

El porqué necesitamos debilitar esta noción en nuestro caso es consecuencia de que como algunas de las curvas a parametrizar tienen automorfismos no triviales, esto impide que el functor de móduli sea representable, como se prueba en la sección 3.2.

A continuación, en el **Capítulo 2**, se presentan los **resultados generales necesarios de geometría algebraica** que utilizaremos en la construcción de los espacios de móduli de curvas lisas y curvas estables como las condiciones en que se puede establecer una inmersión cerrada de una curva en un espacio proyectivo, las propiedades fundamentales de las familias planas y la obtención de haces dualizantes para estas. Seguidamente trataremos la representabilidad de funtores en la categoría de esquemas dejando sentadas las bases para posteriormente en el Capítulo 4 introducir el lenguaje de stacks, que en ciertos aspectos es el idóneo para tratar problemas de móduli. No solo eso, sino que presentaremos los **esquemas de Hilbert**, que son a su vez unos ciertos espacios de móduli obtenidos por Grothendieck siendo de especial interés en este contexto, puesto que algunos de los problemas de móduli que estudiamos tendrán por espacio de móduli cocientes de un subesquema de algún esquema de Hilbert.

Este será el caso cuando obtengamos los espacios de móduli de curvas de género mayor que 2. La estrategia que se sigue es parametrizarlas como subesquemas cerrados de un espacio proyectivo determinado, lo que hace que tengamos que tener en consideración los automorfismos de dicho espacio proyectivo. Esto nos lleva a que, también en el Capítulo 2, se estudien los **esquemas en grupos y las acciones de estos en otros esquemas** así como los problemas que pueden hacer que el cociente de un esquema por la acción de un esquema en grupos no tenga estructura de esquema. Los resultados recogidos hacen las veces una introducción velada a la Teoría Geométrica de Invariantes en la que no profundizamos en este documento por cuestiones de extensión, pese a estar detrás de varios resultados que exponemos. El resultado fundamental respecto de los esquema en grupos es el dado en la subsección 2.3.2 sobre la **caracterización de los espacios de móduli groseros como espacios de órbitas** cuando la acción de un grupo algebraico cumple ciertas hipótesis. Es más, los resultados de dicho apartado nos permiten dar otra interpretación el modo en que Mumford construye espacios de móduli groseros para los problemas de móduli de curvas lisas de género mayor o igual a 2 en la subsección 3.3.4.

Seguidamente, en el **Capítulo 3**, tras explicar por qué en general no podemos obtener espacios de móduli finos para los **problemas de móduli de curvas lisas** debido a la presencia de automorfismos, comenzamos a construir diversos espacios de móduli. Se realiza un tratamiento aislado de los casos de curvas lisas de géneros 0 y 1 dando la construcción explícita a partir de resultados clásicos sobre geometría proyectiva y curvas elípticas respectivamente. En este momento utilizamos otra de las técnicas habituales al construir un espacio de móduli que es rigidificar el problema fijando algunas condiciones geométricas extra. Concretamente, la **rifidificación** que aplicaremos será una de las más habituales en la literatura que consiste en **marcar un cierto número de puntos** en un orden determinado en las curvas lo cual reducirá el número de automorfismos de estas permitiendo bien obtener espacios de móduli fino (como en el caso de las curvas de género 0 con 3 puntos marcados) o bien obtener espacios de móduli groseros en los

que las curvas tienen un número finito de automorfismos no triviales, cosa que resulta harto más conveniente que cuando tienen un número infinito de ellos (como veremos en el caso de curvas de género 1 según se marque o no uno de sus puntos). Explícitamente, expondremos el caso de curvas racionales con puntos marcados en la subsección 3.3.2 si bien este mismo recurso técnico estará presente en los capítulos restantes del documento aplicado a situaciones más generales. Acabaremos el capítulo indicando cómo se procede en [23] para obtener subesquemas del esquema de Hilbert que son espacios de móduli groseros para los problemas que restan, o sea, los de curvas lisas de género mayor o igual que 2 (sin puntos marcados).

Con ello, en el **Capítulo 3** se abarca la **construcción de los espacios de móduli de curvas lisas** (sin puntos marcados).

Como consecuencia del hecho de que los espacios de móduli obtenidos en el Capítulo 3 no son en general esquemas propios, haciendo uso de la teoría geométrica de invariantes y la teoría de la deformación se puede concluir que basta con parametrizar además de las curvas lisas un cierto tipo de curvas singulares, llamadas curvas estables, y obtener así espacios de móduli propios que en cierto sentido son una “compactificación” de los de curvas lisas. En el **Capítulo 4**, aunque no incluimos los resultados que llevaron a concluir que las curvas estables son las que cumplen el propósito de compactificar los espacios de móduli de curvas lisas, sí estudiamos algunas de las **propiedades relevantes de las curvas estables** marcadas y no marcadas como es la finitud de sus automorfismos o el hecho de que su haz dualizante es amplio. Se prueba además el resultado principal del que **se sigue la construcción de los espacios de móduli de curvas estables** (Teorema 4.16).

A nivel histórico fue en este punto en el que Deligne y Mumford en [11] comenzaron a utilizar stacks para tratar los problemas de móduli de curvas y, en consecuencia, incluimos brevemente su definición en la subsección 4.2.3 justificando el modo en que los automorfismos, que previamente nos impedían obtener espacios de móduli finos, quedan descritos adecuadamente por la **estructura de stack**. Esto nos sirve además para comentar someramente algunos de los resultados de Knudsen en [18] acerca de los espacios de móduli de curvas estables con puntos marcados y las relaciones entre ellos definidas por morfismos de stacks.

Completa el documento el estudio de algunas **propiedades combinatorias** destacables de los espacios de móduli de curvas estables utilizando algunos resultados recientes acercando al lector a una de las líneas por las que sigue la investigación sobre el espacio de móduli de curvas en la actualidad. Así, en el **Capítulo 5**, haciendo uso de la perspectiva dada por la geometría tropical, se construyen **espacios de móduli de curvas tropicales** (estables con o sin puntos marcados), siguiendo los resultados de Caporaso en [5], relacionando las curvas tropicales de modo inmediato con el grafo dual a una curva nodal (estable con o sin puntos marcados). El grafo dual es un objeto combinatorio bien conocido en la geometría algebraica en el que cada componente irreducible define un vértice y cada nodo una arista adyacente a las componentes irreducibles a las que pertenece, por su parte la definición que tomaremos de curva tropical será como mero grafo métrico y los espacios de móduli de estas que construiremos son conos poliédricos en los que cada punto se corresponde biyectivamente con uno de estos grafos métricos.

Además, estudiaremos algunas de las relaciones que se pueden establecer entre las curvas algebraicas y las tropicales. De hecho, aunque la construcción no hará uso del lenguaje categorial y será una descripción más propia de la geometría poliédrica, veremos que permite plantear una **dualidad entre los espacios de móduli de curvas tropicales estables** (i.e. entre conos poliédricos) **y los espacios de móduli de curvas estables** exhibiendo el comportamiento combinatorio de la frontera de estos últimos.

Sintetizando lo dicho, el presente documento se puede entender como un periplo por uno de los muchos que caminos que se pueden tomar al estudiar la clasificación de las curvas algebraicas utilizando espacios de móduli, quedando patente parte de la evolución que ha experimentado la concepción de los espacios de móduli de curvas. Esta revisión histórica y del estado del arte que concierne al móduli de curvas ha pretendido ser lo más completa en cuanto a perspectivas y autocontenida en cuanto a resultados si bien ha sido necesario limitar ambas ambiciones dada la extensión del documento y el tiempo de que se ha dispuesto en su elaboración.

Capítulo 1

Problemas de móduli

El punto de partida a la hora de clasificar elementos de un conjunto \mathcal{M} de objetos matemáticos es establecer una relación de equivalencia, $\sim_{\mathcal{M}}$, en \mathcal{M} y considerar el conjunto de clases de equivalencia $\mathcal{M}/\sim_{\mathcal{M}}$. Puesto que los elementos del conjunto \mathcal{M} serán objetos pertenecientes a una determinada categoría \mathcal{D} , cabe plantearse si esta clasificación conjuntística, dada por $\mathcal{M}/\sim_{\mathcal{M}}$, se puede estudiar en la categoría \mathcal{D} o en otra categoría \mathcal{C} que haga las veces de “parámetro”. En esto consistirán los problemas de móduli, en tratar de “modelar” el conjunto de clases de equivalencia de una clase de objetos a través de objetos y morfismos de \mathcal{C} .

Idealmente, lo que se busca es establecer una correspondencia natural entre $\mathcal{M}/\sim_{\mathcal{M}} \in \mathbf{Sets}$ y algún objeto $M \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, de manera que las propiedades de las familias de objetos equivalentes se vean reflejadas en objetos y morfismos en la categoría \mathcal{C} . Este será el caso cuando un problema de móduli tenga un espacio de móduli fino. Sin embargo, hay problemas de móduli para lo que no se tiene ningún espacio de móduli fino, pero a los que tal vez sí podemos dar una respuesta más débil encontrando un espacio de móduli grosero. Cuando solo seamos capaces de encontrar un espacio de móduli grosero para nuestro problema de móduli, seguiremos teniendo una correspondencia entre $\mathcal{M}/\sim_{\mathcal{M}} \in \mathbf{Sets}$ y algún objeto $M \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, pero no podremos especificar adecuadamente las propiedades de las familias de objetos equivalentes en términos de la categoría \mathcal{C} .

Puede ocurrir también que no seamos capaces siquiera de encontrar espacios de móduli groseros para un determinado problema. Más adelante, veremos que otra forma de abordar ciertos problema de móduli será modificando sensiblemente el problema a tratar, añadiendo información que haga más “rígida” la clasificación, de modo que exista algún espacio de móduli (fino) para el nuevo problema.

1.1. Functor de puntos y funtores representables

Introduciremos algunas definiciones y resultados básicos de la teoría de categorías que nos permitirán describir los problemas de móduli de un modo general. Expresaremos un problema de móduli en términos de un prehaz de conjuntos, o sea, como un functor $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$, siendo el Lema de Yoneda uno de los resultados claves para fundamentar la teoría de móduli.

Por simplicidad, supondremos, salvo que se indique lo contrario, que las categorías¹ consideradas son **localmente pequeñas**, o sea, categorías \mathcal{C} verificando que los morfismos $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ sean un conjunto para cualesquiera $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ objetos de \mathcal{C} .

Recordemos que dados dos funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre dos categorías cualesquiera, se dice que $\eta : F \rightarrow G$ es una **transformación natural de funtores** si para cada objeto X de \mathcal{C} se tiene que $\eta(X) : F(X) \rightarrow G(X)$ es un morfismo en \mathcal{D} y si para cualquier morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ en \mathcal{C} , el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\eta(X)} & G(X) \\ \downarrow f_F & & \downarrow f_G \\ F(Y) & \xrightarrow{\eta(Y)} & G(Y) \end{array}$$

es conmutativo.

Dada \mathcal{C} una categoría, denotaremos por $\text{Func}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})$ a la categoría cuyos objetos son los funtores (covariantes) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ y los morfismos son las transformaciones naturales de funtores, que denotaremos $\text{Nat}(F, G)$ donde $F, G \in \text{Obj}(\text{Func}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets}))$.

De modo similar, se define la categoría $\text{Func}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Sets})$, cuyos objetos se llamarán **prehaces de conjuntos** en \mathcal{C} .

Observación 1.1. *Nótese que en general $\text{Func}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})$ no es localmente pequeña. Sin embargo, si \mathcal{C} es una categoría pequeña (esto es, una categoría localmente pequeña en la que además $\text{Obj}(\mathcal{C})$ es un conjunto), entonces se verifica que $\text{Func}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})$ es una categoría localmente pequeña.*

Para hablar de representabilidad de funtores hemos de presentar el functor de puntos asociado a un objeto de \mathcal{C} . Esta denominación no es casual, y es que, en geometría, tiene sentido pensar que un punto p se identifica con los morfismos que consisten en tomar valor en p . De ahí que dado $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, nos podemos referir al functor $X_{\bullet} = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \in \text{Func}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})$ como el espacio asociado a X , siendo $X_{\bullet}(Y)$ los puntos de X con valores en Y . Otro “espacio” $F \in \text{Func}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})$ se dice que es representable cuando sea isomorfo (como functor) a X_{\bullet} para algún $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.

Trataremos la representabilidad de funtores contravariantes, puesto que los funtores asociados a un problema de módulos serán de este tipo. De hecho, la analogía entre espacios y funtores; y puntos y morfismos es la que justifica que después nos refiramos al representante de un functor de módulos como un espacio de módulos (fino).

Definición 1.2. *Dado $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, llamaremos **functor de puntos** asociado a X al functor*

$$\begin{aligned} X^{\bullet} : \mathcal{C}^{op} &\longrightarrow \mathbf{Sets} \\ T &\longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X), \end{aligned}$$

o sea, $X^{\bullet} = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \in \text{Func}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Sets})$.

¹Tomamos la definición de categoría dada en [21] donde las colecciones de objetos y morfismos de una categoría no se presupone que sean conjuntos, sino que se supone fijado un universo de conjuntos. El motivo de este tipo de consideraciones es que, por ejemplo, la colección de todos los conjuntos no puede ser un conjunto (con los axiomas ZFC).

Definición 1.3. Se llama **punto general** de $X^\bullet := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \in \text{Func}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Sets})$ a un $\tilde{x} \in X^\bullet(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ para algún $Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ tal que para cualquier $f \in X^\bullet(T) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$ con $T \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ existe un único $g : T \rightarrow Y$ tal que $\tilde{x} \circ g = f$.

Si tomamos el functor X^\bullet y $\tilde{x} : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo, entonces \tilde{x} es un punto general ya que $\tilde{x}^* : Y^\bullet \rightarrow X^\bullet$ es un isomorfismo de funtores. Por simplicidad, tomaremos siempre $\tilde{x} = \text{Id}_X$ como punto general.

Lema 1.4 (Lema de Yoneda). Sea \mathcal{C} una categoría localmente pequeña, para todo $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ y cualquier $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$ existe un isomorfismo natural

$$\begin{aligned} \text{Nat}(X^\bullet, F) &\simeq F(X) \\ \eta &\mapsto \eta(X)(\tilde{x}) := u \end{aligned}$$

siendo $\tilde{x} = \text{Id}_X \in X^\bullet(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ el punto general identidad.

Demostración. El resultado se deduce de que si $\eta : X^\bullet \rightarrow F$ es una transformación natural de funtores, le hacemos corresponder $\eta(X)(\text{Id}_X) \in F(X)$ ya que para cualquier $T \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ y cualquier morfismo $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) = X^\bullet(T)$ el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) & \xrightarrow{\eta(X)} & F(X) & & \tilde{x} = \text{Id}_X & \longmapsto & \eta_X(\tilde{x}) = u \\ \downarrow g_X^* & & \downarrow g_F^* & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) & \xrightarrow{\eta(T)} & F(T) & & \text{Id}_X \circ g = g & \longmapsto & \eta_T(g) = g_F^*(u) \end{array}$$

Ahora, si $p \in F(X)$, definimos $\eta_p : X^\bullet \rightarrow F$ como $(\eta_p(T))(\phi) = \phi_F^*(p) \in F(Y)$ donde $T \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ y $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$. Es claro que las asignaciones son inversas entre sí. \square

El Lema de Yoneda nos permite considerar \mathcal{C} como una subcategoría plena de la categoría $\text{Func}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Sets})$ ya que el functor

$$\begin{aligned} (-)^\bullet &: \mathcal{C} \longrightarrow \text{Func}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Sets}) \\ X &\longmapsto X^\bullet \end{aligned}$$

es fielmente pleno (i.e., para cualesquiera $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ se tiene que la asignación inducida $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Nat}(X^\bullet, Y^\bullet)$ es una biyección).

Definición 1.5. Diremos que $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$ es un **functor representable** si existe un $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ y un isomorfismo natural de funtores $\xi : F \rightarrow X^\bullet$, en cuyo caso diremos que F es representable por (X, ξ) .

Si F es representable por (X, ξ) , por el Lema de Yoneda sabemos que el representante es único salvo un único isomorfismo, es decir, si (Y, ξ') es otro representante de F , entonces existe un único isomorfismo $\alpha : X \rightarrow Y$ tal que $\xi' = \alpha^* \circ \xi$ donde $\alpha^* : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ es la transformación natural de funtores inducida por α , que es un isomorfismo de funtores.

Observación 1.6. Si F es representable por (X, ξ) , dar (X, ξ) es equivalente a dar $(X, U) := (X, \xi(\text{Id}_X))$, por el Lema de Yoneda. Llamaremos a $U := \xi(\text{Id}_X)$ **elemento universal** para el functor F .

Ejemplo 1.7 (Ejemplo 8.3 en [13]). **Producto fibrado de prehaces:** La categoría **Sets** tiene productos fibrados, luego la categoría $\text{Func}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Sets})$ tiene productos fibrados. Dados $F, G, H \in \text{Func}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Sets})$ y $\eta_1 : F \rightarrow H$, $\eta_2 : G \rightarrow H$ transformaciones naturales de funtores, su producto fibrado será $(F \times_H G, p, q)$ con

$$(F \times_H G)(X) := F(X) \times_{H(X)} G(X) \in \mathbf{Sets};$$

siendo p y q las transformaciones naturales de funtores dadas por $p(X) : (F \times_H G)(X) \rightarrow F(X)$ y $q(X) : (F \times_H G)(X) \rightarrow G(X)$ respectivamente con $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.

Se verifica además que si F, G, H son funtores representables, es decir, si $F \simeq X^\bullet$, $G \simeq Y^\bullet$ y $H \simeq S^\bullet$, entonces el producto fibrado $F \times_H G$ es representable si y solo si $Z = X \times_S Y$ existe en \mathcal{C} y además $F \times_H G \simeq Z^\bullet$.

No todos los funtores son representables, por ello vamos a introducir una noción más débil que utilizaremos más adelante:

Definición 1.8. Dado $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$ diremos que una pareja (X, ξ) es **inicial** para F si $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ y $\xi \in \text{Nat}(F, X^\bullet)$ son tales que para cada $Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ y cada $\psi \in \text{Nat}(F, Y^\bullet)$, existe un único $\Omega \in \text{Nat}(X^\bullet, Y^\bullet)$ tal que $\psi = \Omega \circ \xi$.

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\xi} & X^\bullet & \xrightarrow{\Omega} & Y^\bullet \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & \psi & \end{array}$$

Observación 1.9. Por el Lema de Yoneda $\Omega \in \text{Nat}(X^\bullet, Y^\bullet)$ se corresponde con $\omega := \Omega(X)(\text{Id}_X) \in Y^\bullet(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$

Igual que antes, si un functor F tiene una pareja inicial, esta es única salvo isomorfismos. Es claro que si una pareja (M, ξ) representa a un functor F , en particular (M, ξ) es inicial para F .

Observación 1.10. Se pueden dar definiciones y el resultado análogo para funtores covariantes $G \in \text{Func}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})$ definiendo para $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ el functor

$$X_\bullet = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -).$$

Además, diremos que el functor G es representable por una pareja (X, ξ) cuando exista un isomorfismo de funtores $\xi : G \rightarrow X_\bullet$.

1.2. Funtores de módulos

Para plantear un problema de clasificación hemos de dar un conjunto \mathcal{M} de objetos de \mathcal{D} y $\sim_{\mathcal{M}}$ una relación de equivalencia en \mathcal{M} , siendo nuestro objetivo describir el conjunto $\mathcal{M}/\sim_{\mathcal{M}}$ de clases de equivalencia. Cabe la posibilidad de encontrar ciertos invariantes discretos, (como puedan ser el cardinal de un conjunto finito o la dimensión de un espacio vectorial finito) que nos permitan establecer una partición en $\mathcal{M}/\sim_{\mathcal{M}}$. Sin embargo, en la teoría de módulos lo que se busca es establecer una correspondencia natural entre $\mathcal{M}/\sim_{\mathcal{M}}$ y un objeto M de una categoría parámetro \mathcal{C} de manera que, además, podamos estudiar las familias de objetos equivalentes a partir de M . Para ello construiremos, a partir de

$(\mathcal{M}, \sim_{\mathcal{M}})$ un functor que describa las familias de objetos de \mathcal{M} que son equivalentes y con este se definirá el functor de módulos que codifique las clases de equivalencia.

Seguiremos como referencia principal en esta sección [28].

Presentaremos ahora las **hipótesis sobre la categoría parámetro** \mathcal{C} con cuyos objetos queremos parametrizar las familias de elementos de \mathcal{M} que sean $\sim_{\mathcal{M}}$ -equivalentes así como clases de $\sim_{\mathcal{M}}$ -equivalencia de \mathcal{M} . Si la categoría \mathcal{C} es la misma categoría a la que pertenecen los elementos de \mathcal{M} diremos que el problema de módulos está bien formulado.

Supondremos que la categoría \mathcal{C} es localmente pequeña y está dotada de un functor fiel $|\cdot| : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ “tomar el conjunto subyacente”, o sea, el functor $|\cdot|$ es tal que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(|X|, |Y|) \\ f &\longmapsto |f| \end{aligned}$$

es inyectivo para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Supondremos además que existe un $P \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, al que llamaremos **punto base**, tal que $|P| = \{*\}$ es un conjunto formado por un único punto, la aplicación inducida entre los conjuntos de morfismos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(\{*\}, |X|) \equiv |X|$$

es biyectiva y además si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, entonces el morfismo inducido entre los espacios subyacentes $|f| \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(|X|, |Y|)$, viene dado por $f_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, X) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, Y)$

Estas condiciones en la categoría nos aseguran que un morfismo en \mathcal{C} está determinado modo único por el morfismo entre los conjuntos subyacentes y se deduce también de lo expuesto que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, P) = \{\mathrm{Id}_P\}$.

Observación 1.11. *Las hipótesis sobre el punto base P equivalen a decir que $|P| = \{*\}$ y que el functor $|\cdot|$ es representable por (P, μ) siendo μ un cierto isomorfismo de funtores. Por este motivo en ocasiones escribiremos*

$$P_{\bullet} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -) \simeq |\cdot|$$

Definición 1.12. *Llamaremos **functor de familias de objetos** a un functor*

$$fam : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$$

que a cada objeto le asigna un conjunto y una relación de equivalencia en este (cosa que tiene sentido puesto que una relación de equivalencia en un conjunto A se puede expresar como un subconjunto de $A \times A$) del siguiente modo:

- $fam(P) = (\mathcal{M}, \sim_{\mathcal{M}})$ que denotaremos sencillamente como $fam(P) = \mathcal{M}$
- para cada $T \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ la relación de equivalencia \sim_T en $fam(T)$ es tal que cuando $T = P$ coincide con $\sim_{\mathcal{M}}$ y además para cada morfismo $f : T_1 \rightarrow T_2$ la aplicación

$$f^* := f^{fam} : fam(T_2) \longrightarrow fam(T_1)$$

*con $G \mapsto f^*G$ manda elementos \sim_{T_2} -equivalentes a objetos \sim_{T_1} -equivalentes.*

Definición 1.13. Con las notaciones de la definición previa:

- llamaremos a los elementos de $fam(T)$ con $T \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ **familias de objetos de \mathcal{M} parametrizadas por T** .
- si $G \in fam(T_2)$ es una familia parametrizada por T_2 , la familia $f^*G \in fam(T_1)$ se llama **pull-back de la familia G a T_1 por f** .

Observemos que, en particular, las familias de objetos de \mathcal{M} parametrizadas por P son los propios elementos de \mathcal{M} .

Por las hipótesis en la categoría \mathcal{C} para cada $T \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ tenemos una identificación canónica $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, T) \cong |T|$, o sea, cada elemento $t \in |T|$ se corresponde con un morfismo $\phi_t : P \rightarrow T$ en \mathcal{C} . Dada $G \in fam(T)$ una familia de objetos de \mathcal{M} parametrizada por T , podemos hacer el pull-back de G vía ϕ_t obteniendo una familia parametrizada por P

$$\begin{aligned} fam(T) &\xrightarrow{\phi_t^*} fam(P) = \mathcal{M} \\ G &\longmapsto \phi_t^*G \end{aligned}$$

Se denomina a ϕ_t^*G **fibra de la familia G en t** que es un elemento del conjunto \mathcal{M} .

Definición 1.14. Llamaremos **functor de clases de equivalencia de familias de objetos de \mathcal{M} parametrizadas por \mathcal{C}** al functor

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} &\longrightarrow \text{Sets} \\ T &\longmapsto fam(T)/\sim_T \end{aligned}$$

También llamaremos a \mathcal{F} **functor de módulos** para el problema de módulos definido por $(\mathcal{M}, \sim_{\mathcal{M}})$.

Denotaremos a las clases de \sim_T -equivalencia de un $G \in fam(T)$ como $[G]_T$ y en el caso de $\sim_P = \sim_{\mathcal{M}}$ utilizaremos la notación $[G]_{\mathcal{M}}$ donde $G \in fam(P) = \mathcal{M}$.

Observación 1.15. Dado un problema de módulos $(\mathcal{M}, \sim_{\mathcal{M}})$, se construye \mathcal{F} el functor de módulos a partir de fam , de ahora en adelante, cuando demos un functor de módulos supondremos también que hemos fijado fam ya que nos interesa estudiar las familias de objetos y las equivalencias en estas. Esto es así ya que, aunque finalmente no se quiere distinguir entre objetos equivalentes, sí queremos saber hasta qué punto la estructura de $\mathcal{M}/\sim_{\mathcal{M}}$ como objeto de \mathcal{C} refleja las propiedades de las familias de objetos.

Dado \mathcal{F} un functor de módulos, distinguiremos dos casos que estudiaremos detalladamente a continuación:

- Si \mathcal{F} es representable por (M, ξ) , o sea, si $\xi : \mathcal{F} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, M)$ es un isomorfismo de funtores, se dice que (M, ξ) es un **espacio de módulos fino** para \mathcal{F} .
- Si \mathcal{F} tiene una pareja (M, ξ) inicial tal que

$$\xi(P) : \mathcal{F}(P) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, M) \equiv |M|$$

es una biyección, se dice que (M, ξ) es un **espacio de módulos grosero** para \mathcal{F} .

En ambos casos la pareja (M, ξ) está determinada salvo isomorfismos y además $\xi(P)$ establece una biyección entre los conjuntos $\mathcal{M}/\sim_{\mathcal{M}}$ y $|M|$.

1.2.1. Espacio de módulos fino y familia universal

Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$ un functor de módulos para el problema de módulos dado por $(\mathcal{M}, \sim_{\mathcal{M}})$ tal que (M, ξ) es un espacio de módulos fino para \mathcal{F} .

Veremos ahora que, dada una familia parametrizada por algún objeto de \mathcal{C} , tomar las clases de equivalencia de las fibras de en una familia parametrizada coincide con el morfismo entre los espacios subyacente de un morfismo en \mathcal{C} .

Para cada $T \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ tenemos una biyección

$$\xi(T) : \mathcal{F}(T) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M),$$

es decir, cada $[G]_T \in \mathcal{F}(T)$ se corresponde con un morfismo $\tilde{\nu}_G \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M)$. Dada una familia $G \in \text{fam}(T)$ parametrizada por T , su clase de \sim_T -equivalencia nos determina un morfismo $\tilde{\nu}_G : T \rightarrow M$. Tomando conjuntos subyacentes, o sea, aplicando el functor $|\cdot| = P_{\bullet}$ tenemos:

$$\begin{array}{ccc} |\tilde{\nu}_G| : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, T) \equiv |T| & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, M) \equiv |M| \\ \phi_t \equiv t & \longmapsto & \tilde{\nu}_G \circ \phi_t \end{array}$$

Por otra parte tenemos que dada una familia $G \in \text{fam}(T)$ parametrizada por T , se define la aplicación $\nu_G : |T| \rightarrow \mathcal{M}/\sim_{\mathcal{M}}$ con $t \mapsto [\phi_t^* G]_{\mathcal{M}}$ donde $[\phi_t^* G]_{\mathcal{M}}$ es la clase de $\sim_{\mathcal{M}}$ -equivalencia de la fibra de la familia G parametrizada por T en el punto t . Llamaremos a ν_G la **aplicación asociada a la familia G** que podemos darla de forma equivalente como:

$$\begin{array}{ccc} \nu_G : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, T) \equiv |T| & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, M) \equiv \mathcal{M}/\sim_{\mathcal{M}} \\ \phi_t \equiv t & \longmapsto & \xi(P)([\phi_t^* G]_{\mathcal{M}}) \equiv [\phi_t^* G]_{\mathcal{M}} \end{array}$$

La definición de ν_G tiene sentido puesto que, fijado G , como $t \in |T| \equiv P_{\bullet}(T)$ se corresponde con un morfismo $\phi_t : P \rightarrow T$, se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(T) \xrightarrow{\xi(T)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M) & & [G]_T \longmapsto \tilde{\nu}_G \\ \downarrow \phi_t^* & & \downarrow \\ \mathcal{F}(P) \xrightarrow{\xi(P)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, M) & & [\phi_t^* G]_{\mathcal{M}} \longmapsto \tilde{\nu}_G \circ \phi_t. \end{array}$$

Nótese que como ξ es un isomorfismo de funtores, identificamos $|\tilde{\nu}_G| = \nu_G$; por ser el functor $|\cdot|$ fiel, dado ν_G se corresponde con un único morfismo de T en M en \mathcal{C} que como hemos visto es $\tilde{\nu}_G$.

Observación 1.16. *Dadas dos familias $G, G' \in \text{fam}(T)$ parametrizadas por T tales que en cada $t \in |T|$ sus fibras son $\sim_{\mathcal{M}}$ -equivalentes, entonces $[G]_T = [G']_T$. Es fácil verlo utilizando que, por ser ξ un isomorfismo de funtores, hay una correspondencia biyectiva entre clases de \sim_T equivalencia y morfismos de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M)$. De hecho, esta condición es equivalente a la inyectividad de ξ .*

Recordemos que si un functor es representable por una pareja (M, ξ) , por el Lema de Yoneda equivale a dar (M, U) siendo U el elemento universal. En este caso

$$\xi(M) : \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M)$$

y el elemento universal es $U = \xi(M)^{-1}(\text{Id}_M)$. En la teoría de módulos, se llama a U (clase de la) **familia universal** y a M **espacio clasificador universal**.

Una pareja (M, U) formada por un espacio clasificador y una familia universal verifica la siguiente **propiedad universal**: para cada $T \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ y toda G familia parametrizada por T , existe un único morfismo $\omega_G : T \rightarrow M$ tal que

$$\omega_G^{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(T)$$

manda la clase de \sim_M -equivalencia de U a la clase de \sim_T -equivalencia de G .

Observación 1.17. *Si U es una familia universal en M , la fibra U_m con $m \in |M|$ cualquiera pertenece a la misma clase de $\sim_P = \sim_{\mathcal{M}}$ -equivalencia que $\xi(P)^{-1}(\phi_m)$ ya que por ser (M, ξ) el representante del functor \mathcal{F} se cumple que $[\phi_m^* U]_{\mathcal{M}} = \xi(P)^{-1}(\phi_m)$.*

El resultado siguiente afirma, como ya sabíamos, que es equivalente dar un espacio de módulos fino para \mathcal{F} que dar una familia universal parametrizada por un espacio clasificador universal:

Proposición 1.18. *Sea \mathcal{F} un functor de módulos. Si (M, ξ) es un espacio de módulos fino para \mathcal{F} entonces cualquier familia representante de la clase de \sim_M -equivalencia de $\xi(M)^{-1}(\text{Id}_M)$ es una familia universal y M es el espacio clasificador universal asociado. Recíprocamente, si $(N, U = U(N))$ es una pareja donde U es una familia universal parametrizada por N su espacio clasificador universal asociado, definimos $\xi \in \text{Nat}(\mathcal{F}, N^\bullet)$ como aquella transformación natural tal que*

$$\begin{array}{ccc} \xi(T) : \mathcal{F}(T) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, N) \\ [G] & \longmapsto & \tilde{\nu}_G \end{array}$$

donde $[G]$ denota la clase de \sim_T -equivalencia de una familia G parametrizada por T y ν_G la aplicación asociada a la familia G , entonces la pareja (N, ξ) es un espacio de módulos fino para \mathcal{F} .

1.2.2. Espacio de módulos grosero y familia tautológica

Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ un functor de módulos para el problema de módulos dado por $(\mathcal{M}, \sim_{\mathcal{M}})$ tal que (M, ξ) es un espacio de módulos grosero para \mathcal{F} .

Igual que en el caso previo, por ser $\xi(P)$ isomorfismo, se tiene que

$$\xi(P) : \mathcal{F}(P) = \mathcal{M}/\sim_{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, M) \equiv |M|.$$

Además la condición de que (M, ξ) sea inicial es que para cualquier objeto $T \in \mathcal{C}$ y toda transformación natural $\Psi_T : \mathcal{F} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, T)$, existe una única transformación natural $\Omega_T : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, M) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, T)$ tal que $\Psi_T = \Omega_T \circ \xi$.

Dado $T \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ y Ω_T como antes, por el Lema de Yoneda

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(M^\bullet, T^\bullet) & \xrightarrow{\sim} & T^\bullet(M) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T) \\ \Omega_T & \longmapsto & \Omega_T(M)(\text{Id}_M) =: \omega_T \end{array}$$

y por otra parte tenemos, por ser $\xi(P)$ isomorfismo, que

$$\Omega_T(P) = \psi_T(P) \circ \xi(P)^{-1} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, M) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, T)$$

Se verifica que $|\omega_T| = \Omega_T(P)$ ya que para cada $\phi_m : P \rightarrow M$ se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M^\bullet(M) & \xrightarrow{\Omega_T(M)} & T^\bullet(M) \\ \downarrow \phi_m^* & & \downarrow \phi_m^* \\ M^\bullet(P) & \xrightarrow{\Omega_T(P)} & T^\bullet(P) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \text{Id}_M & \longmapsto & \omega_T \\ \downarrow & & \downarrow \\ \phi_m & \longmapsto & \omega_T \circ \phi_m. \end{array}$$

y por ser $|\cdot|$ fiel, podemos pensar $\Omega_T(P)$ como un morfismo en la categoría \mathcal{C} .

En el caso que nos ocupa, dada una familia parametrizada por algún objeto de \mathcal{C} , veremos que en principio no tenemos restricción a la hora de tomar las clases de equivalencia de las fibras de en una familia parametrizada.

Por lo previamente argumentado, podemos dar la noción de aplicación asociada a una familia parametrizada por un objeto de \mathcal{C} como sigue. Dada una aplicación biyectiva

$$\alpha : \mathcal{F}(P) = \mathcal{M}/\sim_{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, M) \equiv |M|$$

y una familia $G \in \text{fam}(T)$ para algún $T \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, definimos la **aplicación asociada a la familia parametrizada G** como:

$$\begin{aligned} \nu_G : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, T) \equiv |T| &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, M) \equiv |M| = \mathcal{M}/\sim_{\mathcal{M}} \\ \phi_t \equiv t &\longmapsto \alpha([\phi_t^*G]_{\mathcal{M}}) \end{aligned}$$

donde $\phi_t^*G \in \text{fam}(P)$ y $[\phi_t^*G]_{\mathcal{M}}$ es la clase de $\sim_{\mathcal{M}}$ -equivalencia en $\mathcal{F}(P) = \mathcal{M}/\sim_{\mathcal{M}}$. Nótese que la definición de esta aplicación depende de la biyección α prefijada y que si tomamos un espacio de módulos grosero isomorfo a (M, ξ) , al no ser ξ un isomorfismo de funtores, la relación de equivalencia en las familias parametrizadas no queda completamente determinada por $\sim_{\mathcal{M}}$ como sí ocurre cuando se tiene un espacio de módulos fino para \mathcal{F} .

En particular, tomando $\alpha = \xi(P)$, para todo $T \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ y toda familia $G \in \text{fam}(T)$, se cumple que la aplicación $\nu_G = |\xi(T)([G]_T)|$, luego podemos dar a ν_G estructura de morfismo en \mathcal{C} .

El siguiente resultado, cuya demostración es una comprobación formal, afirma que es equivalente dar el espacio de módulos grosero (M, ξ) para el functor de módulos \mathcal{F} que dar la pareja $(M, \alpha := \xi(P))$.

Proposición 1.19. *Dada una pareja (M, α) donde $M \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ y $\alpha : \mathcal{F}(P) \rightarrow M^\bullet(P)$ una biyección de conjuntos tal que para todo $T \in \text{Obj}(\mathcal{C})$:*

- *dada cualquier familia $G \in \text{fam}(T)$, ν_G se corresponde con un morfismo $\widetilde{\nu}_G \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M)$ y*
- *dada cualquier transformación natural $\psi \in \text{Nat}(\mathcal{F}, T^\bullet)$, la aplicación $\psi(P) \circ \alpha^{-1} : |M| \rightarrow |T|$ se corresponde con un morfismo $\widetilde{\omega} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T)$*

Entonces se tiene que la asignación $\xi : \mathcal{F} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, M)$ definida por

$$\begin{aligned} \xi(T) : \mathcal{F}(T) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, N) \\ [G]_T &\longmapsto \tilde{\nu}_G \end{aligned}$$

es una transformación natural de funtores, con $\alpha = \xi(P)$ y además (M, ξ) es un espacio de módulos grosero para \mathcal{F} .

El siguiente resultado nos da la relación entre los espacios de módulos finos y groseros:

Proposición 1.20. *Sea (M, ξ) un espacio de módulos grosero para \mathcal{F} , entonces (M, ξ) es un espacio de módulos fino para \mathcal{F} si y solo si se cumple*

- (1) *existe $U \in \text{fam}(M)$ tal que para cada $m \in |M|$, $[U_m]_{\mathcal{M}} = \xi(P)^{-1}(\phi_m)$*
- (2) *para todo $T \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ si $G, G' \in \text{fam}(T)$ son tales que $[G_t]_{\mathcal{M}} = [G'_t]_{\mathcal{M}}$ para todo $t \in |T|$, entonces $[G]_T = [G']_T$ en $\mathcal{F}(T)$*

Si un functor de módulos \mathcal{F} tiene espacio de módulos grosero (M, ξ) , en ocasiones podremos decidir si \mathcal{F} puede o no tener un espacio de módulos fino a partir de la siguiente noción.

Definición 1.21. *Se llama **familia tautológica** para \mathcal{F} a una pareja (X, β) con $X \in \text{fam}(T)$ para un cierto $T \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ y $\beta : \mathcal{M}/\sim_{\mathcal{M}} \rightarrow |T|$ una aplicación verificando que*

- $\beta : \mathcal{F}(P) = \mathcal{M}/\sim_{\mathcal{M}} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, T) = |T|$ es una biyección y
- para todo $t \in |T|$ la fibra de X en el punto t cumple que $[X_t]_{\mathcal{M}} = \beta^{-1}(t)$.

Una familia universal es en particular una familia tautológica, por tanto si \mathcal{F} tiene espacio de módulos grosero (M, ξ) y no admite ninguna familia tautológica, deducimos que no existe ningún espacio de módulos fino para \mathcal{F} .

Capítulo 2

Curvas y esquemas

Empezamos estudiando las curvas algebraicas y las propiedades que nos interesan, entre ellas que podemos dar una inmersión de una curva en el espacio proyectivo como subesquema cerrado. Esto es relevante porque los problemas de móduli que parametrizan los subesquemas cerrados de un espacio proyectivo, tienen por espacios de móduli fino esquemas de Hilbert, que se pueden descomponer a su vez como una unión disjunta de esquemas, cada uno de los cuales es el espacio de móduli fino del problema que es parametrizar los subesquemas cerrados del espacio proyectivo con polinomio de Hilbert dado. Además cada curva, pensada como subesquema cerrado de un espacio proyectivo tiene un polinomio de Hilbert asociado y veremos que los morfismos planos tienen propiedades oportunas para definir después las familias de curvas parametrizadas, entre ellas que el polinomio de Hilbert de las fibras es constante en cada componente conexa del esquema que hace las veces de parámetro.

Incluimos seguidamente una introducción a las acciones de grupos algebraicos en esquemas y los distintos tipos de cocientes que se pueden obtener, demostrando su relación con los espacios de móduli grosero. Estos resultados permiten también probar la no existencia de espacios de móduli fino ciertos problemas de móduli de curvas de curvas algebraicas.

Convenciones y notación: Dado S un esquema, denotaremos por \mathbf{Sch}_S a la categoría de esquemas sobre S , es decir, aquella categoría en la que los objetos son $f_X : X \rightarrow S$ donde X es un esquema y f_X un morfismo de esquemas (denominado morfismo estructural) y los morfismos entre dos S -esquemas X, Y son morfismos de esquemas $g : X \rightarrow Y$ tales que $f_X = f_Y \circ g$. Dado A un anillo, los esquemas sobre $\text{Spec } A$ los llamaremos A -esquemas y denotaremos a la categoría de A -esquemas como \mathbf{Sch}_A . Podemos identificar, y en ocasiones lo haremos, un esquema X con el functor de puntos que define X^\bullet .

Supondremos siempre que k es un **cuerpo algebraicamente cerrado**. Salvo que se indique lo contrario, consideraremos siempre **esquemas localmente de tipo finito** sobre $\text{Spec } k$ y denotaremos por \mathbf{Sch}_k a la categoría de tales k -esquemas [1, Section 06LF].

2.1. Pero... ¿qué es una curva?

En geometría algebraica podemos encontrar diversas definiciones de curva, por lo que en esta sección vamos a establecer con qué definición trabajaremos en este documento.

Además indicaremos cuales son las implicaciones de esta definición así como los resultados en los que nos basaremos para dar respuesta a los problemas de móduli de curvas.

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado.

Definición 2.1. Llamaremos **curva** sobre k a un k -esquema $C \rightarrow \text{Spec } k$ propio sobre k (i.e., un esquema separado, de tipo finito y universalmente cerrado sobre k) tal que $\dim \mathcal{O}_{C,x} = 1$ para todo punto cerrado $x \in C$.

Algunas propiedades que se deducen de esta definición de curva son:

- las curvas son **esquemas localmente noetherianos** por ser localmente de tipo finito, de hecho son **esquemas noetherianos** ya que son compactos por ser propios. [1, Lema 01T6]
- las curvas son **proyectivas sobre k** , en el sentido de que para cualquier curva C existe una inmersión cerrada $C \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ para algún n .

Dado X un k -esquema, llamaremos a $X(k) := \text{Hom}_k(\text{Spec } k, X)$ los **puntos geométricos** de X , en este caso por ser k algebraicamente cerrado y X un esquema localmente de tipo finito, $X(k)$ son exactamente los puntos cerrados de X [13, Corolario 3.36].

El **género (aritmético)** de C una curva cualquiera se define como

$$g(C) = 1 - \chi(C, \mathcal{O}_C) = 1 - \dim_k H^0(C, \mathcal{O}_C) + \dim_k H^1(C, \mathcal{O}_C)$$

y es un invariante numérico de C . Comenzaremos parametrizando curvas irreducibles y no singulares de género g , que en particular, son conexas y son esquemas íntegros, luego su género es $g(C) = \dim_k H^1(C, \mathcal{O}_C)$ porque al ser k algebraicamente cerrado $H^0(C, \mathcal{O}_C) \simeq k$.

2.1.1. Inmersión de una curva en un espacio proyectivo

Dado S un esquema cualquiera, el espacio proyectivo sobre S es

$$\mathbb{P}_S^n = \text{Proj } \mathcal{O}_S[x_0, \dots, x_n] = \text{Proj}(\text{Sym}((\mathcal{O}_S^{n+1})^\vee))$$

Recordemos que dado un haz localmente libre \mathcal{N} en S , el functor de puntos del espectro proyectivo del álgebra simétrica de \mathcal{N} se define del modo siguiente: dado $f : X \rightarrow S$ un S -esquema los puntos racionales de $\text{Proj}(\text{Sym}(\mathcal{N}))^\bullet(X)$ son las secciones

$$\sigma : X \longrightarrow \text{Proj}(\text{Sym}(\mathcal{N})) \times_S X = \text{Proj}(\text{Sym}(f^*\mathcal{N}))$$

de la proyección natural $\pi : \text{Proj}(\text{Sym}(f^*\mathcal{N})) \rightarrow X$. Se puede probar que hay una correspondencia biunívoca entre las secciones $\sigma : X \rightarrow \text{Proj}(\text{Sym}(f^*\mathcal{N}))$ y los haces de línea \mathcal{L} que son cocientes de la forma $f^*\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$.

Si σ es una sección de π y consideramos el haz $\mathcal{O}(1)$ de $\text{Proj}(\text{Sym}(f^*\mathcal{N}))$, tenemos $\pi^*f^*\mathcal{N} = \pi^*\pi_*\mathcal{O}(1) \rightarrow \mathcal{O}(1) \rightarrow 0$ lo que induce $f^*\mathcal{N} \rightarrow \sigma^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{L} \rightarrow 0$. Recíprocamente, dado $f^*\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$ induce una inmersión entre los espectros proyectivos de las correspondientes álgebras simétricas $\sigma : \text{Proj}(\text{Sym}(\mathcal{L})) \rightarrow \text{Proj}(\text{Sym}(f^*\mathcal{N}))$ y $\text{Proj}(\text{Sym}(\mathcal{L})) \simeq \text{Proj}(\text{Sym}(\mathcal{O}_X)) \simeq X$ por ser una cuestión local.

Se puede probar la siguiente correspondencia:

Proposición 2.2. [13, Corolario 13.33] Sea X un S -esquema, entonces hay una biyección natural entre $\text{Hom}_S(X, \mathbb{P}_S^n)$ y el conjunto $\{(\mathcal{L}, s_0, \dots, s_n)$ donde \mathcal{L} es un haz de línea en X y $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ que generan $\mathcal{L}\}/_{iso}$

Veamos ahora de modo explícito el caso de k -esquemas y cómo dar inmersiones cerradas de curvas en \mathbb{P}_k^n .

Si X es un k -esquema, \mathcal{L} un haz de línea en X y $\{s_0, \dots, s_n\}$ un conjunto de $n + 1$ secciones que generan \mathcal{L} para cada $x \in X(k)$ hay un índice i tal que $s_i(x) \in \mathcal{L}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x)$ es no nula ya que las s_i generan \mathcal{L} y para cada j existe un único elemento $\alpha_j \in \kappa(x) = k$ tal que $s_j(x) = \alpha_j s_i(x)$. Definimos los puntos racionales del morfismo $\iota : X \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ inducido por $(\mathcal{L}, s_0, \dots, s_n)$ como:

$$\begin{aligned} X(k) &\longrightarrow \mathbb{P}_k^n(k) \\ x &\longmapsto [s_0(x) : \dots : s_n(x)] := [\alpha_0 : \dots : \alpha_n]. \end{aligned}$$

Vamos a establecer cuando $\iota : X \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ es una inmersión cerrada.

Una caracterización geométrica para X un esquema propio sobre k es la siguiente consecuencia de la [13, Proposición 12.94]:

Proposición 2.3. Sea X un esquema propio sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k y \mathcal{L} un haz de línea en X y $\{s_0, \dots, s_n\}$ secciones de \mathcal{L} , entonces $(\mathcal{L}, s_0, \dots, s_n)$ define una inmersión cerrada $i : X \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ si y solo si se cumplen:

- Las secciones s_i generan \mathcal{L} : para todo $x \in X(k)$ existe alguna sección s_i que no se anula en x .
- Las secciones s_i separan puntos: para toda pareja de puntos distinto $x, y \in X(k)$ existe una sección $t \in V = \langle s_0, \dots, s_n \rangle_k \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ tal que bien $t(x) = 0$ y $t(y) \neq 0$, bien $t(y) = 0$ y $t(x) \neq 0$.
- Las secciones s_i separan vectores tangentes: para todo $x \in X(k)$, el conjunto de secciones $t \in V$ en el sub- k -espacio vectorial generado por las s_i tales que $t(x) = 0$ genera $\mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x / \mathfrak{m}_x^2 \mathcal{L} \simeq \mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2$.

Definición 2.4. Un haz de línea \mathcal{L} en X un esquema cuasi-compacto cuasi-separado es **amplio** cuando existe un $n \geq 1$ y un número finito de secciones $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ tales que

$$X_{s_i} = \{x \in X : s(x) \neq 0 \text{ en la fibra } \mathcal{L}(x) := \mathcal{L}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x)\}$$

son abiertos afines y recubren X .

Dado $f : X \rightarrow S$ un morfismo de tipo finito, un haz de línea \mathcal{L} en X es **relativamente amplio** para f si $\mathcal{L}|_{f^{-1}(U)}$ es amplio para todo abierto afín $U \subset S$.

Algunas condiciones equivalentes para que \mathcal{L} un haz de línea en X sea amplio son:

- (1) $\mathcal{L}^{\otimes n}$ es amplio para algún $n \geq 1$ y
- (2) para todo \mathcal{O}_X -módulo de tipo finito cuasi-coherente \mathcal{F} existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ está generado por sus secciones globales para todo $n \geq n_0$.

Definición 2.5. Un haz de línea \mathcal{L} en X un S -esquema de tipo finito, \mathcal{L} es **muy amplio** sobre S si existe un recubrimiento $\{U_j\}$ de S e inmersiones $\iota_j : X \rightarrow P_j = \mathbb{P}_{U_j}^{n_j}$ para cierto $n_j \geq 0$ tal que $\mathcal{L} \simeq \iota_j^* \mathcal{O}_{P_j}(1)$.

Observemos que si \mathcal{L} es un haz de línea en X muy amplio sobre S y $f : S' \rightarrow S$, denotando por $g : X \times_S S' \rightarrow X$ la proyección correspondiente al cambio de base, se tiene que $g^* \mathcal{L}$ es muy amplio sobre S' .

Proposición 2.6. [13, Teorema 13.62] Sea $\pi : X \rightarrow S$ un morfismo de tipo finito con S cuasi-compacto, se cumple que \mathcal{L} es un haz de línea en X amplio si y solo si existe algún entero $n > 0$ tal que $\mathcal{L}^{\otimes n}$ es muy amplio para π .

El siguiente resultado sintetiza la relación entre estos distintos tipos de haces de línea y las inmersiones de un esquema en un espacio proyectivo:

Teorema 2.7. Si S es un esquema cuasi-separado cuasi-compacto tal que tiene un haz de línea amplio y $f : X \rightarrow S$ es un morfismo de tipo finito, entonces:

- (1) Existe un S -inmersión $X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$ para algún n si y solo si existe un haz de línea en X muy amplio sobre S si y solo si existe un haz de línea en X relativamente amplio para f .
- (2) Existe un S -inmersión cerrada $X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$ para algún n si y solo si X es propio sobre S y existe un haz de línea en X muy amplio sobre S si y solo si X es propio sobre S y existe un haz de línea en X relativamente amplio para f .

En el caso una curva C sobre k tenemos que $(\mathcal{L}, s_0, \dots, s_n)$ define una inmersión cerrada $\iota : C \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ el proyectivo precisamente cuando las secciones s_i generan \mathcal{L} y además las s_i “separan puntos” y “separan vectores tangentes”. Dado $V \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ el subespacio vectorial generado por las secciones s_i , que las s_i separen puntos quiere decir que para cada par de puntos distintos de $X(k)$ existe $t \in V$ que se anula en uno de ellos y no en el otro, lo que nos garantiza que $\iota(k) : C(k) \rightarrow \mathbb{P}_k^n(k)$ es inyectiva; por otra parte que las s_i separen tangentes significa que para todo $x \in X(k)$ el conjunto de secciones $t \in V$ tales que $t(x) = 0$ genera $\mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x / \mathfrak{m}_x^2 \mathcal{L}_x$.

Dado que existe un isomorfismo de grupos entre los haces de línea de C módulo isomorfismos y los divisores (de Cartier) en C módulo la equivalencia lineal, recogemos a continuación las condiciones que ha de cumplir un divisor en una curva lisa para que defina una inmersión cerrada de C en \mathbb{P}_k^n .

Teorema 2.8 (Riemann-Roch para curvas lisas). Sea C una curva lisa de género g , existe un divisor K_C de grado $gr(K_C) = 2g - 2$, llamado **divisor canónico** de C sobre k , tal que para cualquier otro divisor

$$h^0(\mathcal{O}_C(D)) - h^0(\mathcal{O}_C(K_C - D)) = gr(D) + \chi(\mathcal{O}_C)$$

donde $h^0(F) = \dim H^0(C, F)$ y $\mathcal{O}_C(D)$ denota el haz de línea asociado al divisor D . Además se verifica que $H^0(C, \mathcal{O}_C(K_C - D)) \simeq H^1(C, \mathcal{O}_C(D))^*$.

Del Teorema de Riemann-Roch se deduce que la condición para que un divisor D en C una curva lisa defina una inmersión cerrada $C \rightarrow \mathbb{P}_k^{h^0(\mathcal{O}_C(D)) - 1}$ es que $gr(D) \geq 2g + 1$ y además en ese caso se cumple que $h^0(\mathcal{O}_C(D)) - 1 = gr(D) - g$.

Si C es una curva lisa de género $g \geq 2$ y tomamos $\nu \geq 3$ se tiene que νK_C define una inmersión cerrada de C en el espacio proyectivo de dimensión $2\nu(g - 1) - g$.

Recordemos que el divisor canónico K_C en el caso de C una curva lisa es el correspondiente al haz **dualizante** de la curva sobre k que es un haz de línea $\mathcal{O}_C(K_C) = \omega_{C/k} \simeq \Omega_{C/k}$ isomorfo al haz de las diferenciales de C sobre k (ver Observación 2.23). El dualizante de una curva lisa $\Omega_{C/k}$ es un haz de línea amplio y $\Omega_{C/k}^{\otimes \nu}$ es muy amplio (sobre k) para $\nu \geq 3$.

Observación 2.9. *Dar la proyectivización de $V \subseteq \Gamma(C, \mathcal{L})$, equivale a dar una **serie lineal**, esto es, un conjunto de divisores linealmente equivalentes $|D|$ con la estructura de espacio proyectivo que tiene de modo natural (dos divisores linealmente equivalentes difieren en el divisor de una función $f \in K(C)$ del cuerpo de funciones de C y f define el mismo divisor que λf con $\lambda \in k^\times$).*

Vamos a dar una caracterización de los haces de línea definidos por un divisor amplios sobre una curva proyectiva. Para ello necesitamos el siguiente resultado:

Lema 2.10. *[20, Lema 5.3.7] Sea X un esquema propio sobre un anillo noetheriano y \mathcal{L} un haz de línea en X . Si \mathcal{I}, \mathcal{J} son dos haces de ideales coherentes en X que definen los subesquemas Y, Z y son tales que $\mathcal{I}\mathcal{J} = 0$ y $\mathcal{L}|_Y, \mathcal{L}|_Z$ son amplios en Y y Z respectivamente, entonces \mathcal{L} es amplio.*

Proposición 2.11. *Sea X una curva sobre k y $\{X_1, \dots, X_r\}$ sus componentes irreducibles. Dado D un divisor en X , una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{O}_X(D)$ sea amplio es que $gr\mathcal{O}_X(D)|_{X_i} > 0$ en toda componente irreducible X_i de X .*

Demostración. Si $\mathcal{O}_X(D)$ es amplio, como $\iota : X_i \rightarrow X$ es una inmersión cerrada, $\mathcal{O}_X(D)|_{X_i}$ es amplio en X_i ya que $H^p(X_i, \iota^*\mathcal{O}_X(D)) = H^p(X, \mathcal{O}_X(D))$. Por otra parte si $\mathcal{O}_X(D)|_{X_i}$ es amplio para todo $i = 1, \dots, r$ se comprueba por inducción utilizando el Lema 2.10 que $\mathcal{O}_X(D)|_{X_{red}}$ es amplio donde X_{red} es el esquema reducido asociado a X . Denotando por \mathcal{N} el haz coherente formado por los elementos nilpotentes de \mathcal{O}_X , existe un $t > 0$ tal que $\mathcal{N}^t = 0$, aplicando el mismo lema a los haces $\mathcal{I} = \mathcal{N}^{t-1}$ y $\mathcal{J} = \mathcal{N}$, deducimos que $\mathcal{O}_X(D)$ es amplio en X .

Basta ver ahora que si X es un esquema íntegro y proyectivo, $\mathcal{O}_X(D)$ es amplio si y solo si $gr\mathcal{O}_X(D) > 0$. Si $\mathcal{O}_X(D)$ es amplio, $grD \geq 0$, puesto que si $grD < 0$, entonces $H^0(\mathcal{O}_X(nD)) = 0$, luego $\mathcal{O}_X(nD)$ no puede estar generado por sus secciones globales para ningún n . Además $grD \neq 0$ porque si fuese igual a 0 y $\mathcal{O}_X(nD)$ está generado por sus secciones globales, entonces $\mathcal{O}_X(nD) = \mathcal{O}_X$ y \mathcal{O}_X no es amplio. por tanto $grD > 0$.

Recíprocamente, si $grD > 0$ y E es un divisor en X que define un haz de línea amplio. Del teorema de Riemann-Roch se deduce que $h^0(\mathcal{O}_X(nD - E)) \geq gr(nD - E) + \chi(\mathcal{O}_X)$ para todo $n \geq 1$. Podemos tomar un n tal que $h^0(\mathcal{O}_X(nD - E)) \neq 0$ y tomando D como un divisor linealmente equivalente a nD , el divisor $D - E$ es efectivo. Queremos ver

que dado \mathcal{F} un haz coherente cualquiera en X , $H^1(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(mD)) = 0$ para todo m suficientemente grande. Tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(mE) \rightarrow \mathcal{O}_X(mD) \rightarrow \mathcal{O}_{m(D-E)} \rightarrow 0$$

y tensorializando por \mathcal{F} obtenemos

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(mE) \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(mD) \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{m(D-E)} \rightarrow 0.$$

Por ser X de dimensión 1, y $\mathcal{O}_X(E)$ amplio por hipótesis, $H^1(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(mE)) = 0$ para todo m suficientemente grande, luego deducimos que $H^1(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(mC)) = 0$ para m suficientemente grande. \square

Otro resultado clásico que necesitaremos es el siguiente:

Teorema 2.12 (Riemann-Hurwitz). *Seas X, Y curvas lisas de géneros g_X, g_Y respectivamente y $f : X \rightarrow Y$ un morfismo no constante. Si el morfismo entre los cuerpos de fracciones $\Sigma_Y \hookrightarrow \Sigma_X$ es una extensión separable, entonces*

$$2g_X - 2 = (2g_Y - 2)\text{gr}(f) + \text{gr}(R)$$

donde $R = \sum_{p \in X} l(\Omega_{X/Y})_p p$ es un divisor (de Cartier) efectivo llamado divisor de ramificación.

2.1.2. Polinomio de Hilbert de un esquema proyectivo

En general, para un haz coherente F en X un esquema proyectivo de dimensión n sobre k , se define el **polinomio de Hilbert** de F como

$$P_F(m) = \chi(X, F \otimes \mathcal{O}_X(m)) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i h^i(X, F(m))$$

esto tiene sentido porque para todo haz coherente F , la dimensión de $H^i(X, F)$ es finita y además para todo entero m suficientemente grande es un polinomio con coeficientes racionales [1, Lemma 08AC]. En particular, se define el polinomio de Hilbert de X , $P_X(m)$, como el de \mathcal{O}_X . de modo que

$$P_X(m) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i h^i(X, \mathcal{O}_X(m))$$

En el polinomio de Hilbert quedan codificados varios invariantes numéricos del correspondiente esquema: Si X es un subesquema cerrado de \mathbb{P}^N con polinomio de Hilbert $P_X(m) = a_n m^n + \dots + a_0$, se define la **dimensión** de X como el grado de P_X , i.e., $\dim X = \text{gr} P_X = n$ y el **grado** de X como $\deg X = a_n \cdot n!$, además en este caso se tiene que el género aritmético $g(X) = 1 - P_X(0) = 1 - \chi(X, \mathcal{O}_X)$. Nótese que la dimensión de X así definida es la mayor de las dimensiones de sus componentes conexas, entendidas en el sentido habitual y si X es conexa ambas nociones coinciden.

En el caso de una curva lisa C de género g , como es un esquema proyectivo, podemos pensar C como un subesquema cerrado $C \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ y su polinomio de Hilbert es de la forma

$$P_C(m) = \deg(C)m + 1 - g.$$

Como hemos visto, dado $\nu \geq 3$ podemos dar una inmersión cerrada de C en el espacio proyectivo tomando el haz de línea νK_C . Fijamos como polinomio de Hilbert

$$P_C(m) = 2\nu(g-1)m + 1 - g$$

en consecuencia C es una curva de grado $\deg(C) = 2\nu(g-1)$ y $N = P(1)-1 = 2\nu(g-1)-g$.

2.1.3. Familias planas

Definición 2.13. *Sea S un k -esquema, llamamos **familia plana sobre S** a un morfismo $X \rightarrow S$ plano, siendo las fibras de dicho morfismo los elementos de la familia.*

Esta definición resulta ser la adecuada para dar el functor de módulos ya que los morfismos planos tienen propiedades que nos garantizan que ciertos invariantes sean constantes en las fibras de la familia (por ejemplo, veremos que en el caso de una familia en que las fibras son proyectivas, todas ellas tienen el mismo polinomio de Hilbert).

Sabemos que un morfismo plano $f : X \rightarrow S$ de esquemas cambia de base en el sentido de que si $g : S' \rightarrow S$ es un morfismo de esquemas, entonces definiendo $X' = X \times_S S'$, $f' = \pi_2 : X' \rightarrow S'$ es un morfismo plano. Por otra parte, la composición de morfismos planos es un morfismo plano y si tenemos dos elementos isomorfos de una familia plana sobre S , siguen siendo isomorfos tras un cambio de base. Además la cohomología (de un haz cuasi-coherente en X un S -esquema) conmuta con cambios de base planos (véase [1, Lema 02KH] [15, Proposición 9.3 III]). Otra propiedad importante es:

Proposición 2.14. [15, III Proposición 9.5] *Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo plano de k -esquemas (de tipo finito). Para todo punto $x \in X$ sea $y = f(x)$, entonces*

$$\dim_x(X_y) = \dim_x X - \dim_y Y$$

donde $\dim_x X := \dim \mathcal{O}_{X,x}$ y denotamos por X_y a la fibra de y .

Para familias planas de esquemas proyectivos tenemos una caracterización a partir del polinomio de Hilbert:

Teorema 2.15. [15, III Teorema 9.9] *Sea S un esquema noetheriano íntegro y $X \subseteq \mathbb{P}_S^n$ un subesquema cerrado. Para todo punto $s \in S$ denotaremos $P_t(z) \in \mathbb{Q}[z]$ al polinomio de Hilbert de la fibra X_s considerado como subesquema cerrado de $\mathbb{P}_{\kappa(s)}^n$. Una condición necesaria y suficiente para que X sea plano sobre S es que el polinomio de Hilbert P_t sea el mismo para todas las fibras X_t .*

Corolario 2.16. [15, III Corolario 9.10] *Sea S un esquema noetheriano conexo y $X \subseteq \mathbb{P}_S^n$ un subesquema cerrado plano sobre S , entonces P_{X_s} es independiente de $s \in S$, en particular la dimensión, el grado y el género de las fibras X_s son independientes de $s \in S$.*

Recordemos que un morfismo liso es un morfismo plano de fibras lisas, así si S es un k -esquema íntegro, y $\varphi : X \rightarrow S$ es un morfismo liso cuyas fibras son curvas irreducibles, todas esas curvas con el mismo género y grado.

Se tiene el siguiente resultado general:

Lema 2.17. [15, III Teorema 12.11] Sea $f : X \rightarrow S$ un morfismo propio de esquemas localmente noetherianos, F un \mathcal{O}_X -módulo coherente y plano sobre S . Si

$$\varphi_s^i : R^i f_*(F) \otimes_{\mathcal{O}_S} \text{Spec } \kappa(s) \rightarrow H^i(X_s, F_s)$$

es epiyectivo para algún entero i y algún punto $s \in S$ donde $X_s := f^{-1}(s)$ y $F_s := F \otimes_{\mathcal{O}_S} \text{Spec } \kappa(s)$, entonces φ_s^i es una biyección y φ_s^{i-1} es epiyectivo si y solo si $R^i f_*(F)$ es un \mathcal{O}_S -módulo libre en un entorno de s .

2.1.4. Dualizante de una familia plana

El objetivo de este apartado es definir el haz canónico $\omega_{X/Y}$ de un morfismo cuasi-proyectivo localmente de intersección completa $f : X \rightarrow Y$, para lo que haremos uso de la teoría de determinantes. Veremos que cuando f es plano, $\omega_{X/Y}$ coincide con el haz dualizante.

Haz canónico asociado a un morfismo

Definición 2.18. Dada $f : X \rightarrow Y$ una inmersión y U un subesquema abierto de Y tal que f factoriza por una inmersión cerrada $i : X \rightarrow U$ definida por el haz de ideales \mathcal{I} , se llama **haz conormal de X en Y** al haz $\mathcal{C}_{X/Y} = i^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ y su dual $\mathcal{N}_{X/Y} = \mathcal{C}_{X/Y}^\vee$ se llama **haz normal de X en Y** .

Recordemos que si $f : X \rightarrow Y$ es una inmersión donde Y es un esquema localmente noetheriano, se dice que es una **inmersión regular** si para todo punto $x \in X$ se cumple que $\ker(\mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x})$ está generado por una sucesión regular.

Definición 2.19. Se dice que un morfismo $f : X \rightarrow Y$ donde Y es un esquema localmente noetheriano es **localmente de intersección completa (LCI)** cuando para cada punto $x \in X$ existe un entorno U de x , una inmersión regular $i : U \rightarrow Z$ y un morfismo liso $g : Z \rightarrow Y$ tales que $f|_U = g \circ i$.

El determinante de un A -módulo M libre de rango n se define como $\det M = \bigwedge^n M$ que es un A -módulo libre de rango 1. Esta definición se generaliza para \mathcal{F} un haz localmente libre de rango finito en un esquema X : en cada componente conexa X_i de X (que en particular es un abierto de X porque suponemos que X es localmente de tipo finito sobre k), el haz \mathcal{F} tiene rango constante r_i y definimos $(\det \mathcal{F})|_{X_i} = \bigwedge^{r_i} (\mathcal{F}|_{X_i})$ donde $(\bigwedge^r \mathcal{F})|_U$ es isomorfo al haz asociado al módulo $(\bigwedge^r \mathcal{F}(U))$. De este modo, $\det \mathcal{F}$ es un haz de línea en X .

El haz determinante de un haz localmente libre \mathcal{F} en un esquema X cumple que:

- $\det(\mathcal{F}^\vee) \simeq (\det \mathcal{F})^\vee$
- Dada $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ una sucesión exacta de haces localmente libres de rango finito en X , entonces se tiene un isomorfismo canónico $\det \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}'' \simeq \det \mathcal{F}$. Además tanto el isomorfismo del punto anterior como este conmutan con cambios de base.

- Para todo morfismo de esquemas $g : Y \rightarrow X$, se tiene un isomorfismo canónico $\det(g^*\mathcal{F}) \simeq g^*(\det \mathcal{F})$

Estas propiedades son consecuencia de las propiedades análogas en el caso considerar el determinante de un A -módulo libre de rango finito [20, Lema 6.4.1], considerando un recubrimiento por abiertos afines del esquema X .

Dado un morfismo de esquemas $f : X \rightarrow Y$, el haz de las diferenciales $\Omega_{X/Y}^1$ es canónicamente isomorfo al haz conormal asociado al morfismo diagonal $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$ [1, Lema 08S2], equivalentemente se puede definir como el único haz que restringido a cada abierto afín es isomorfo al haz asociado al módulo de las diferenciales correspondiente.

Nótese que si Y es localmente noetheriano y f es un morfismo liso, se tiene que $\Omega_{X/Y}^1$ es localmente libre en X ([1, Lema 02G1]), luego tiene sentido considerar su determinante:

Definición 2.20. Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo de esquemas cuasi-proyectivo, locamente de intersección completa con Y localmente noetheriano e $i : X \rightarrow Z$ una inmersión en un esquema Z liso sobre Y . Se define el **haz canónico de f** como el haz de línea

$$\omega_{X/Y} := \det(\mathcal{C}_{X/Y})^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} i^*(\det \Omega_{Z/Y}^1)$$

Para ver que el haz canónico está bien definido utilizaremos el siguiente resultado:

Lema 2.21. [20, Corolary 6.3.22] Sea $f : X \rightarrow Y$ locamente de intersección completa tal que f factoriza por una inmersión $i : X \rightarrow Z$ y un morfismo liso $g : Z \rightarrow Y$, entonces i es una inmersión regular y se tiene una sucesión exacta canónica

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_{X/Y} \rightarrow \mathcal{C}_{X/Z} \rightarrow i^*\Omega_{X/Y}^1 \rightarrow 0$$

Proposición 2.22. Con las notaciones de la Definición 2.20, el haz canónico es independiente de la descomposición $X \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{g} Y$, salvo isomorfismos

Demostración. Sean $X \xrightarrow{i_1} Z_1 \xrightarrow{g_1} Y$ y $X \xrightarrow{i_2} Z_2 \xrightarrow{g_2} Y$ dos descomposiciones con i_j inmersiones de X en sendos esquemas Z_j lisos sobre Y . Definimos $W = Z_1 \times_Y Z_2$ y obtenemos dos descomposiciones

$$X \xrightarrow{h=(i_1, i_2)} W = Z_1 \times_Y Z_2 \xrightarrow{\pi_j} Z_j.$$

Las inmersiones i_j son regulares por ser f LCI y las proyecciones π_i son lisas, luego se tiene sucesiones exactas

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_{X/Z_j} \rightarrow \mathcal{C}_{X/W} \rightarrow h^*\Omega_{W/Z_j}^1 \rightarrow 0.$$

Como $\Omega_{W/Z_1} = \Omega_{Z_1 \times_Y Z_2/Z_1} \cong \pi_2^*\Omega_{Z_2/Y}^1$, se tiene que $h^*\Omega_{W/Z_1}^1 = h^*\pi_2^*\Omega_{Z_2/Y}^1 = i_2^*\Omega_{Z_2/Y}^1$ y análogamente $h^*\Omega_{W/Z_2}^1 = i_1^*\Omega_{Z_1/Y}^1$. Tomando determinantes en ambas sucesiones exactas deducimos que $\det(\mathcal{C}_{X/Z_1}) \simeq \det(\mathcal{C}_{X/Z_2})$ y que $\det(i_1^*\Omega_{Z_1/Y}^1) \simeq \det(i_2^*\Omega_{Z_2/Y}^1)$ y como se tiene que $i_j^*\det(\Omega_{Z_j/Y}^1) \simeq \det(i_j^*\Omega_{Z_j/Y}^1)$ llegamos a la conclusión deseada. \square

Observación 2.23. De la definición se deduce que el haz canónico de un morfismo liso $f : X \rightarrow Y$ de dimensión relativa d es $\omega_{X/Y} = \det(\Omega_{X/Y}^1) = \wedge^d \Omega_{X/Y}^1$, en particular para una curva lisa C sobre k se tiene que $\omega_{C/k} = \Omega_{C/k}^1$.

Teorema 2.24. [20, Teorema 6.4.9] Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo cuasi-proyectivo LCI, se cumple que:

- (1) si $g : Y \rightarrow Z$ es otro morfismo cuasi-proyectivo LCI, entonces se tiene un isomorfismo canónico

$$\omega_{X/Z} \simeq \omega_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^* \omega_{Y/Z};$$

- (2) si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo cuasi-proyectivo LCI y $f' : Y' \rightarrow Y$ es morfismo, entonces si f o f' es plano, $\pi_1 : X' = X \times_Y Y' \rightarrow X$ es LCI y tenemos un isomorfismo canónico de cambio de base entre los haces canónicos

$$\omega_{X'/Y'} \simeq \pi_1^* \omega_{X/Y}.$$

Dualidad de Serre-Grothendieck

Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo propio con Y localmente noetheriano tal que las fibras son de dimensión finita acotada por r .

En el caso particular de $Y = k$, se llama haz dualizante a un haz coherente ω_f y un morfismo $\text{tr}_f : H^r(X, \omega_f) \rightarrow k$ tal que para todo haz coherente \mathcal{F} , la asignación natural

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_f) \times H^r(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^r(X, \omega_f) \xrightarrow{\text{tr}_f} k$$

induce un isomorfismo

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_f) \simeq H^r(X, \mathcal{F})^\vee.$$

Para generalizar esta noción observemos que dados dos haces cuasi-coherentes \mathcal{F}, \mathcal{G} en X y para todo abierto afín $V \subseteq Y$, cada morfismo $\mathcal{F}|_{f^{-1}(V)} \rightarrow \mathcal{G}|_{f^{-1}(V)}$, induce un morfismo en cohomología $H^r(f^{-1}(V), \mathcal{F}|_{f^{-1}(V)}) \rightarrow H^r(f^{-1}(V), \mathcal{G}|_{f^{-1}(V)})$ y utilizando que la imagen directa superior ($R^r f_* \mathcal{F}$) de un haz \mathcal{F} en X es el haz asociado al prehaz $V \mapsto H^r(f^{-1}(V), \mathcal{F}|_{f^{-1}(V)})$ para $V \subseteq Y$ un abierto; obtenemos una biyección

$$f_* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \times R^r f_* \mathcal{F} \longrightarrow R^r f_* \mathcal{G}.$$

En general, se llama **haz dualizante** en X para f a un haz cuasi-coherente ω_f dotado de un morfismo de \mathcal{O}_Y -módulos $\text{tr}_f : R^r f_* \omega_f \rightarrow \mathcal{O}_Y$ llamado morfismo **traza** tal que para todo haz cuasi-coherente \mathcal{F} en X , la biyección

$$f_* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_f) \times R^r f_* \mathcal{F} \longrightarrow R^r f_* \omega_f \xrightarrow{\text{tr}_f} \mathcal{O}_Y$$

induce un isomorfismo

$$f_* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_f) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(R^r f_* \mathcal{F}, \mathcal{O}_Y)$$

Además si la pareja (ω_f, tr_f) existe, es única salvo un único isomorfismo ya que si $(\omega'_f, \text{tr}'_f)$ es otro dualizante para f , entonces $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\omega'_f, \omega_f) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(R^r f_* \omega'_f, \mathcal{O}_Y)$, tomando la imagen inversa de tr'_f por este isomorfismo obtenemos $\rho' : \omega'_f \rightarrow \omega_f$ y de modo similar tr_f induce $\rho : \omega_f \rightarrow \omega'_f$. El morfismo $\rho' \circ \rho : \omega_f \rightarrow \omega_f$ induce un morfismo entre las imágenes directas superiores $(\rho' \circ \rho)_r : R^r f_* \omega_f \rightarrow R^r f_* \omega_f$ tal que $\text{tr}_f = \text{tr}'_f \circ (\rho' \circ \rho)_r$ de donde se deduce que ρ' es un isomorfismo.

Utilizaremos más adelante el siguiente resultado:

Teorema 2.25. [20, Teorema 6.4.32] Sea $f : X \rightarrow Y$ morfismo plano proyectivo LCI con Y esquema localmente noetheriano de dimensión relativa 1 (i.e. la dimensión de la fibra en cada punto es 1), entonces el dualizante ω_f existe y es isomorfo al haz canónico $\omega_{X/Y}$ y si además f es liso, $\omega_f \simeq \Omega_{X/Y}^1$.

Se puede demostrar además que para una curva sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k , existe un haz dualizante coherente $\omega_{C/k}$ (véase [20, Corolario 6.4.29]), lo que nos permite da la siguiente versión general del teorema de Riemann-Roch:

Teorema 2.26. (Riemann-Roch para curvas) Sea C una curva sobre k , entonces para cada divisor de Cartier D , se cumple que

$$h^0(C, \mathcal{O}_C(D)) - h^0(C, \omega_{C/k} \otimes \mathcal{O}_C(-D)) = gr(D) + 1 - g(C).$$

2.2. Functores representables en la categoría de esquemas

En esta sección recogeremos algunos de los resultados que necesitaremos para estudiar problemas de móduli en los que la categoría parámetro sea \mathbf{Sch}_k la categoría de esquemas, dando de modo general criterios de representabilidad de funtores en \mathbf{Sch}_S . Aunque no profundizaremos demasiado en las topologías de Grothendieck, la idea detrás de las definiciones y resultados es trasladar de manera adecuada la noción de “recubrimiento por abiertos” a la categoría de funtores.

En general en la categoría de esquemas \mathbf{Sch} , dados $F, G \in \text{Func}((\mathbf{Sch})^{op}, \mathbf{Sets})$, un morfismo de funtores $\eta : F \rightarrow G$ se dice **morfismo representable** si para todo esquema S y todo morfismo de funtores $\mu : X^\bullet \rightarrow G$ en $\text{Func}((\mathbf{Sch})^{op}, \mathbf{Sets})$, el functor $F \times_G X^\bullet$ es representable.

Sea S un esquema cualquiera. Si $j : U \rightarrow X$ es una inmersión abierta de S -esquemas, $F \in \text{Func}((\mathbf{Sch}_S)^{op}, \mathbf{Sets})$ y $\gamma \in F(X)$, denotaremos $\gamma|_U := j^F(\gamma)$.

Un **recubrimiento de Zariski** de un esquema X es una colección de inmersiones abiertas $\{j_i : U_i \rightarrow X\}$ tales que $X = \bigcup j_i(U_i)$. Claramente podemos identificar un recubrimiento de Zariski con un recubrimiento por abierto de X , y por sencillez identificaremos $j_i(U_i)$ con U_i en la siguiente definición.

Definición 2.27. Sea $F \in \text{Func}((\mathbf{Sch}_S)^{op}, \mathbf{Sets})$, se dice que F es un **haz para la topología de Zariski** si para todo S -esquema X y todo recubrimiento de Zariski $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ se verifica que

- si $\gamma, \gamma' \in F(X)$ verifican que $\gamma|_{U_i} = \gamma'|_{U_i}$ para todo $i \in I$, entonces $\gamma = \gamma'$ y
- dadas $\gamma_i \in F(U_i)$ para cada $i \in I$ tal que $\gamma_i|_{(U_i \cap U_j)} = \gamma_j|_{(U_i \cap U_j)}$, entonces existe un único elemento $\gamma \in F(X)$ tal que $\gamma|_{U_i} = \gamma_i$ para todo $i \in I$.

Puesto que podemos pegar morfismos de esquemas, si $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ un recubrimiento por abiertos de un esquema cualquiera y $g_i : U_i \rightarrow Y$ morfismos de esquemas tal que coinciden en las intersecciones $g_i|_{U_i \cap U_j} = g_j|_{U_i \cap U_j}$, obtenemos un morfismo de esquemas $X \rightarrow Y$, se demuestra que $X^\bullet = \text{Hom}_S(-, X)$ es un haz.

Proposición 2.28. Sea $F : (\mathbf{Sch}_S)^{op} \longrightarrow \mathbf{Sets}$. Si F es representable, entonces es un haz para la topología de Zariski.

Las siguientes definiciones nos permiten dar un recíproco parcial del resultado anterior.

Definición 2.29. Sean $F, F' \in \text{Func}((\mathbf{Sch}_S)^{op}, \mathbf{Sets})$, con $f : F' \rightarrow F$, diremos que F' es un **subfunctor abierto** (resp. cerrado) de F si para todo X S -esquema y todo $X^\bullet \rightarrow F$, se verifica que $F' \times_F X^\bullet$ es representable por un subesquema abierto (resp. cerrado) de X . Diremos que $\{\eta_i : F_i \rightarrow F\}$ una familia de subfuntores abiertos de F es un **recubrimiento abierto de Zariski** para F si para todo X S -esquema, $\{F_i \times_F X^\bullet\}$ es un recubrimiento abierto de X^\bullet .

Teorema 2.30. Sea $F : (\mathbf{Sch}_S)^{op} \longrightarrow \mathbf{Sets}$. Si F es un haz para la topología de Zariski y F tienen un recubrimiento por abiertos de Zariski $\{\eta_i : F_i \longrightarrow F\}$ con F_i funtores representables, entonces F es representable

La demostración se basa en el recollement de esquemas, pegando los esquemas que representan los funtores F_i y obteniendo así un esquema que represente a F .

Observación 2.31. En general dado X un esquema, denotaremos a su functor de puntos sencillamente por X , o sea, no distinguiremos entre el functor X^\bullet y su representante.

Más adelante en la Sección 4.2.3, se considerará también la topología étale en la categoría de esquemas.

Definición 2.32. Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo de esquemas, diremos que es un **morfismo étale** si es un morfismo liso y $\Omega_{X/Y} = 0$.

La noción de recubrimiento étale de un esquema es análoga a la de recubrimiento de Zariski, con la salvedad de que en lugar de considerar inmersiones abiertas se consideran morfismos étale: Un **recubrimiento étale** de un esquema X es una familia de morfismos étale $f_i : X_i \rightarrow X$ tales que $X = \bigcup f_i(X_i)$. Al igual que en la Definición 2.27 se puede establecer la noción de haz para la topología étale reemplazando los recubrimientos por abiertos por recubrimientos étale.

Obsérvese además que las inmersiones abiertas son morfismos étale por ser localmente isomorfismos, luego todo recubrimiento de Zariski es un recubrimiento étale.

2.2.1. Ejemplo: funtores y esquemas de Hilbert

Otros problemas de módulos en la categoría de esquemas son los que consisten en parametrizar los subesquemas cerrados de un S -esquema (cuasi-)proyectivo, cuando S es un esquema noetheriano. Grothendieck demostró que estos problemas de módulos tienen espacios de módulos fino y a partir de estos se pueden construir distintos espacios de módulos, siendo uno ellos el espacio de módulos grosero de curvas de género $g \geq 2$.

En general, sea S un esquema y X un S -esquema, definimos

$$\text{Hilb}(X/S) := \{Z \subseteq X \text{ subesquemas cerrados tales que } Z \rightarrow S \text{ es propio, plano y de presentación finita}\}$$

El **functor de Hilbert** de X sobre S , $\mathbf{Hilb}_{X/S} : \mathbf{Sch}_S^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$, se define como

$$\mathbf{Hilb}_{X/S}(T) := \mathbf{Hilb}(X \times_S T/T)$$

y dado $T \rightarrow T'$ el morfismo $\mathbf{Hilb}(X \times_S T'/T') \rightarrow \mathbf{Hilb}(X \times_S T/T)$ se define como el inducido por el cambio de esquema base dado por el producto fibrado $- \times_{T'} T$ que claramente es functorial.

Si S es un esquema noetheriano y $f : X \rightarrow S$ es un morfismo (cuasi-)proyectivo, se verifica que el functor $\mathbf{Hilb}_{X/S}$ es representable por $\mathbf{Hilb}_{X/S}$ un esquema al que se llama **esquema de Hilbert** y además sus componentes conexas son (cuasi-)proyectivas (ver [13, Teorema 14.139], [3, Capítulo IX] y [25]).

Parametrizamos ahora los subesquemas cerrados de un espacio proyectivo \mathbb{P}_k^n . En el caso de esquemas $f : Z \rightarrow T$ sobre un esquema (localmente) noetheriano, que f sea de tipo finito equivale a que sea de presentación finita. Además como las inmersiones cerradas son morfismos propios y $\mathbb{P}_T^n = \mathbb{P}_k^n \times_k T$ es propio sobre T , tenemos que es equivalente que $Z \subset \mathbb{P}_k^n \times_k T$ sea un subesquema cerrado a decir que Z es propio sobre T . De esta manera la notación $Z \subset \mathbb{P}_k^n \times_k T$ para un subesquema cerrado y plano sobre T , denota abreviadamente que Z es una familia plana de subesquemas cerrados de \mathbb{P}_k^n parametrizada por T . Así, definimos el functor $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n} := \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}_k^n/k}$ como

$$\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}(T) = \{\text{Subesquemas cerrados } Z \subset \mathbb{P}_k^n \times_k T \text{ planos sobre } T\}.$$

Si $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}$ representa ese functor, hay un subesquema $U \subset \mathbb{P}_k^n \times_k \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}$ plano sobre $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}$ que es universal en el sentido de que cualquier otro esquema $Z \subset \mathbb{P}_k^n \times_k T$ plano sobre T es de la forma $Z = (\text{Id}_{\mathbb{P}_k^n} \times \alpha)^*(U)$ para un único $\alpha : T \rightarrow \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}$.

$$\begin{array}{ccccc} Z = (\text{Id}_{\mathbb{P}_k^n} \times \alpha)^*(U) & \xrightarrow{\quad} & U & \subset & \mathbb{P}_k^n \times_k \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n} \\ & \searrow & \downarrow \text{Id}_{\mathbb{P}_k^n} \times \alpha & & \downarrow \\ & & \mathbb{P}_k^n \times_k T & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}_k^n \times_k \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n} \\ & \swarrow & \downarrow \alpha & & \swarrow \\ T & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n} & & \end{array}$$

A la hora de probar la representabilidad de $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}$ se utiliza que dado $Z \subset \mathbb{P}_k^n \times_k T$ plano sobre T para todo $t \in T$ sea $Z_t \subset \mathbb{P}^n \times \text{Spec } \kappa(t)$, cada Z_t tiene polinomio de Hilbert $P_{Z_t}(m) = \chi(Z_t, \mathcal{O}_{Z_t}(m))$ y fijado un polinomio $P(m) \in \mathbb{Q}[m]$ se demuestra que el functor

$$\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(T) = \{\text{Subesquemas } Z \subseteq X \text{ cerrados tales que } Z \text{ es plano sobre } T \text{ y } Z_t \text{ tiene polinomio de Hilbert } P \text{ para todo } t \in T\}$$

es representable por un esquema $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P$. Los funtores $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P$ son subfuntores de $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}$ y sabemos que en cada componente conexa de un esquema T , por el Corolario 2.16 todos los polinomios P_{Z_t} son iguales, por tanto podemos dar una descomposición del functor

$$\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n} = \bigsqcup_{P(m) \in \mathbb{Q}[m]} \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P.$$

Además tenemos la siguiente descomposición del esquema

$$\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n} = \bigsqcup_{P(m) \in \mathbb{Q}[m]} \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P$$

donde $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P$ es un subconjunto abierto y cerrado de $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^n}$. De hecho, se demuestra primero que cada functor $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P$ es representable. Por tanto, la unión disjunta de estos representantes $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P$ representa $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}$.

Observación 2.33. *Se pueden parametrizar también los divisores de una curva (proyectiva) conexa y lisa tomando un cierto subesquema de un esquema de Hilbert, por ser los divisores subesquemas de dimensión 0 de la curva. Otra posible aplicación es parametrizar, además de subesquemas cerrados $Z \rightarrow S$ de un esquema X , un número finito r de secciones de Z sobre S siendo el representante el producto fibrado de r copias del esquema universal (véase 0.§5.d en [23]).*

2.3. Esquemas en grupos

Vamos a estudiar los objetos con estructura de grupo en la categoría \mathbf{Sch}_S , las propiedades de las acciones de estos grupos en otros S -esquemas y los distintos tipos de cocientes que pueden resultar respecto de una acción.

La motivación es que hay problemas de móduli en los que podemos encontrar algún grupo algebraico cuya acción en un esquema es tal que los puntos de las órbitas se correspondan con clases de equivalencia de elementos de la familia parametrizada por dicho esquema. Si además a partir de ese esquema, haciendo pull-backs podemos obtener las familias parametrizadas por otros esquemas, cabe esperar que el cociente del esquema por este grupo sea la solución a nuestro problema de móduli. Sin embargo, el conjunto de órbitas X/G no tiene por qué tener estructura de esquema. El resultado clave de esta sección será ver que podemos caracterizar ciertos espacios de móduli groseros en términos de un cierto tipo de cociente de un esquema por la acción de un grupo.

Esta sección nos acerca a la Teoría geométrica de invariantes desarrollada en [23], aunque no profundizaremos en el estudio de la estabilidad de los puntos de un esquema en el que actúa un grupo algebraico y los criterios numéricos para determinarla.

Las referencias principales seguidas para elaborar esta sección son [17] y [23].

Definición 2.34. *Sea S un esquema cualquiera. Un **esquema en grupos** (G, m, i, e) es un S -esquema $G \rightarrow S$ dotado de tres morfismos de S -esquemas: multiplicación $m : G \times_S G \rightarrow G$, inverso $i : G \rightarrow G$ y unidad $e : S \rightarrow G$ tales que los siguiente diagramas conmutan:*

- *asociatividad*

$$\begin{array}{ccc} G \times_S G \times_S G & \xrightarrow{m \times \text{Id}_G} & G \times_S G \\ \text{Id}_G \times m \downarrow & & \downarrow m \\ G \times_S G & \xrightarrow{m} & G \end{array}$$

- *paso al inverso*

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{(i, \text{Id}_G)} & G \times_S G & \xleftarrow{(\text{Id}_G, i)} & G \\ \downarrow & & \downarrow m & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{e} & G & \xleftarrow{e} & S \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \text{elemento neutro} & S \times_S G & \xrightarrow{e \times \text{Id}_G} & G \times_S G & \xleftarrow{\text{Id}_G \times e} & G \times_S S \\ & & \searrow \simeq & & \downarrow m & & \swarrow \simeq \\ & & & & G & & \end{array}$$

Dados dos S -esquemas en grupos, un morfismo de S -esquemas $f : (G, m_G) \rightarrow (H, m_H)$ es un **morfismo de esquemas grupos** si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{f \times f} & H \times H \\ m_G \downarrow & & \downarrow m_H \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array}$$

Solo estamos requiriendo la compatibilidad del morfismo de esquemas con la multiplicación de los esquemas en grupos, ya que de esta se deduce las de los morfismos de tomar inversas y elemento neutro.

Dado un S -esquema en grupos G un subesquema cerrado $H \subseteq G$ es un esquema **subgrupo** si H es un esquema en grupos y la inmersión cerrada $H \rightarrow G$ es un morfismo de esquemas en grupos. El **núcleo** de un morfismo $f : G \rightarrow H$ de S -esquemas en grupos se define como $\ker f = G \times_H S$ donde consideramos el morfismo $e : S \rightarrow H$. Llamaremos **cociente algebraico** a un morfismo $f : G \rightarrow G'$ de S -esquemas en grupos que sea plano y epiyectivo.

Observación 2.35. *Dar un esquema en grupos G es lo mismo que decir el functor de puntos $G^\bullet : \mathbf{Sch}_S^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$ factoriza a través del functor de olvido $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Sets}$. De este modo, dados dos S -esquemas en grupos G y H , un morfismo $G \rightarrow H$ es un morfismo de S -esquemas en grupos si para todo S -esquema T la aplicación $G^\bullet(T) \rightarrow H^\bullet(T)$ es un morfismo de grupos.*

Definición 2.36. *Se llama **grupo algebraico** a un $G \in \mathbf{Sch}_k$ que sea esquema en grupos. Se llama **grupo algebraico afín** a un grupo algebraico que es esquema afín.*

Nótese que si (G, m, i, e) es un grupo algebraico afín y $\mathcal{O}_G(G)$ es la k -álgebra de funciones regulares de G , los morfismos m, e, i se corresponden respectivamente con los morfismos de k -álgebras $m^* : \mathcal{O}_G(G) \rightarrow \mathcal{O}_G(G) \otimes_k \mathcal{O}_G(G)$ que sea asociativo, $e^* : \mathcal{O}_G(G) \rightarrow k$ correspondiente al neutro e $i^* : \mathcal{O}_G(G) \rightarrow \mathcal{O}_G(G)$ el paso al inverso, esto induce una estructura de k -álgebra de Hopf en $\mathcal{O}_G(G)$ (véase [22, Capítulo 1]).

Ejemplo 2.37. Algunos grupos algebraicos que consideraremos son:

- El grupo aditivo $\mathbb{G}_a = \text{Spec } k[x]$ donde $m^*(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ y en general para cualquier k -álgebra A se considera $\mathbb{G}_a(A) \equiv (A, +)$. El grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m = \text{Spec } k[x, x^{-1}]$ con $m^*(x) = x \otimes x$ y en general para cualquier k -álgebra A se considera $\mathbb{G}_m(A) \equiv (A^\times, \cdot)$.
- Dado G un grupo finito, considerando $k[G] = \bigoplus_{g \in G} k$ el álgebra envolvente de G con la suma de G y el producto de convolución, podemos definir de modo natural el grupo algebraico $\mathbf{G} := \text{Spec}(k[G])$.

- Se define el grupo lineal GL_n como $GL_n(T) := GL_n(\Gamma(T, \mathcal{O}_T))$ el grupo de matrices $n \times n$ invertibles sobre $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$. El esquema que representa el functor GL_n es $GL_n := \text{Spec } k[x_{1,1}, \dots, x_{i,j}, \dots, x_{n,n}]_{(\det)}$ donde $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y el determinante es $\det = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{n,\sigma(n)}$. La estructura de grupo algebraico es la determinada por $m^*(x_{i,j}) = \sum_{k=1}^n x_{i,k} \otimes x_{k,j}$. Dado un k -espacio vectorial de dimensión finita V , se define para cada k -álgebra A el grupo $GL(V)(A) = \text{Aut}_k(V \otimes_k A)$ y se tiene que $GL(V)$ es isomorfo a $GL_{\dim V}$.
- Se llama **grupo algebraico lineal** a un subgrupo de GL_n definido por ecuaciones polinómicas. Se demuestra que un grupo algebraico es lineal si y solo si es afín.
- Definimos el **grupo lineal proyectivo** $PGL_n := \text{Proj } k[x_{0,0}, \dots, x_{i,j}, \dots, x_{n,n}]_{(\det)}$ donde $i, j \in \{0, \dots, n\}$ y el determinante es $\det = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \text{sgn}(\sigma) x_{0,\sigma(0)} \cdots x_{n,\sigma(n)}$.

Sea G un S -esquema en grupos y X un S -esquema, un morfismo $\sigma \times_S X \rightarrow X$ de S -esquemas se llama **acción** de G en X si para todo T S -esquema, la aplicación $\sigma(T) : G^\bullet(T) \times X^\bullet(T) \rightarrow X^\bullet(T)$ es una acción del grupo $G^\bullet(T)$ en el conjunto $X^\bullet(T)$. La siguiente definición equivalente de acción para grupos algebraicos afines será la que utilizaremos en adelante por resultar más operativa.

Definición 2.38. Se llama **acción algebraica de un grupo algebraico afín** G en un esquema X es un morfismo de esquemas $\sigma : G \times X \rightarrow X$ tal que los siguiente diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} X \times \text{Spec } k & \xrightarrow{e \times \text{Id}_X} & G \times X \\ & \searrow \simeq & \downarrow \sigma \\ & & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G \times G \times X & \xrightarrow{\text{Id}_G \times \sigma} & G \times X \\ m_G \times \text{Id}_X \downarrow & & \downarrow \sigma \\ G \times X & \xrightarrow{\sigma} & X \end{array}$$

Se llama **acción trivial** de G en un esquema X a la acción $\sigma = \pi_X : G \times X \rightarrow X$ dada por la proyección en el segundo factor.

Dado un grupo algebraico afín G y dos esquemas (X, σ_X) , (Y, σ_Y) en los que actúa G , se dice que un morfismo de esquemas $f : X \rightarrow Y$ es **G -equivariante** si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\text{Id}_G \times f} & G \times Y \\ \sigma_X \downarrow & & \downarrow \sigma_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (g, x) & \longmapsto & (g, f(x)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ g \cdot x & \longmapsto & f(g \cdot x) = g \cdot f(x) \end{array}$$

Si en Y actúa G trivialmente diremos que f es un morfismo **G -invariante**, es decir, si f verifica que $f(g \cdot x) = f(x)$ para todo $x \in X$ y todo $g \in G$.

Como antes, dado un grupo algebraico afín (G, m, i, e) podemos definir una **acción dual** en V un k -espacio vectorial (resp. A una k -álgebra) como un morfismo

$$\sigma^* : V \longrightarrow \mathcal{O}_G(G) \otimes_k V$$

de k -espacios vectoriales (resp. $\sigma^* : A \longrightarrow \mathcal{O}_G(G) \otimes_k A$ de k -álgebra) tal que es compatible con los morfismos m^* , i^* y e^* del modo obvio.

Ejemplo 2.39. Cuando G es un grupo algebraico afín y σ una acción de G en X un esquema afín, define una acción dual $\sigma^* : \mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_G(G) \otimes_k \mathcal{O}_X(X)$. Asimismo, σ^* induce un morfismo $G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{O}_X(X))$ donde $g \in G$ se corresponde con el morfismo dado por $f \mapsto \sum h_i(g)f_i \in \mathcal{O}_X(X)$ siendo $\sigma^*(f) = \sum h_i \otimes f_i$ donde $\{h_i\}$ son una base de $\mathcal{O}_G(G)$ (lo cual tiene sentido porque G es un esquema de tipo finito sobre k) y $\{f_i\}$ es un número finito de elementos no nulos de $\mathcal{O}_X(X)$.

Definición 2.40. Sea G un grupo algebraico afín que actúa en un esquema X con $\sigma : G \times X \rightarrow X$ y sea $x : \text{Spec } k \rightarrow X$. Esto induce un morfismo $\sigma(-, x) : G \times_k \text{Spec } k \rightarrow X$ definido como $\sigma(-, x) = \sigma \circ (\text{Id}_G \times x)$. Llamamos **órbita de x** a $G \cdot x = \text{Im } \sigma(-, x)$ y **estabilizador de x** a $G_x = G \times_X \text{Spec } k$ donde consideramos

$$\begin{array}{ccc} G_x = G \times_X \text{Spec } k & \longrightarrow & \text{Spec } k \\ \downarrow & & \downarrow x \\ G & \xrightarrow{\sigma(-, x)} & X \end{array}$$

Se dice que la acción de G un grupo algebraico afín en un esquema X es **cerrada** si todas las G -órbitas son cerradas.

Observación 2.41. En general, para $f : T \rightarrow X$ un punto de X con valores en T se considera $\sigma(-, T) = (\sigma \circ (\text{Id}_G \times f))$ y $\Sigma(-, T) = (\sigma(-, T), \pi_2) : G \times_k T \rightarrow X \times_k T$. Se define la **órbita de T** como $G \cdot T = \text{Im } \Sigma(-, T)$ y el **estabilizador G_T** como el producto fibrado

$$\begin{array}{ccc} G_T & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow f \\ G \times_k T & \xrightarrow{\Sigma(-, T)} & X \times_k T \end{array}$$

El siguiente resultado nos habla de cómo son las órbitas y sus fronteras.

Proposición 2.42. [17, Sección 3.3] Sea G un grupo algebraico afín que actúa sobre un esquema X :

- (1) para cualquier $x \in X^\bullet(k)$, el estabilizador $G_x \subseteq G$ es un subesquema cerrado y es subgrupo.
- (2) La órbita de cada punto cerrado es un subconjunto localmente cerrado de X y por tanto podemos identificarla con el correspondiente subesquema localmente cerrado y reducido.
- (3) La frontera de una órbita $\overline{G \cdot x} - G \cdot x$ es una unión de órbitas de dimensión estrictamente menor. En particular, el cierre de cada órbita contiene una órbita cerrada.
- (4) Sea $x \in X^\bullet(k)$ cualquiera, entonces $\dim(G) = \dim(G_x) + \dim(G \cdot x)$

2.3.1. Cocientes por la acción de un grupo algebraico afín

Sea G un grupo algebraico afín.

Si G actúa en un esquema X cualquiera, el conjunto de órbitas $X/G = \{G \cdot x : x \in X\}$ dotado de la topología cociente con $p : X \rightarrow X/G$ el morfismo de paso al cociente no siempre puede ser dotado de una estructura de esquema.

Definición 2.43. Sea X un esquema y σ una acción de G en X , un morfismo de esquemas $\phi : X \rightarrow Y$ se dice que es un **cociente categorial** si es un morfismo G -invariante y cualquier otro morfismo G -invariante $f : X \rightarrow Z$ factoriza de modo único por ϕ .

Si además la antiimagen por ϕ de cada k -punto de Y es una única órbita se dice que es un **espacio de órbitas**.

Una condición necesaria para que $\phi : X \rightarrow Y$ sea un espacio de órbitas es que la acción de G en X sea cerrada porque al ser ϕ constante en las órbitas, también lo es en sus cierres.

Ejemplo 2.44. La acción de \mathbb{G}_m en \mathbb{A}_k^n para $n \geq 2$ dada por $\lambda \cdot (a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$ tiene dos tipos de órbitas: el origen y las rectas que pasan origen sin el punto $(0, \dots, 0)$. En este caso, todas las órbitas contienen al origen en su cierre y el origen es la única órbita cerrada, por tanto toda función constante en las órbitas es constante. Por tanto el cociente categorial existe y es un punto pero no hay espacio de órbitas para esta acción, (en particular, no podemos dotar de estructura de esquema a $\mathbb{A}_k^n/\mathbb{G}_m$).

Ejemplo 2.45. Sea $X = \text{Spec } A$ un k -esquema afín (donde A es un anillo noetheriano) y G un grupo finito que actúa en X por automorfismos de X . Tomando $X/G = \text{Spec } A^G$ y el haz de anillos \mathcal{O}_X^G definido como $\mathcal{O}_X^G(U) = \mathcal{O}_X(p^{-1}(U))^G$ el conjunto de invariantes por la acción de G en $\mathcal{O}_X(X)$ dada por $g \cdot f(x) = f(g^{-1} \cdot x)$, entonces $(X/G, \mathcal{O}_X^G)$ es un cociente de X (ver [13, Proposición 12.27]).

Observemos que si $G = \{g_0 = 1, g_1, \dots, g_r\}$, el morfismo, inducido por la inclusión natural $A^G \hookrightarrow A$, $\pi : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } A^G$ manda cada órbita a un punto. Dado un punto $\mathfrak{p}_x \in X = \text{Spec } A$, su órbita es $G \cdot \mathfrak{p}_x = \{\mathfrak{p}_x, g_1 \cdot \mathfrak{p}_x, \dots, g_r \cdot \mathfrak{p}_x\}$ y su imagen es $\pi(G \cdot \mathfrak{p}_x) = \{\mathfrak{p}_x \cap A^G, g_1 \cdot \mathfrak{p}_x \cap A^G, \dots, g_r \cdot \mathfrak{p}_x \cap A^G\}$. Como $\mathfrak{p}_x \cap A^G = g_i \cdot (\mathfrak{p}_x \cap A^G) = g_i \cdot \mathfrak{p}_x \cap g_i \cdot A^G = g_i \cdot \mathfrak{p}_x \cap A^G$ para $i = 1, \dots, r$, se deduce que $\pi(G \cdot \mathfrak{p}_x)$ es un único punto.

Por otra parte, las fibras son de la forma $\pi^{-1}(x) = \text{Spec}(A \otimes_k \kappa(x))$ y como en $A \otimes_k \kappa(x)$ actúa G vía A , $A^G \hookrightarrow A$ es un morfismo entero y A es noetheriano, se deduce que $A \otimes_k \kappa(x) = A_{x_1} \times \dots \times A_{x_n}$ es producto de anillos locales. Se demuestra que $(A \otimes_k \kappa(x))^G$ es cuerpo, luego $(A \otimes_k \kappa(x))^G = (A_x \times A_{g_1 x} \times \dots \times A_{g_r x})^G$ y se concluye que las órbitas de G son exactamente las fibras de π .

En el caso general se prueba el siguiente resultado:

Teorema 2.46. [14, Proposition 1.8, Exposé V] Sea X un esquema cualquiera y G un grupo finito que actúa en X , una condición necesaria y suficiente para que exista el esquema cociente X/G es que la órbita de cada punto de X esté contenida en algún abierto afín de X .

Sabemos que la acción de G en un esquema X induce una acción en cada $\mathcal{O}_X(U)$ si U es G -invariante, lo que nos permite describir otros cocientes que tienen un “comportamiento geométrico” que para nosotros será conveniente.

Definición 2.47. Un morfismo $\phi : X \rightarrow Y$ es un **buen cociente** de una acción de G en X si

- ϕ es G -invariante, epiyectivo y afín.
- Si $U \subset Y$ es abierto, el morfismo $\mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(\phi^{-1}(U))^G$ es un isomorfismo

- Si W_1 y W_2 son dos cerrados G -invariantes de X disjuntos entonces sus imágenes $\phi(W_1)$ y $\phi(W_2)$ son cerrados disjuntos en Y .

Se llama **cociente geométrico** a un buen cociente tal que $\phi^{-1}(y)$ es una única órbita para cualquier $y \in Y$.

Todo buen cociente es un cociente categorial (ver [17, Proposición 3.30], [23, Proposición 0.1]) y se deduce que un buen cociente es un cociente categorial si y solo si es un espacio de órbitas. El siguiente resultado es una consecuencia sencilla de que un buen cociente separe cerrados G -invariantes disjuntos, y afirma que un buen cociente separa órbitas además de darnos una caracterización de los cocientes geométricos:

Proposición 2.48. [17, Corolario 3.32] Sea G un grupo algebraico afín que actúa en un esquema X y $\phi : X \rightarrow Y$ es un buen cociente, entonces

- $\overline{G \cdot x_1} \cap \overline{G \cdot x_2}$ si y solo si $\phi(x_1) = \phi(x_2)$
- Para cada $y \in Y$, $\phi^{-1}(y)$ contiene una única órbita cerrada.

En particular, un buen cociente es un cociente geométrico si y solo si la acción de G es cerrada.

Observación 2.49. Las definiciones de buen cociente y cociente geométrico son locales en la imagen en el sentido de que si $\phi : X \rightarrow Y$ es un buen cociente (resp. cociente geométrico), para cualquier abierto $V \subset Y$ la restricción $\phi|_{\phi^{-1}(V)} : \phi^{-1}(V) \rightarrow V$ es un buen cociente (resp. cociente geométrico).

Para que $\phi : X \rightarrow Y$ un morfismo G -invariante sea un buen cociente (resp. cociente geométrico), basta que para algún recubrimiento $\{V_i\}$ por abiertos de Y cada $\phi|_{\phi^{-1}(V_i)}$ sea un buen cociente (resp. cociente geométrico).

2.3.2. Espacio de módulos grosero como espacio de órbitas

Vamos a ver un resultado que más adelante nos permitirá construir espacios de módulos. Bajo ciertas hipótesis, se pueden construir espacios de módulos groseros en la categoría de esquemas como ciertos cocientes por la acción de un grupo.

Sea $(\mathcal{M}, \sim_{\mathcal{M}})$ un problema de módulos parametrizado por la categoría \mathbf{Sch}_k , siendo el punto base $P = \text{Spec } k$, con functor de módulos $\mathcal{F} : \mathbf{Sch}_k^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$.

Definición 2.50. Decimos que una familia parametrizada $\mathfrak{F} \in \text{fam}(S)$ por un cierto S verifica la **propiedad universal local** si para toda familia $F \in \text{fam}(T)$ para cualquier esquema T y para todo punto geométrico $t \in T(k)$ existe un entorno $U \subseteq T$ de t y un morfismo $f : U \rightarrow S$ tal que $F|_U \sim_U f^* \mathfrak{F}$ como familias parametrizadas por U .

Lema 2.51. Sean $(\mathcal{M}, \sim_{\mathcal{M}})$, \mathcal{F} y $\mathfrak{F} \in \text{fam}(S)$ como antes. Si G es un grupo algebraico que actúa en S de modo que dos k -puntos s, s' están en la misma órbita si y solo si $[\mathfrak{F}_s]_{\mathcal{M}} = [\mathfrak{F}_{s'}]_{\mathcal{M}}$, entonces para todo esquema T hay una correspondencia biyectiva:

$$\text{Nat}(\mathcal{F}, T^{\bullet}) \longleftrightarrow \{\text{Morfismos } G\text{-invariantes } f : S \rightarrow T\}.$$

Demostración. Dada $\eta : \mathcal{F} \rightarrow T^\bullet$, le hacemos corresponder $\eta_S := \eta(S)(\mathfrak{F}) \in T^\bullet(S) = \text{Hom}_k(S, T)$. Sean $s, s' \in S(k) = \text{hom}(\text{Spec } k = P, S)$ y $S^*, (S')^* : \mathcal{F}(S) \rightarrow \mathcal{F}(P)$ los morfismos inducidos. Si s y s' pertenecen a la misma órbita (i.e., existe algún $g \in G$ tal que $s = g \cdot s'$), entonces es $s^*([\mathfrak{F}]_S) = (s')^*([\mathfrak{F}]_S)$, luego $\eta(P)(s^*([\mathfrak{F}]_S)) = \eta(P)((s')^*([\mathfrak{F}]_S)) = t : \text{Spec } k \rightarrow T$ y por tanto $\eta_S(s) = \eta_S(s')$.

Dado un morfismo G -invariante $f : S \rightarrow T$, queremos definir para cada esquema Y y cada familia $F \in \text{fam}(Y)$ un morfismo $\eta(Y) : \mathcal{F}(Y) \rightarrow T^\bullet(Y)$ con $\eta(Y)(F) : Y \rightarrow T$. Recubrimos T por abiertos U_i tales que hay $h_i : U_i \rightarrow S$ con $h_i^* \mathfrak{F} \sim_{U_i} F|_{U_i}$, esto es posible ya que \mathfrak{F} es por hipótesis una familia parametrizada por S que verifica la propiedad universal local. En las intersecciones $U_i \cap U_j$ tenemos que

$$(h_i^* \mathfrak{F})|_{U_i \cap U_j} \sim F|_{U_i \cap U_j} \sim (h_j^* \mathfrak{F})|_{U_i \cap U_j}$$

como familias en $U_i \cap U_j$, luego para $u \in U_i \cap U_j$, las fibras $\mathfrak{F}_{h_i(u)} \sim F_u \sim \mathfrak{F}_{h_j(u)}$ lo que equivale por hipótesis a que $h_i(u), h_j(u) \in S$ están en la misma G -órbita. Por ser f un morfismo G -invariante podemos pegar los morfismos $f \circ h_i$ y definir así $\eta(Y)(F)$. \square

Teorema 2.52. Sean $(\mathcal{M}, \sim_{\mathcal{M}})$, \mathcal{F} , $\mathfrak{F} \in \text{fam}(S)$ y G como en el Lema 2.51,

- (1) Todo espacio móduli grosero para \mathcal{M} es un cociente categorial de S por la acción de G
- (2) Un cociente categorial de la G -acción en S es un espacio de móduli grosero para \mathcal{M} si y solo si es un espacio de órbitas.

Demostración. Para ver (1), sea $(M, \xi : \mathcal{F} \rightarrow M^\bullet)$ el espacio de móduli grosero para \mathcal{M} . Por el Lema 2.51 tenemos una correspondencia biyectiva

$$\text{Nat}(\mathcal{F}, M^\bullet) \longleftrightarrow \{\text{Morfismos } G\text{-invariantes } f : S \rightarrow M\}.$$

En particular, ξ se corresponde con el morfismo G -invariante $\xi_S := \chi(S)(\mathfrak{F}) : S \rightarrow M$. Como (M, ξ) es una pareja inicial para \mathcal{F} , todo morfismo $\eta : \mathcal{F} \rightarrow T^\bullet$ factoriza por ξ , por tanto todos los morfismos G -invariantes $f : S \rightarrow T$ factorizan por ξ_S y concluimos que M es un cociente categorial de S por la acción de G .

Para ver (2), notemos que acabamos de probar que los cocientes categoriales de S por la acción de G se corresponden biyectivamente con las parejas iniciales (M, ξ) para el functor \mathcal{F} . Un cociente categorial $\xi(S)(\mathfrak{F}) : S \rightarrow M$ es un espacio de órbitas si y solo si $\xi(\text{Spec } k) : S(k) \rightarrow M(k)$ es biyectivo con lo que acabamos. \square

Capítulo 3

Móduli de curvas algebraicas

Estudiaremos a continuación los espacios de móduli de curvas lisas de un género g dado. Una vez planteados estos problemas de móduli, \mathcal{M}_g , veremos que la existencia de curvas con automorfismos no triviales supone una obstrucción para la existencia de espacios de móduli fino.

Trataremos por separado las construcciones de los espacios de móduli de curvas lisas de géneros $g = 0$, $g = 1$ y $g \geq 2$ y además presentaremos una de las rigidificaciones más habituales para estos problemas de móduli, que consiste en parametrizar curvas añadiendo la información de ciertos puntos que se consideran marcados. El hecho de marcar puntos hace que el número de automorfismos que tienen una curva marcada disminuya, lo que, como veremos, hace posible en ciertos casos obtener espacios de móduli fino. No obstante, en este capítulo solo estudiaremos los problemas $\mathcal{M}_{0,n}$ de curvas de género 0 con n puntos marcados y $\mathcal{M}_{1,1}$ de curvas de género 1 con un punto marcado, mientras que los demás problemas de móduli $\mathcal{M}_{g,n}$ de curvas lisas con puntos marcados se estudiarán en el Capítulo 4. Es más, en dicho capítulo veremos que el hecho de poder garantizar para ciertos $g, n \geq 0$ que todas las curvas lisas de género g y n puntos marcados tienen un número finito de automorfismos no triviales hace que podamos generalizar sensiblemente los problemas de móduli \mathcal{M}_g y $\mathcal{M}_{g,n}$ y obtener espacios de móduli con mejores propiedades geométricas.

En este capítulo llamaremos **curva** a una curva propia, no singular e irreducible sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado. El resto de convenciones y notaciones serán las ya establecidas en el Capítulo 2.

3.1. Problema y functor de móduli

El problema de móduli que vamos a estudiar son los dado por los conjuntos

$$\mathcal{M}_g := \{\text{curvas (sobre } k \text{ no singulares, irreducibles) de género } g\}$$

para cada entero $g \geq 0$ y dos de tales curvas serán equivalentes $C \sim_{\mathcal{M}_g} C'$ cuando sean isomorfas. Tomaremos como categoría parámetro \mathbf{Sch}_k y como punto base $P = \text{Spec } k$, es decir, el conjunto subyacente de un k -esquema X será el conjunto de sus puntos geométricos con valores en k , que por ser k algebraicamente cerrado coincide con los puntos cerrados de X . A partir de ahora llamaremos puntos geométricos a los puntos geométricos

con valores en k .

Recordemos que un morfismo de esquemas $f : X \rightarrow Y$ es **liso** cuando para todo punto $x \in X$ existen entornos abiertos afines $x \in U$ y $f(x) \in V = \text{Spec } A$ tales que $f(U) \subseteq V$ y hay una inmersión abierta $U \rightarrow \text{Spec } A[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_r)$ tal que la matriz Jacobiana $J(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}(x) \right)$ tiene rango r . Además los morfismos lisos son estables por cambio de base y un morfismo liso es plano, localmente finito presentado y universalmente abierto.

Definición 3.1. Una **familia de curvas parametrizadas por S** es un morfismo propio y liso $\pi : X \rightarrow S$ cuyas fibras en los puntos geométricos de S son curvas, i.e., para todo $s \in S$ cerrado, $X_s = X \times_S \text{Spec } \kappa(s)$ es una curva sobre $\kappa(s) = k$.

Llamaremos **curva en una familia** $\pi : X \rightarrow S$ de curvas parametrizadas por S a una fibra de π en un punto cerrado de S .

El functor de familias parametrizadas $fam_g : \mathbf{Sch}_k^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$ es el definido por

$$fam_g(S) := \{ \pi : X \rightarrow S \text{ familias de curvas de género } g \text{ parametrizadas por } S \}$$

y si $X \in fam_g(S)$ y $f : S' \rightarrow S$ morfismo de esquemas, entonces $f^*X = X \times_S S' \in fam_g(S')$. Dos familias $X, X' \in fam_g(S)$ son equivalentes sobre S , $X \sim_S X'$, cuando exista $X \xrightarrow{\sim} X'$ isomorfismo de S -esquemas y si $f : S' \rightarrow S$ morfismo de esquemas y $X \sim_S X'$, entonces es claro que $f^*X \sim_{S'} f^*X'$.

Denotamos por \mathcal{F}_g al functor de módulos asociado al problema de módulos \mathcal{M}_g :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_g : \mathbf{Sch}_k^{op} &\longrightarrow \mathbf{Sets} \\ S &\longmapsto \{ \text{familias de curvas de género } g \text{ parametrizadas por } S \} / \sim_S \\ f : S' \rightarrow S &\longmapsto f^* : \mathcal{F}_g(S) \rightarrow \mathcal{F}_g(S') \text{ con } [X]_S \mapsto [f^*X]_{S'} = [X \times_S S']_{S'} \end{aligned}$$

que claramente está bien definido por lo visto antes.

3.2. No existencia de espacio de módulos fino

Dado \mathcal{M}_g un problema de módulos como antes con functor de módulos $\mathcal{F}_g : \mathbf{Sch}_k^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$ diremos que una familia parametrizada $X \rightarrow S$ es

- **trivial** cuando $\pi : X \rightarrow S$ es de la forma $\pi_2 : C \times S \rightarrow S$ para algún $C \in \mathcal{M}_g$, es decir, si se obtiene cambiando de base una curva $C \rightarrow \text{Spec } k$ vía un morfismo $S \rightarrow \text{Spec } k$.
- **trivial en fibra** cuando sus fibras X_s son isomorfas para todos los puntos cerrados $s \in S$. En tal caso para todo punto cerrado $s \in S$, $X_s \simeq C$ con $C \in \mathcal{M}_g$ y diremos que es trivial en fibra de tipo C .

Se ve fácilmente, [16, Observación 23.1.1], que si existiese M_g espacio de módulos fino para \mathcal{M}_g , entonces toda familia trivial en fibra sería trivial. Si (M_g, ξ) es el espacio de módulos fino para un functor de módulos \mathcal{F}_g y $\pi : X \rightarrow S$ es una familia trivial en fibra,

$\xi(S) : \mathcal{F}_g(S) \rightarrow \text{Hom}_k(S, M)$ manda $\pi : X \rightarrow S$ a un $f : S \rightarrow M_g$ y $f(S(k)) = m \in M_g(k)$. Denotando $U_g \in \mathcal{F}_g(M_g)$ la clase de la familia universal, tomamos un representante de esta clase $C_g \rightarrow M_g$ como familia universal y tenemos que $m^*C_g \rightarrow P = \text{Spec } k$ es una familia parametrizada por P , es decir, $m^*C_g \in \mathcal{M}_g$. Como M_g es el espacio de móduli fino, $X \in \text{fam}_g(S)$ se obtiene haciendo un pull-back de la curva $m^*C_g \in \text{fam}_g(P)$ vía el morfismo de estructura $S \rightarrow P$, luego $X = m^*C_g \times S \in \text{fam}_g(S)$ es trivial.

Vamos a ver que los problemas de móduli \mathcal{M}_g tienen familias no triviales que son triviales en fibra, de donde deducimos que no existen espacios de móduli fino. Este resultado es consecuencia de que hay curvas que tienen automorfismos no triviales.

Proposición 3.2. [26, Ejemplo 2.6.13] *Sea C una curva tal que existe un subgrupo finito no trivial $G \subset \text{Aut}(C)$. Existe una familia no trivial, trivial en fibra de fibra tipo C .*

Demostración. Sea S' un k -esquema cuasi-proyectivo (e.j.: S' afín) y supongamos que G actúa libremente en S' , es decir, los estabilizadores G_x son triviales para todo $x \in S'$. Consideramos la familia trivial $\pi'_2 : C \times S' \rightarrow S'$ tomando que G actúa en $C \times S'$ componente a componente, luego dicha acción es libre. Sea $S = S'/G$ el esquema cociente (que existe porque al ser S' cuasi-proyectivo todo conjunto finito de puntos está contenido en algún abierto afín y podemos aplicar el Teorema 2.46) y $X = (C \times S')/G$ es también esquema. Como la proyección $\pi'_2 : C \times S' \rightarrow S'$ es G -equivariante, manda la G -órbita de $(c, s) \in C \times S'$ a la G -órbita de $\pi'_2(c, s) \in S'$ y pasando al cociente induce un morfismo $\pi : X \rightarrow S$ de manera que

$$\begin{array}{ccc} C \times S' & \longrightarrow & X = (C \times S')/G \\ \pi'_2 \downarrow & & \downarrow \pi \\ S' & \longrightarrow & S = S'/G \end{array}$$

conmuta donde las flechas horizontales son los morfismos de paso al cociente. Además las fibras de π sobre los puntos cerrados de S son isomorfas a C y π es plano, o sea, tenemos una familia trivial en fibra de fibra tipo C . Sin embargo, la familia $\pi : X \rightarrow S$ no es trivial, puesto que si lo fuese, por la conmutatividad del diagrama anterior, la acción de G tendría que ser trivial en C llegando a contradicción. \square

Es conocido que dado $g \geq 0$ existen curvas de género g con un subgrupo finito no trivial de automorfismos, luego los problemas de móduli \mathcal{M}_g **no tienen espacio de móduli fino**.

3.3. Construcción de espacios de móduli

Estudiamos a continuación distintos espacios de móduli de curvas, tratando por separado los casos de género 0,1 y $g \geq 2$. En los dos primeros casos, se hace uso de resultados clásicos de geometría proyectiva para obtener los respectivos espacios de móduli, mientras que cuando el género de las curvas es mayor o igual a 2, obtendremos este espacio de móduli como un cociente de un determinado esquema de Hilbert.

En el caso de curvas racionales, plantearemos una rigidificación del problema explicando cuáles son y como se construyen los espacios de móduli de curvas con un cierto número

de puntos marcados. De hecho, este lenguaje de puntos marcados resultará también ser el necesario para estudiar también el espacio de móduli de curvas de género 1, dado que realmente obtendremos es el espacio de móduli de curvas elípticas, o sea, de curvas de género 1 con un punto marcado, puesto que esto reduce el número de automorfismos.

3.3.1. Curvas de género $g = 0$

Supondremos en esta sección que $\text{car}(k)$ distinta de 2 y 3.

Es sabido que toda curva sobre k completa no singular de género 0 es isomorfa a \mathbb{P}_k^1 , luego el conjunto $\mathcal{M}_0/\sim_{\mathcal{M}_0}$ está formado por un único elemento que es la clase de equivalencia representada por el k -esquema \mathbb{P}_k^1 .

El candidato a ser espacio de móduli grosero para \mathcal{M}_0 es el esquema $M_0 = \text{Spec } k$ formado por un único punto, junto con una cierta transformación natural de funtores $\xi_0 : \mathcal{F}_0 \rightarrow M_0^\bullet$ donde \mathcal{F}_0 es el functor de móduli asociado a \mathcal{M}_0 . Dada una familia $\pi : X \rightarrow S$ de curvas de género 0 parametrizada por un cierto k -esquema S , definimos ξ_0 como aquella transformación que asocia a una tal familia parametrizada por S el morfismo estructural $S \rightarrow \text{Spec } k$ y esta asignación claramente es functorial.

Es obvio que se tiene una biyección

$$\xi_0(\text{Spec } k) : \mathcal{F}_0(\text{Spec } k) \longrightarrow \text{Hom}(\text{Spec } k, \text{Spec } k)$$

ya que ambos conjuntos están formados por un único punto.

Falta ver que dada una transformación natural de funtores $\eta_T : \mathcal{F}_0 \rightarrow T^\bullet$ con T^\bullet el functor de puntos de un k -esquema T cualquiera, η_T factoriza por ξ_0 .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_0 & \xrightarrow{\eta_T} & T^\bullet \\ & \searrow \xi_0 & \nearrow \\ & (\text{Spec } k)^\bullet & \end{array}$$

Dada una familia $\pi : X \rightarrow S$ de curvas de género 0, la fibra X_s en cada punto cerrado $s \in S$ es isomorfa a \mathbb{P}_k^1 , luego por ser η_T una transformación natural de funtores, el morfismo $\eta_T(S)(X) = f_X : S \rightarrow T$ es tal que $f_X(s) = t_0$ es un mismo punto de T para todos los puntos cerrados $s \in S$.

Para ver que η_T factoriza por la morfismo de funtores inducido por t utilizamos:

Lema 3.3. [16, Lema 25.2] *Si A es un anillo artiniiano con cuerpo residual K algebraicamente cerrado, toda familia $X \rightarrow \text{Spec } A$ de curvas de género cero es trivial.*

Puesto que $f_X(s)$ es el mismo punto t_0 para todo punto cerrado $s \in S$, η_T factoriza por un punto no reducido, o sea, por un morfismo $t_A : \text{Spec } A = \{t_0\} \rightarrow T$ con A un anillo de Artin cuyo reducido sea k , por el lema tenemos que la reducción a de la familia $\pi : X \rightarrow S$ a $\text{Spec } A$ es trivial luego η_T factoriza por $\text{Spec } k \rightarrow \text{Spec } A$, con lo que se demuestra que (M_0, ξ_0) es un espacio de móduli grosero para \mathcal{M}_0 . Además es claro que $\mathbb{P}_k^1 \rightarrow \text{Spec } k$ es una familia tautológica para \mathcal{F}_0 (Definición 1.21).

Observación 3.4. *En el caso particular del Lema 3.3 que necesitamos para la demostración, A es una k -álgebra local artiniana y tenemos $k \hookrightarrow A \rightarrow A/J(A) = \Sigma \rightarrow 0$ y deducimos que $X \simeq \mathbb{P}_k^1 \times_k \text{Spec } A$ del diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}_k^1 \times_k \text{Spec } \Sigma & \simeq & X \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } \Sigma & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \mathbb{P}_k^1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{Spec } \Sigma & \longrightarrow & \text{Spec } A & \longrightarrow & \text{Spec } k. \end{array}$$

Como sabemos, $\text{Spec } k$ no es espacio de módulos fino puesto que existen curvas de género 0 con automorfismos no triviales. Además, si lo fuese, todas las familias de curvas de género 0 serían de la forma $\pi_2 : \mathbb{P}_k^1 \times_k S \rightarrow S$, sin embargo esto no es así. Algunos ejemplos de familias no triviales se pueden obtener a partir de **superficies regladas** $Y \rightarrow C$, esto es, familias de curvas de género 0 parametrizadas por alguna curva lisa C . Utilizando que las superficies regladas $\pi : X \rightarrow C$ siempre tienen una sección (véase [15, Nota pág. 369]), se ve que se tiene una correspondencia entre las superficies regladas $\pi : Y \rightarrow C$ y los haces \mathcal{E} localmente libres de rango 2 sobre C :

Proposición 3.5. [15, V Proposición 2.2] *Sea $\pi : Y \rightarrow C$ una superficie reglada. Existe un haz \mathcal{E} localmente libre de rango 2 sobre C tal que Y es C -isomorfo a $\mathbb{P}(\mathcal{E})$. Recíprocamente, la proyectivización de un haz localmente libre de rango 2 sobre C es una superficie reglada sobre C . Además si $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ son dos haces localmente libres de rango 2 sobre C , definen superficies regladas $\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathbb{P}(\mathcal{E}')$ C -isomorfas si y solo si $\mathcal{E} \simeq \mathcal{L} \otimes \mathcal{E}'$ para algún haz de línea \mathcal{L} en C .*

De hecho la superficie reglada trivial sobre C es de la forma $C \times_k \mathbb{P}_k^1 = \mathbb{P}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C)$ y podemos construir otras no triviales (véase [15, V Ejemplo 2.11.4]).

3.3.2. Curvas con n puntos marcados: rigidificación de \mathcal{M}_0

Veremos a continuación una forma de eliminar los automorfismos no triviales que hacen que el problema de módulos anterior no tenga un espacio de módulos fino. Para ello fijaremos un número finito de secciones ordenadas, cumpliendo ciertas propiedades, de manera que responde a la intuición de marcar un número finito de puntos racionales ordenados en las curvas.

En general, dado $\pi : X \rightarrow S$ un morfismo de esquemas, diremos que dos secciones $\sigma_1, \sigma_2 : S \rightarrow X$ de π son **secciones disjuntas** cuando sus imágenes sean disjuntas. Nótese que si además π es una familia de curvas parametrizada por S , para cada $s \in S$ dada σ una sección cualquiera de π , $\sigma(s) \in X_s$ es un punto de la curva determinada por la fibra de la familia π .

Definición 3.6. *Llamaremos **familia de curvas** (de género g) **n -marcadas** a una familia $(X, S, \pi, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ de curvas (de género g) $\pi : X \rightarrow S$ dotada de un conjunto $\{\sigma_i : S \rightarrow X\}_{1 \leq i \leq n}$ de n secciones disjuntas ordenadas.*

Dadas dos familias de curvas n -marcadas parametrizadas por un mismo esquema S $\mathcal{X} = (X, S, \pi, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ y $\mathcal{X}' = (X', S, \pi', \sigma'_1, \dots, \sigma'_n)$, un morfismo de familias de curvas

n -marcadas es un morfismo $f : X \rightarrow X'$ tal que $\pi' \circ f = \pi$ y $f \circ \sigma_i = \sigma'_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Con estas definiciones podemos plantear los problemas de módulos $\mathcal{M}_{g,n}$ dados para cada pareja de enteros no negativo g, n por el conjunto:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{g,n} &= \{ \text{curvas } C \text{ de género } g \text{ y } p_1, \dots, p_n : \text{Spec } k \rightarrow C \text{ secciones disjuntas} \} = \\ &= \{ \text{curvas } C \text{ de género } g \text{ y } p_1, \dots, p_n \in C \text{ puntos cerrados distintos marcados} \} \end{aligned}$$

donde suponemos fijadas las secciones en un cierto orden, y de igual manera en el caso de pensarlos como puntos marcados de la curva.

Dos familias de curvas de género g n -marcadas $(X, S, \pi, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ y $(X', S, \pi', \sigma'_1, \dots, \sigma'_n)$ parametrizadas por el mismo esquema S consideraremos que son $\mathcal{M}_{g,n}$ -equivalentes cuando exista un morfismo de familias de curvas n -marcadas de manera que $f : X \rightarrow X'$ sea isomorfismo.

El functor de familias parametrizadas $fam_{g,n} : \mathbf{Sch}_k^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$ es el definido por

$$fam_{g,n}(S) := \{ \pi : X \rightarrow S \text{ familias de curvas de género } g \text{ y } n \text{ secciones disjuntas de } \pi \}.$$

Dada $\mathcal{X} = (X, S, \pi, \sigma_1, \dots, \sigma_n) \in fam_{g,n}(S)$ y $f : S' \rightarrow S$ morfismo de esquemas, entonces $f^*\mathcal{X} = (X \times_S S', S', \pi_2, f^*\sigma_1, \dots, f^*\sigma_n) \in fam_{g,n}(S')$ donde $f^*\sigma_i = \sigma_i \circ f$. Dos familias $\mathcal{X}, \mathcal{X}' \in fam_{g,n}(S)$ son equivalentes sobre S , $\mathcal{X} \sim_S \mathcal{X}'$, cuando sean familias de curvas marcadas S -isomorfas. Además si $f : S' \rightarrow S$ morfismo de esquemas y $\mathcal{X} \sim_S \mathcal{X}'$, entonces es claro que $f^*\mathcal{X} \sim_{S'} f^*\mathcal{X}'$.

Denotamos por $\mathcal{F}_{g,n}$ al functor de módulos asociado al problema de módulos \mathcal{M}_g :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{g,n} : \mathbf{Sch}_k^{op} &\longrightarrow \mathbf{Sets} \\ S &\longmapsto fam_{g,n}(S) / \sim_S \\ f : S' \rightarrow S &\longmapsto f^* : \mathcal{F}_g(S) \rightarrow \mathcal{F}_g(S') \text{ con } [\mathcal{X}]_S \mapsto [f^*\mathcal{X}]_{S'} \end{aligned}$$

con las notaciones precedentes.

Notación: Las familias de curvas marcadas se denotaran como $(X, S, \pi, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$, mientras que en el caso de curvas, por brevedad, escribiremos (C, p_1, \dots, p_n) puesto que ya suponemos que son esquemas sobre k vía el morfismo estructural.

Espacios de módulos para los problemas $\mathcal{M}_{0,n}$

Sea $\mathcal{M}_{0,n} = \{ \text{curvas } C \text{ de género } g \text{ y } p_1, \dots, p_n : \text{Spec } k \rightarrow C \text{ secciones disjuntas} \}$.

El caso $\mathcal{M}_{0,0}$ ya lo hemos estudiado. Para $n \leq 3$ se tiene que $\mathcal{M}_{0,n}$ ha de ser un punto ya que es conocido que dadas dos conjuntos $(p_1, p_2, p_3), (p'_1, p'_2, p'_3)$ de puntos cerrados distintos en \mathbb{P}_k^1 existe un único automorfismo $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{P}_k^1)$ tal que $\phi(p_i) = p'_i$, luego solo hay una clase de isomorfismos en $\mathcal{M}_{0,n} / \sim_{\mathcal{M}_{0,n}}$ y $\mathcal{M}_{0,n} = \text{Spec } k$ es un espacio de módulos grosero para $n \leq 3$, argumentando de igual manera que en el caso con 0 puntos marcados ya que podemos suponer sin pérdida de generalidad que si hay un punto marcado este es

el punto correspondiente al 0 mediante la identificación de las fibras con \mathbb{P}_k^1 mientras que si hay dos son 0 y 1.

Sin embargo en el caso $n = 3$ encontramos una diferencia notable, ya que el grupo de automorfismos de \mathbb{P}_k^1 con 3 puntos marcados distintos es trivial y vamos a ver que $M_{0,3} = \text{Spec } k$ es un espacio de módulos fino para $\mathcal{M}_{0,3}$. Empezaremos generalizando la Proposición 3.5:

Proposición 3.7. *Sea $\pi : X \rightarrow S$ un morfismo liso, propio, epiyectivo, localmente finito presentado de dimensión relativa ≤ 1 con fibras geométricas isomorfas a \mathbb{P}^1 :*

- (1) *Si π admite una sección σ_1 , entonces existe un haz localmente libre \mathcal{E} en S tal que X es S -isomorfo al fibrado proyectivo $\mathbb{P}(\mathcal{E})$.*
- (2) *Si π admite dos secciones disjuntas σ_1, σ_2 , entonces $\mathcal{E} \simeq \mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}''$ para ciertos haces de línea $\mathcal{L}', \mathcal{L}''$.*
- (3) *Si π admite tres secciones disjuntas $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, entonces podemos tomar $\mathcal{E} = \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S$, por tanto $X \simeq \mathbb{P}_S^1 = \mathbb{P}_k^1 \times_k S$ es trivial.*

Demostración. (1) Como π es un morfismo separado y $\pi \circ \sigma_1 = \text{Id}_S$ es una inmersión cerrada, σ_1 es una inmersión cerrada [13, Observación 9.11]. Se tiene que $D_1 = \sigma_1(S)$ es un divisor de Cartier relativo efectivo en X y denotamos como $\mathcal{O}_X(D_1)$ al haz de línea asociado a D_1 en X .

Veamos que $\mathcal{E} = \pi_* \mathcal{O}_X(D_1)$ es un haz localmente libre de rango 2. Dado $s \in S$, el morfismo $\kappa(s) \rightarrow \overline{\kappa(s)}$ de paso al cierre algebraico es plano y por tanto

$$H^1(X_s, \mathcal{O}_X(D_1)_s) \otimes_{\kappa(s)} \overline{\kappa(s)} = H^1(X_{\bar{s}}, \mathcal{O}_X(D_1)_{\bar{s}}) = H^1(\mathbb{P}_{\kappa(s)}^1, \mathcal{O}(1)) = 0,$$

donde \bar{s} denota que estamos tomando la fibra sobre $\overline{\kappa(s)}$ y se deduce de esto que $H^1(X_s, \mathcal{O}_X(D_1)_s) = 0$. Por el Lema 2.17 \mathcal{E} es localmente libre de rango 2 ya que la fibra en cada punto geométrico cumple que $h^0(X_{\bar{s}}, \mathcal{O}_X(D_1)_{\bar{s}}) = h^0(\mathbb{P}_{\kappa(s)}^1, \mathcal{O}(1)) = 2$.

Después se generaliza la Proposición 3.5: el morfismo natural $\pi^* \mathcal{E} = \pi^* \pi_* \mathcal{O}_X(D_1) \rightarrow \mathcal{O}_X(D_1)$ es epiyectivo por serlo en fibra (utilizando que las fibras geométricas son isomorfas a \mathbb{P}^1 y $\mathcal{O}(D_1)_s$ es un haz de línea de grado 1). Este morfismo por tanto determina un morfismo $h : X \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ que es isomorfismo puesto que $\mathcal{O}_X(D_1)$ es muy amplio en cada fibra, luego h es isomorfismo en fibra y por tanto h es isomorfismo.

- (2) Tenemos que $D_1 = \sigma_1(S)$ y $D_2 = \sigma_2(S)$ son divisores de Cartier efectivos en X y $\mathcal{L}_1 = \mathcal{O}_X(D_1)$, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{O}_X(D_2)$ son los haces de línea asociados. Se tiene por [27, Proposición 28.1.11] que por ser $\mathcal{L}_1^\vee \otimes \mathcal{L}_2$ un haz invertible trivial en fibra, el haz localmente libre de rango 1 $L = \pi_*(\mathcal{L}_1^\vee \otimes \mathcal{L}_2)$ en S es tal que $\mathcal{L}_1^\vee \otimes \mathcal{L}_2 = \pi^* L$ utilizando el [15, III Corolario 12.9] que es consecuencia del teorema de semicontinuidad.

Observemos que $\mathcal{E} := \pi_* \mathcal{L}_1 = \pi_*(\mathcal{L}_2 \otimes \pi^* L^\vee) = \pi_* \mathcal{L}_2 \otimes L^\vee$. Tomando $s_0 \in \Gamma(X, \mathcal{L}_1)$ que se anule en σ_1 y $s_\infty \in \Gamma(X, \mathcal{L}_2)$ que se anule en σ_2 , se define el morfismo de haces localmente libres en S :

$$f : \mathcal{O}_S \oplus L^\vee \longrightarrow \mathcal{E} = L^\vee \otimes \pi_* \mathcal{L}_2$$

como $(a, b) \mapsto a \cdot s_0 + b \cdot s_\infty$, se comprueba que f es isomorfismo de donde se concluye fácilmente utilizando que por ser σ_1, σ_2 secciones disjuntas en cada fibra de π son una base de secciones de \mathcal{L}_1 .

- (3) Como las tres secciones son disjuntas se tiene que $L = \sigma_3^* \pi^* L = \sigma_3^*(\mathcal{L}_1^\vee \otimes \mathcal{L}_2) = \sigma_3^*(\mathcal{O}_X(D_2 - D_1)) = \mathcal{O}_S$, luego por (2) podemos tomar $\mathcal{E} = \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S$. \square

Veamos que $M_{0,3}$ es espacio de módulos fino para $\mathcal{M}_{0,3}$. Cuando $n \geq 3$, si tomamos C una curva de género 0 y $\psi : C \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ un isomorfismo (que sabemos que existe), podemos elegir el representante de la clase de equivalencia en $\mathcal{M}_{0,n}/\sim_{\mathcal{M}_{0,n}}$ de la curva n -marcada (C, p_1, \dots, p_n) como $(\mathbb{P}_k^1, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)$ definiendo $\bar{p}_i = \psi \circ p_i : \text{Spec } k \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ (ya que los automorfismos de \mathbb{P}_k^1 quedan determinados al dar la imagen de 3 puntos distintos) y se tiene que $\text{Aut}(C, p_1, \dots, p_n) = \{\text{Id}\}$.

Igual que antes vamos a denotar

$$\xi_{0,3} : \mathcal{F}_{0,3} \longrightarrow (M_{0,3})^\bullet$$

a la transformación que a una familia parametrizada por S le asigna el morfismo estructural $S \rightarrow \text{Spec } k$.

Ya sabemos que $\xi_{0,3}(\text{Spec } k)$ es una biyección, luego basta demostrar que la familia tautológica $\mathbb{P}_k^1 \rightarrow \text{Spec } k$ que habíamos obtenido antes, marcando 3 puntos distintos, es una familia universal. O sea, tomamos como representante de la clase de equivalencia $\xi_{0,3}(\text{Spec } k)^{-1}(\text{Id})$ en $\mathcal{M}_{0,3}/\sim_{\mathcal{M}_{0,3}}$ a la familia

$$U_3 = (\mathbb{P}_k^1, \text{Spec } k, \pi, 0, 1, \infty)$$

donde $0, 1, \infty$ son las secciones constantes correspondientes dichos puntos de \mathbb{P}_k^1 .

Sea $\mathcal{X}_3 = (X, S, \pi, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ una familia de curvas de género 0 con tres puntos marcados cualquiera y por la Proposición 3.7, $X \simeq \mathbb{P}_k^1 \times_k S$. Como las secciones $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 : S \rightarrow \mathbb{P}_k^1 \times_k S$ son disjuntas, inducen

$$h = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) : S \longrightarrow (\mathbb{P}_k^1)^3 - \Delta_3$$

donde $\Delta_3 = \{(x_i) \in (\mathbb{P}_k^1)^3 : \exists i \neq j \text{ con } x_i = x_j\}$. Se tiene que $(\mathbb{P}_k^1)^3 - \Delta_3 \simeq PGL_2 = \text{Aut}(\mathbb{P}_k^1)$ que identifica cada punto (x_1, x_2, x_3) con el automorfismo que los manda a los puntos $\{0, 1, \infty\}$ respectivamente. Esto nos da un isomorfismo Ψ_3 de \mathcal{X}_3 con $U_3 \times_k S = (\mathbb{P}_k^1 \times_k S, S, \pi_2, 0, 1, \infty)$ donde las secciones son las secciones constantes $0(s) = (0, s)$, $1(s) = (1, s)$ y $\infty(s) = \infty(0, s)$ para cada $s \in S$ teniéndose el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{\Psi_3} & \mathbb{P}_k^1 \times_k S & \longrightarrow & \mathbb{P}_k^1 \\
 \searrow \pi & & \nearrow \pi_2 & & \nearrow \sigma_i \\
 S & \longrightarrow & \text{Spec } k & & \text{Spec } k \\
 \nearrow \sigma_i & & \nearrow \sigma_i & & \nearrow \sigma_i
 \end{array}$$

y claramente U_3 es una familia universal para $\mathcal{M}_{0,3}$.

El primer caso en el que tenemos clases de equivalencias no triviales es $\mathcal{M}_{0,4}/\sim_{\mathcal{M}_{0,4}}$. Observemos que si en \mathbb{P}_k^1 fijamos cuatro puntos distintos (p_1, p_2, p_3, p_4) , podemos suponer que son de la forma $(0, 1, \infty, \Phi(p_4))$ donde $\lambda = \Phi(p_4) \in \mathbb{P}_k^1 - \{0, 1, \infty\}$ donde Φ es el automorfismo tal que $\{p_1, p_2, p_3\} \mapsto \{0, 1, \infty\}$. Vamos a ver que de hecho $M_{0,4} = \mathbb{P}_k^1 - \{0, 1, \infty\}$ es espacio de móduli fino para $\mathcal{M}_{0,4}$.

Dada una familia de curvas $\mathcal{X}_4 = (X, S, \pi, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, argumentando como antes, existe un isomorfismo $\Psi_3 : X \simeq \mathbb{P}^1 \times_k S$ tal que $\mathcal{X}_4 \simeq (\mathbb{P}^1 \times_k S, S, \pi_2, 0, 1, \infty, \Psi_3 \circ \sigma_4)$ donde $P_{S,4} = \Psi_3 \circ \sigma_4$ valora en $\mathbb{P}_k^1 - \{0, 1, \infty\}$ por ser las secciones disjuntas.

Observación 3.8. *La intuición subyacente a la definición del morfismo $P_{S,4}$ es que identifica cada fibra en un punto geométrico s de S con \mathbb{P}_k^1 de manera que las imágenes de las tres primeras secciones sean respectivamente $0, 1, \infty$ y asigna a la cuarta de ellas el punto correspondiente respecto de dicho sistema de referencia. Esta identificación está bien definida ya que la razón doble de cuatro puntos es invariante por automorfismos de la recta proyectiva y como cada fibra X_s es isomorfa a \mathbb{P}_k^1 se deduce que la razón doble es independiente de la elección de tal isomorfismo.*

Definimos ahora el morfismo

$$\xi_{0,4}(S) : \mathcal{F}_{0,4}(S) \longrightarrow \text{Hom}(S, M_{0,4}) = \text{Hom}(S, \mathbb{P}_k^1 - \{0, 1, \infty\})$$

como aquel que manda la clase de equivalencia $[(X, S, \pi, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)]_S$ al morfismo $P_{S,4}$ antes descrito y esta definición no depende del representante de la clase de isomorfismos de la familia considerado. En particular,

$$\xi_{0,4}(\text{Spec } k) : \mathcal{F}_{0,4}(\text{Spec } K) \longrightarrow \text{Hom}(\text{Spec } k, M_{0,4})$$

es tal que manda la clase de equivalencia de una familia $[(\mathbb{P}_k^1, 0, 1, \infty, p_4)]_{\mathcal{M}_{0,4}}$ a la sección $p_4 : \text{Spec } k \rightarrow \mathbb{P}_k^1 - \{0, 1, \infty\} \subset \mathbb{P}_k^1$, luego $\xi_{0,4}(\text{Spec } k)$ es una biyección.

Para ver que $M_{0,4}$ es espacio de móduli fino, basta ver que se tiene una familia universal para este problema de móduli. Esta familia ha de ser un representante de $\xi(M_{0,4})^{-1}(\text{Id})$ y lo tomamos como la familia trivial sobre $M_{0,4}$ de la forma

$$U_4 = (\mathbb{P}_k^1 \times_k M_{0,4}, M_{0,4}, \pi_2, 0, 1, \infty, P_4)$$

donde $0, 1, \infty$ son las secciones constantes y $P_4 : M_{0,4} \rightarrow \mathbb{P}_k^1 \times_k M_{0,4}$ es la sección diagonal $P_4(m) = (m, m)$ para $m \in M_{0,4}$, que se corresponde vía $\xi_{0,4}(M_{0,4})$ con el morfismo identidad en $M_{0,4}$.

Sea $\mathcal{X}_4 = (X, S, \pi, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ una familia de curvas de género 0 con cuatro puntos marcados, definimos el morfismo $\Psi_4 : X \rightarrow U_4 \times_{M_{0,4}} S = (\mathbb{P}_k^1 \times_k M_{0,4}) \times_{M_{0,4}} S$ como

$$\Psi_4 = \left((\Psi_3, P_{S,4}), \pi \right).$$

Por construcción se tiene que $\Psi_4 : \mathcal{X}_4 \rightarrow U_4 \times_k S$ es un isomorfismo de familias de curvas de género 0 con cuatro puntos marcados y por tanto U_4 es una familia universal para $\mathcal{M}_{0,4}$, luego $M_{0,4}$ es espacio de móduli fino para este problema de móduli.

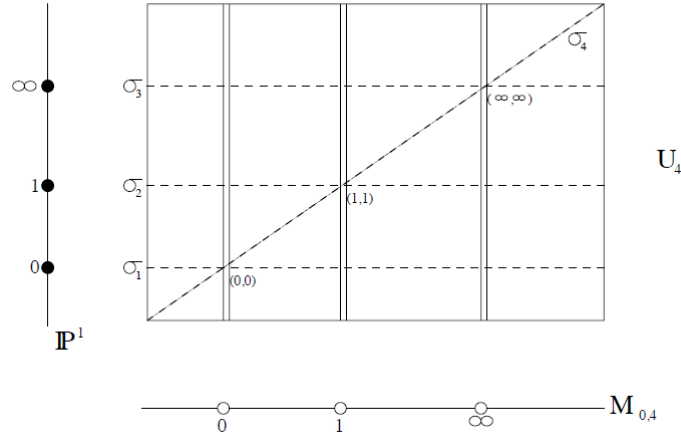


Figura 3.1: Representación gráfica de la familia universal U_4 [7, Figura 1.1]

Observación 3.9. *El espacio de módulos $M_{0,4}$ no es compacto ya que nos faltan tres puntos que se corresponden a los casos en que los puntos marcados en que dos puntos de los cuatro puntos marcados de la curva “se aproximan infinitesimalmente”. En el Ejemplo 4.1 veremos cómo se obtiene una compactificación de $M_{0,4}$ añadiendo los tres puntos que nos faltan de manera que se correspondan con cierto tipo de curvas singulares que aparecen al “deformar” las curvas lisas que estamos parametrizando.*

Observación 3.10. *En el caso de $\mathcal{M}_{0,3}$, la familia universal es $\mathbb{P}_k^1 \rightarrow \text{Spec } k$ y para $\mathcal{M}_{0,4}$ podemos notar que la familia universal descompone como un producto donde \mathbb{P}_k^1 establece cuáles son los tres primeros puntos distintos y $M_{0,4} = \text{Spec } k \times_k (\mathbb{P}_k^1 - \{0, 1, \infty\})$ parametriza las posibilidades restantes para el cuarto punto.*

De modo general, para curvas con n puntos marcados podemos proceder de manera similar, argumentando recursivamente, puesto que tomando como representante de $[(C, x_1, x_2, \dots, x_n)]_{\mathcal{M}_{0,n}}$ la curva n -marcada $(\mathbb{P}_k^1, 0, 1, \infty, \Phi(x_4), \dots, \Phi(x_n))$ donde Φ es el isomorfismo de C con \mathbb{P}_k^1 tal que manda los tres primeros puntos marcados a $\{0, 1, \infty\}$; y dar esta curva marcada equivale a dar $n-3$ puntos cerrados distintos de $M_{0,4} = \mathbb{P}_k^1 - \{0, 1, \infty\}$, o lo que es lo mismo, un punto cerrado de $(M_{0,4})^{n-3} - \Delta_{n-3}$. Se tiene que

$$M_{0,n} = (M_{0,4} \times^{n-3} M_{0,4}) - \Delta_{n-3}$$

con $\Delta_{n-3} = \{(y_i) \in (M_{0,4})^{n-3} : \exists i \neq j \text{ con } y_i = y_j\}$ es el espacio de módulos fino para $\mathcal{M}_{0,n}$ (y estos espacios no son compactos). Análogamente, la familia universal para el problema $\mathcal{M}_{0,n}$ es

$$U_n = (\mathbb{P}_k^1 \times M_{0,n}, M_{0,n}, \pi_2, 0, 1, \infty, P_4, \dots, P_n)$$

tomando P_i para $4 \leq i \leq n$ como las respectivas secciones diagonales disjuntas.

3.3.3. Curvas de género $g = 1$

Supondremos en esta sección que $\text{car}(k)$ distinta de 2 y 3.

Recordemos que si C es una curva de género 1 sobre k , es equivalente dar:

- (1) un morfismo $f : C \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ de grado 2 con 4 puntos de ramificación o
- (2) una inmersión cerrada $\iota : C \rightarrow \mathbb{P}_k^2$ de modo que la imagen es una cúbica lisa.

El morfismo f se obtiene considerando un punto $p \in C$ cualquiera y una función con un polo en p de orden 2, que existe como consecuencia del Teorema de Riemann-Roch. Por el Teorema de Riemann-Hurwitz, este morfismo tiene 4 puntos de ramificación que, aplicando un automorfismo de \mathbb{P}_k^1 , podemos suponer que los puntos de ramificación de f son $\{p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = \infty, p_4 = \lambda\}$. Por otra parte, f se corresponde con una extensión separable de orden 2 entre los cuerpos de fracciones $k(x) \rightarrow \Sigma_C$ y por ser k algebraicamente cerrado se tiene que

$$\Sigma_C = k(x)[y]/y^2+ay+b \simeq k(x)[y]/y^2-x(x-1)(x-\lambda)$$

en un abierto afín $C \cap \mathbb{A}_k^2$ donde $a, b \in k(x)$, $\lambda \in k - \{0, 1\}$ y el isomorfismo consiste realizar diversos cambios de coordenadas de modo que finalmente los puntos de ramificación de f son $\{0, 1, \infty, \lambda\}$, luego tenemos que en \mathbb{P}_k^2 la curva C viene dada por los ceros del polinomio homogéneo $p(x, y, z) = y^2z - x(x - z)(x - \lambda z)$ con $\lambda \in k - \{0, 1\}$.

De forma equivalente se puede ver que dada C una curva de género 1 y $p \in C$ un punto, el divisor $D = 3p$ es muy amplio puesto que $grD = 3 \geq 2g + 1$, luego tenemos $\iota : C \rightarrow \mathbb{P}_k^{h^0(D)-1}$ y por Riemann-Roch $h^0(D) = 3$. Se comprueba sin dificultad que la imagen de g es una curva lisa de grado 3 en \mathbb{P}_k^2 .

Además, toda curva plana $C \subset \mathbb{P}_k^2$ de grado 3 tienen género 1 ya que el dualizante de C es $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C$, luego $g = h^0(\mathcal{O}_C) = 1$.

Observación 3.11. *El polinomio homogéneo $p(x, y, z) = y^2z - x(x - z)(x - \lambda z)$ con $\lambda \in k - \{0, 1\}$ asociado a C equivale a dar $q(x, y, z) = y^2z - 4x^3 + g_2xz^2 + g_3z^3$ con determinante $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ en k . Se conoce a q como forma normal de Weierstrass de C . En ambos casos, los polinomios definen cúbicas planas (lisas) con un único punto en el infinito.*

Nótese que para obtener estas equivalencias hemos elegido un punto de la curva. Se llama **curva elíptica** a una pareja (C, p) formada por C una curva de género 1 y $p \in C(k)$. Podemos suponer que P es el (único) punto del infinito de $C \subset \mathbb{P}_k^2$. Al elegir un punto eliminamos los automorfismos de C que consisten en traslaciones y por este motivo parametrizaremos las curvas elípticas.

El invariante j

Dada (C, p) una curva elíptica, podríamos asignar a C el valor λ antes obtenido, sin embargo esta asignación depende de $f : C \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ y de la elección del sistema de coordenadas obtenido a partir del conjunto cuatro puntos distintos $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ en los que suponemos que ramifica f .

A cada curva elíptica (C, p) le vamos a asociar un valor $j = j(\lambda)$ donde

$$j(\lambda) = 2^8 \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}$$

y vamos a ver que es un invariante de la curva, llamado el **invariante** j , con el que podemos clasificar las curvas elípticas, o sea, dos curvas elípticas tienen el mismo invariante j si y solo si son isomorfas.

Es sabido que la razón doble de cuatro puntos distintos en \mathbb{P}_k^1 es invariante por automorfismos de \mathbb{P}_k^1 , i.e., $(p_1, p_2; p_3, p_4) = (\tau(p_1), \tau(p_2); \tau(p_3), \tau(p_4))$ para cualquier proyectividad $\tau : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Para $\{p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = \infty, p_4 = \lambda\}$ con $\lambda \in k - \{0, 1\}$, los posibles valores de la razón doble de las posibles permutaciones de dichos cuatro puntos son

$$O_\lambda = \left\{ \lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, 1 - \frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1} \right\},$$

de hecho basta con permutar solo 3 de los puntos, o sea, el conjunto O_λ es el conjunto de órbitas de λ bajo la acción de S_3 dada por $\sigma_1 = \frac{1}{\lambda}$ y $\sigma_2 = 1 - \lambda$.

Además, que dos subconjuntos de 4 puntos distintos (no ordenados) de \mathbb{P}_k^1 difieran en una proyectividad es equivalente a que los conjuntos formados por los distintos valores de las razones dobles de ambas cuaternas de puntos en todos los órdenes posibles coincidan. De esto último se deduce que la función $\frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}$ clasifica los subconjuntos de 4 puntos no ordenados de la recta proyectiva \mathbb{P}_k^1 módulo automorfismos de \mathbb{P}_k^1 .

Observación 3.12. *Se tiene que $j : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ con $\lambda \mapsto j(\lambda)$ es una función racional de grado 6 que factoriza como por el cociente por la acción de S_3 en \mathbb{P}_k^1 definida como antes:*

$$\begin{array}{ccc} & j & \\ & \curvearrowright & \\ \mathbb{P}_k^1 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}_k^1/S_3 \xrightarrow{i} \mathbb{P}_k^1 \end{array}$$

donde $\mathbb{P}_{k,j}^1 = \text{Proj } k[j] \simeq \mathbb{P}_{k,j}^1$ y pasando a los cuerpos residuales

$$\begin{array}{ccc} k(j(x)) & \hookrightarrow & k(x) \xrightarrow{S_3} k(x) \\ & \searrow & \uparrow \text{gr}\pi=6 \\ & & k(x) \\ & \swarrow & \downarrow \text{gr}j=6 \\ & & k(x) \end{array}$$

tenemos que $i : \mathbb{P}_k^1/S_3 \rightarrow \mathbb{P}_{k,j}^1$ es isomorfismo y se cumple que $j(\lambda) = j(\lambda')$ si y solo si λ y λ' están en la misma órbita por la acción de S_3 .

Supondremos conocido el siguiente resultado:

Lema 3.13. [15, IV Lema 4.2] *Sea C una curva elíptica.*

- (1) *Dados $x, y \in C$ existe un automorfismo $\sigma \in \text{Aut}(C)$ tal que $\sigma(x) = y$.*
- (2) *Si $f_1, f_2 : C \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ son dos morfismos de grado 2, entonces existen automorfismos $\sigma \in \text{Aut}(C)$ y $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{P}_k^1)$ tales que $f_2 \circ \sigma = \tau \circ f_1$. En particular si $f_1(p) = f_2(p) = \infty$, existen automorfismos $\sigma \in \text{Aut}(C, p)$ y $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{P}_k^1, \infty)$ tales que $f_2 \circ \sigma = \tau \circ f_1$.*

Supongamos que $C = (C, p)$ a una curva elíptica tal que p se corresponde con el único punto en el infinito de $C \subset \mathbb{P}_k^2$ (en los demás casos basta aplicar una traslación), podemos concluir lo siguiente:

El valor $j(C) = j(\lambda)$ solo depende de la curva elíptica C :

Si $f_1, f_2 : C \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ son dos morfismos de grado 2 y sean σ y τ como en el lema previo. Si $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ son los puntos de ramificación de f_1 , entonces $\lambda := (p_1, p_2; p_3, p_4) = (\tau(p_1), \tau(p_2); \tau(p_3), \tau(p_4))$, luego $j(\lambda)$ no depende de la elección de $f : C \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ ni de la elección de coordenadas en \mathbb{P}_k^1 , es decir, $j(\lambda)$ es un invariante de C .

Dos curvas elípticas C_1 y C_2 son isomorfas si y solo si $j(C_1) = j(C_2)$:

Supongamos que C_1 y C_2 como cúbricas planas tienen asociadas los escalares λ_1 y λ_2 asociados respectivamente al ser consideradas como cúbricas planas en \mathbb{P}_k^2 . Por construcción, se tiene que $j(\lambda_1) = j(\lambda_2)$ si y solo si $\lambda_1 \in \{\lambda_2, \frac{1}{\lambda_2}, 1 - \lambda_2, \frac{1}{1-\lambda_2}, 1 - \frac{1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_2-1}\}$, es decir, si están en la misma órbita por la acción de S_3 permutando 3 puntos como antes y esto sucede si y solo si hay un automorfismo de \mathbb{P}_k^1 que transforma C_1 en C_2 y esto equivale a que C_1 y C_2 sean curvas elípticas isomorfas.

Todo $j_0 \in k$ es el invariante j de alguna curva elíptica:

Definiendo $p(\lambda) = 2^8(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 - j_0\lambda^2(\lambda - 1)^2$ y tomando una solución λ_0 de $p(\lambda) = 0$, la curva elíptica definida por el polinomio homogéneo $y^2z - x(x-z)(x - \lambda_0z)$ tiene invariante j igual a j_0 y es una curva lisa porque $\lambda_0 \neq 0, 1$.

Móduli de curvas elípticas

Con las notaciones establecidas en la subsección 3.3.2, vamos a estudiar el problema de móduli dado por el conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{1,1} &= \{ \text{curvas } C \text{ de género 1 con } p : \text{Spec } k \rightarrow C \text{ una sección} \} = \\ &= \{ \text{curvas } C \text{ de género 1 con } p \in C \text{ un punto cerrado marcado} \} \end{aligned}$$

y diremos que dos curvas marcadas $(C, p), (C', p')$ son equivalentes si son isomorfas sobre k y dicho isomorfismo conmuta con las secciones p y p' . Nótese que (C, p) es isomorfa como curva marcada a (C, p') marcando otro punto $p' \in C$, por este motivo, los problemas de móduli \mathcal{M}_1 y $\mathcal{M}_{1,1}$ son en esencia el mismo salvo por el hecho de que, como veremos, las curvas elípticas tienen un número finito de automorfismos, mientras que las curvas lisas de género 1 tienen infinitos automorfismos.

Con esto hemos visto en la sección anterior, dada una curva elíptica (C, p) , sabemos que podemos suponer que $C \cap \mathbb{A}_k^2$ está dado por $P(x, y) = y^2 - x(x-1)(x-\lambda)$ deshomo-geneizando con $\lambda \in \mathbb{A}_j = \text{Spec } k[j] \simeq \mathbb{A}_k^1$ donde el isomorfismo se tiene por ser j regular. Obtenemos una biyección

$$\xi_{1,1}(\text{Spec } k) : \mathcal{F}_{1,1}(\text{Spec } k) \rightarrow \text{Hom}(\text{Spec } k, \mathbb{A}_j)$$

mandando $(C, p) \mapsto \lambda$.

A continuación probamos que $M_{1,1} = \mathbb{A}_j$ es un espacio de móduli grosero para $\mathcal{M}_{1,1}$.

En primer lugar, vamos a definir el morfismo $\xi_{1,1} : \mathcal{F}_{1,1} \rightarrow (\mathbb{A}_j)^\bullet$, dada una familia de curvas elípticas (X, S, π, σ) podemos asignarle un morfismo $\varphi : S \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ de manera

que para los puntos cerrados s de S sea $\varphi(s) = j(X_s)$. Para construir φ , nótese que 3σ , en cada abierto afín $\text{Spec } A \subset S$, define una inmersión $X_A \hookrightarrow \mathbb{P}_A^1$ y se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.14 (Forma normal de Weierstrass). [24, Teorema 1] *Sea (X, S, π, σ) una familia de curvas elípticas, entonces, para cada punto $s \in S$ existe algún entorno abierto afín U de s tal que $\pi^{-1}(U)$ es isomorfo al subesquema definido en $U \times \mathbb{P}_k^2$ por*

$$y^2z = 4x^3 - g_2xz^2 - g_3z^3$$

donde $g_2, g_3 \in \mathcal{O}(U)$ son funciones regulares tales que $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ no se anula en U . Además, $g_2, g_3 \in \mathcal{O}(U)$, están definidas de modo único salvo transformaciones del tipo $g_2 \mapsto t^4g_2$ y $g_3 \mapsto t^6g_3$ para cierto $t \in \mathcal{O}(U)^\times$ y el invariante j se expresa en estas coordenadas como:

$$j = 2^8 \frac{27 \cdot g_2^3}{4 \cdot \Delta} = 1728 \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}.$$

Esto nos permite definir el morfismo en los abiertos de S y pegándolos obtener φ .

Sea $A = k[\lambda, \lambda^{-1}, (\lambda - 1)^{-1}]$, la familia parametrizada de curvas elípticas determinada por

$$X = \text{Spec}(A[x, y]/y^2 - x(x-1)(x-\lambda)) \longrightarrow S = \text{Spec } A$$

verifica la propiedad local universal. Eso se deduce del teorema de la forma normal de Weierstrass realizando sucesivos cambios de coordenadas. Además como veíamos al principio de la sección, la acción de S_3 en S , definida del modo obvio, es tal que dos puntos geométricos están en la misma órbita si sus fibras son isomorfas como curvas marcadas, es decir, si están en la misma clase de $\mathcal{M}_{1,1}$ -equivalencia. Por el Teorema 2.52, si el cociente categoría de S por la acción de S_3 es un espacio de órbitas, entonces es un espacio de módulos grosero para $\mathcal{M}_{1,1}$.

Como $S = \text{Spec } A$ es afín y S_3 es un grupo finito, tenemos que en efecto, $\text{Spec}(A^{S_3})$ es espacio de módulos grosero para $\mathcal{M}_{1,1}$, luego si vemos que $A^{S_3} = k[\lambda, \lambda^{-1}, (\lambda - 1)^{-1}]^{S_3}$ es igual a $k[j]$ obtendremos la conclusión deseada.

Claramente, $j \in A^{S_3}$ y tenemos las siguientes inclusiones entre los cuerpos residuales:

$$\begin{array}{ccc} k(j) & \hookrightarrow & \kappa(A^{S_3}) \xrightarrow{6} \kappa(A) \\ & \searrow & \nearrow \\ & & 6 \end{array}$$

Luego $k(j) = \kappa(A^{S_3})$ y además como $j = j(\lambda) = 2^8 \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}$ tenemos que A^{S_3} es íntegro sobre $k[j]$ luego, por ser $k[j]$ íntegramente cerrado, $k[j] = A^{S_3}$.

Sin embargo, este problema de módulos no puede tener espacio de módulos fino ya que existen curvas con automorfismos no triviales. De hecho de la definición del invariante j y las propiedades de este, se puede decir que el grupo de automorfismos de una curva elíptica ha de ser isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ó $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (véase [15, VI Corolario 4.7]).

3.3.4. Curvas de género $g \geq 2$

Exponemos ahora como en [23] se obtiene el espacio de móduli grosero para los problemas de móduli \mathcal{M}_g para $g \geq 2$.

Observación 3.15. *Las curvas de género mayor o igual que 2 tienen un número finito de automorfismos. Una forma de verlo es utilizando que podemos dotar al grupo de automorfismos de una curva (lisa) C , $\mathbf{Aut}(C)$, de estructura de esquema en grupos deducir del hecho de que el espacio tangente en el elemento neutro de $\mathbf{Aut}(C)$ cumple que $T_e(\mathbf{Aut}(C)) = H^0(C, \omega_C^{-1})$ y por tanto como $gr(\omega_C^{-1}) = 2 - 2g$ es menor que 0 para $g \geq 2$, tenemos que el grupo de automorfismos de una curva de género $g \geq 2$ es finito.*

Hemos visto que para cualquier curva C el divisor νK_C con $\nu \geq 3$ define una inmersión cerrada de C en \mathbb{P}_k^N con $N = \nu(2g-2) - g$ y llamaremos curva ν -canónica a la imagen de tal inmersión cerrada de C que está determinada salvo un cambio homogéneo de coordenadas en \mathbb{P}_k^N . Para una familia X de curvas parametrizada por S , el haz de las diferenciales relativas $\Omega_{X/S}$ es relativamente amplio y para $\nu \geq 3$, $(\Omega_{X/S})^{\otimes \nu}$ es (relativamente) muy amplio. Fijamos el polinomio de Hilbert $P(x) = \nu(2g-2)x + 1 - g$

Proposición 3.16. [23, Proposición 5.1] *Hay un único subesquema $H_{g,\nu} = H_\nu$ del esquema de Hilbert $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$ tal que cualquier morfismo de esquemas $f : S \rightarrow \text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$ factoriza por H_ν si y solo si*

- (1) *el subesquema $X = H_\nu \times_{\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P} S$ en $\mathbb{P}_k^N \times_k S$ es una familia de curvas de género g sobre S ,*
- (2) *el haz de línea en X inducido por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^N}(1)$ es isomorfo a*

$$(\Omega_{X/S})^{\otimes \nu} \otimes \pi_S^*(\mathcal{L}) \simeq \iota^*(\pi_{\mathbb{P}_k^N}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^N}(1)) \otimes \pi_S^*(\mathcal{L}))$$

para un cierto haz de línea \mathcal{L} en S , donde $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^N \times_k S$; y

- (3) *para todo punto geométrico s de S , la fibra X_s de X sobre s genera $\mathbb{P}_k^N \times_k \text{Spec } \kappa(s)$, (i.e. no está contenida en ningún hiperplano), y por tanto X_s es una curva ν -canónica en \mathbb{P}_k^N .*

Este resultado nos dice que hay un subesquema H_ν que parametriza las curvas de género $g \geq 2$ sobre k que hemos sumergido en el espacio proyectivo vía una inmersión canónica. Estas inmersiones están determinadas salvo automorfismos de \mathbb{P}_k^N y por tanto las condiciones (1), (2) y (3) son invariantes por automorfismos de \mathbb{P}_k^N .

Definimos el functor contravariante en la categoría de k -esquemas $\mathbf{PGL}_{N+1}(S) = \text{Hom}(S, \mathbf{PGL}_{N+1})$ y el functor $\mathbf{Aut}_{\mathbb{P}_k^N}(S) = \text{Aut}_S(\mathbb{P}_k^N \times_k S)$ donde $\text{Aut}_S(\mathbb{P}_k^N \times_k S)$ es el grupo de S -automorfismos de $\mathbb{P}_k^N \times_k S$. Recordemos que \mathbf{PGL}_{N+1} actúa en \mathbb{P}_k^N por automorfismos, de hecho el morfismo natural $\mathbf{PGL}_{N+1} \rightarrow \text{Aut}_k(\mathbb{P}_k^N)$ es un isomorfismo de grupos (véase [13, Proposición 11.48]). Esta acción nos permite definir de modo natural un morfismo de funtores $\mathbf{PGL}_{N+1} \rightarrow \mathbf{Aut}_{\mathbb{P}_k^N}$ que es isomorfismo (véase [23, 0.§5.b]).

Se tiene que PGL_{n+1} actúa en H_ν restringiendo la acción natural de este grupo en $Hilb_{\mathbb{P}_k^N}^P$ lo que induce entre los esquemas de puntos un morfismo $\sigma : \mathbf{PGL}_{N+1} \times H_\nu^\bullet \rightarrow H_\nu^\bullet$ que a cada esquema S le asigna la correspondiente acción. Tenemos además:

$$\mathbf{PGL}_{N+1} \times H_\nu^\bullet \xrightarrow[\pi_{H_\nu}]{\sigma} H_\nu^\bullet \xrightarrow{\chi} \mathcal{F}_g$$

donde χ es la transformación natural de funtores que se tiene como consecuencia de la condición (1) y $\chi \circ \sigma = \chi \circ \pi_{H_\nu}$ por ser las condiciones que definen H_ν invariantes por automorfismos de \mathbb{P}_k^N . Se define el functor contravariante \mathcal{Q} definido para cada esquema S como el conjunto cociente

$$\mathcal{Q}(S) = \text{Hom}(S, H_\nu) / \text{Hom}(S, PGL_{N+1})$$

y se tiene que el morfismo de funtores χ factoriza como

$$\begin{array}{ccc} & \chi & \\ & \curvearrowright & \\ H_\nu^\bullet & \xrightarrow{\pi} \mathcal{Q} & \xrightarrow{\bar{\chi}} \mathcal{F}_g \end{array}$$

Se demuestra en [23, Proposición 5.2] que $\bar{\chi}(S)$ es inyectivo para todo S y que además para todo $\mathcal{X} \in \mathcal{F}_g(S)$ hay un recubrimiento $\{U_i\}$ de S tal que para cada índice i , la restricción $\mathcal{X}|_{U_i}$ a \mathcal{F}_g está en la imagen de $\bar{\chi}(U_i)$.

En primer lugar, se comprueba que si se tienen dos familias de curvas parametrizadas por S , $f_1 : X_1 \rightarrow S$ y $f_2 : X_2 \rightarrow S$ tales que X_1 y X_2 son isomorfas sobre S , entonces existe un automorfismo $\beta(S) \in \mathbf{PGL}_{N+1}(S)$ tal que $\sigma(\beta(S), f_1) = f_2$, lo que prueba la inyectividad.

Para probar lo que resta, lo que se hace, con las definiciones que hemos establecido, es ver que la familia de curvas X_ν inducida al aplicar la Proposición 3.16 a $S = H_\nu$ es una familia que verifica la propiedad local universal. Dado $\mathcal{X} \in \mathcal{F}_g(S)$, \mathcal{X} es por definición la clase de equivalencia modulo isomorfismos de una cierta familia de curvas $f : X \rightarrow S$.

Se deduce del Lema 2.17 que la imagen directa $f_*((\Omega_{X/S})^{\otimes \nu}) = \mathcal{E}$ es un haz localmente libre en S y considerando el recubrimiento abierto $\{U_i\}$ tal que $\mathcal{E}|_{U_i}$ es libre para todo i , se tiene que $\mathbb{P}(\mathcal{E}|_{U_i}) = \text{Proj}(\text{Sym}(\mathcal{E}|_{U_i})) = \mathbb{P}_k^N \times_k U_i$ es trivial. Se comprueba que $X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ es en efecto una inmersión cerrada y después, denotando $X_i = X \times_S U_i$ se tiene que $X_i \hookrightarrow \mathbb{P}_k^N \times_k U_i$ define un punto $b_i \in H_\nu^\bullet(U_i) \subset \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}_k^N}(U_i)$ y por construcción $\mathcal{X}|_{U_i} = \chi(b_i) = X_i$.

Como además la familia $X_\nu \rightarrow H_\nu$ cumple que dos puntos geométricos $h, h' \in H_\nu$ están en la misma PGL_{N+1} -órbita si y solo si las fibras son curvas de género g isomorfas, se deduce del Teorema 2.52 que un cociente categorial de H_ν por PGL_{N+1} que sea un espacio de órbitas es un espacio de módulos grosero para \mathcal{M}_g . De hecho en [23, Proposición 5.4] se prueba que un cociente geométrico de H_ν por PGL_{n+1} es un espacio de módulos grosero para \mathcal{M}_g y posteriormente en [23, Teorema 5.11] se demuestra que este cociente $M_g := H_\nu / PGL_{n+1}$ existe.

Capítulo 4

Móduli de curvas estables

Los espacios de móduli de curvas lisos que hemos obtenido en general no son compactos (i.e, no son propios) y esta es una propiedad que resulta especialmente conveniente, ya que, por ejemplo, permite aplicar teoría de la intersección en ellos, lo cual ha dado resultados muy relevantes, (v.g., en la geometría enumerativa de curvas algebraicas).

Dado un problema de móduli \mathcal{M} con espacio de móduli M lo deseable es obtener una compactificación \overline{M} de M , que sea a su vez el espacio de móduli de otro problema de móduli $\overline{\mathcal{M}}$ y que sea en cierto sentido una generalización natural del problema de partida.

Parametrizaremos por tanto, además de curvas lisas, ciertas curvas singulares: si parametrizásemos todas las curvas nodales el espacio no sería separado, una forma de verlo es considerar una familia de curvas lisas parametrizadas por otra curva lisa (o sea, una superficie regular) y considerar la explosión en un punto p ; la superficie obtenida es birracional a la de partida con la única diferencia de que la fibra en p es una curva nodal.

Queremos que estos objetos que añadimos al problema de móduli inicial aparezcan de forma natural, por ejemplo, en nuestro caso las curvas que añadimos son el resultado de deformar curvas lisas al “tomar límites” en las familias parametrizadas. Aunque no detallaremos el modo en que este proceso se lleva a cabo, esto resulta en un cierto tipo de curvas nodales que tienen un número finito de automorfismos, denominadas curvas estables. Para las curvas lisas marcadas nos encontramos una casuística similar y la definición de curva estable es también equivalente a que las curvas nodales marcadas que estudiaremos tengan un número finito de automorfismos.

También resulta conveniente que la frontera, $\overline{M} - M$ se pueda describir de manera combinatoria en términos de objetos más sencillos, que en este caso quedará patente tras la introducción del grafo dual a una curva y la parametrización de estos que recogemos en el Capítulo 5.

En el presente capítulo se introduce también el lenguaje de stacks puesto que aparece de forma natural para codificar las curvas junto con su grupo finito de automorfismos de manera que además se pueden generalizar ciertas definiciones de la teoría de esquemas y probar la compacidad de los stacks de curvas estables (marcadas y no marcadas).

Un primer ejemplo de cómo se materializa la compactificar de un espacio de móduli de curvas lisas es el que sigue:

Ejemplo 4.1. Recordemos que el espacio de móduli de las curvas lisas de género 0 con cuatro puntos marcados ordenados distintos es $M_{0,4} = \mathbb{P}_k^1 - \{0, 1, \infty\}$ y este esquema no es propio. Una idea para compactificarlo puede ser el permitir que los puntos marcados ordenados puedan no ser distintos, sin embargo sabemos que cuando una curva de género 0 tiene menos de 3 puntos marcados se tienen familias no triviales que son triviales en fibra, por tanto estaríamos añadiendo clases de equivalencia de curvas que imposibilitan la representabilidad. Por su parte cuando solo dos de los cuatro puntos marcados coinciden, estas curvas se parametrizan por un punto ya que a efectos prácticos su parametrización es la dada por $M_{0,3}$. Tenemos 6 posibles clases de equivalencia que se comportan como curvas racionales con 3 puntos marcados, no obstante como queremos parametrizar las curvas de manera continua y que el espacio obtenido sea separable (i.e. que los límites un familias parametrizadas sean únicos) encontramos que definiendo

$$C_t = (0, 1, \infty, t) \quad \text{y} \quad D_t = (0, t^{-1}, \infty, 1),$$

para $t \neq 0$ se tiene que el automorfismo de \mathbb{P}_k^1 dado por $\phi_t(z) = \frac{z}{t}$ induce un isomorfismo entre C_t y D_t para todo $t \neq 0$, mientras que para $t = 0$ obtenemos curvas desisomorfas, luego queremos que las clases de equivalencia de $p_1 = p_4$ y $p_2 = p_3$ coincidan (e igual para las demás clases de equivalencia).

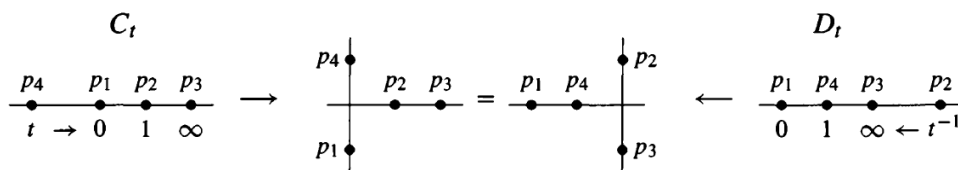


Figura 4.1: Identificación de las familias C_0 y D_0 [19, Ejemplo 1.2.7]

De este modo sí obtendríamos las tres clases de equivalencia correspondientes a los tres puntos que le faltaban a $M_{0,4}$ para sea compacto ya que es claro que la única posicible compactificación lisa de $M_{0,4}$ es \mathbb{P}^1 . Si embargo la familia universal $\pi : \bar{U}_{0,4} \rightarrow \bar{M}_{0,4}$ no es $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ya que las estaríamos permitiendo que las cuatro secciones de π no fuese disjuntas, se puede probar que la explosión de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ en los puntos $(0, 0)$, $(1, 1)$, (∞, ∞) es en efecto la familia universal $\bar{U}_{0,4} = Bl_{(0,0),(1,1),(\infty,\infty)}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ y se ve además que la fibra sobre cada uno de estos puntos es una curva racional conexa con dos componentes irreducibles cada una con dos puntos marcados como veíamos en la figura anterior.

4.1. Curvas estables y grafo dual a una curva

En general, dado X un esquema íntegro, se llama **morfismo de normalización** a $\mu : \tilde{X} \rightarrow X$ donde \tilde{X} es un esquema normal, que verifique que para todo morfismo $f : Y \rightarrow X$ con Y normal tal que $f(Y) \subset X$ es un subconjunto denso, entonces f factoriza de modo único por μ . Para todo esquema X íntegro existe un morfismo de normalización único salvo isomorfismo, que se obtiene localmente al considerar un recubrimiento por abiertos afines $X = \cup \text{Spec } A_i$ donde A_i son dominios íntegros; tomando las normalizaciones $\text{Spec } \bar{A}_i \rightarrow \text{Spec } A_i$ donde \bar{A}_i denota el cierre íntegro de A_i sobre su

cuerpo de fracciones y pegándolas se obtiene la normalización de X .

En el caso de X un esquema con un número finito de componentes irreducibles X_1, \dots, X_m que suponemos subesquemas cerrados reducidos, llamaremos **normalización** de X a la proyección $\pi : \tilde{X} = \bigsqcup_{1 \leq v \leq m} \tilde{X}_v \rightarrow X$ donde \tilde{X}_i es la normalización de X_i .

Recordemos que se dice que una curva C (reducida no necesariamente irreducible) tiene un **nodo** en un punto cerrado $q \in C(k)$ cuando el anillo completado $\mathcal{O}_{C,q}^\wedge \simeq k[[x, y]]/(xy)$ y diremos que C es una **curva nodal** o **curva pre-estable** cuando tenga un número finito de nodos $\text{Sing}(C) = \{q_1, \dots, q_m\}$ y los demás puntos sean regulares. Análogamente, una **familia de curvas pre-estables** es un morfismo propio y plano de esquemas tal que sus fibras geométricas son curvas nodales. Nótese que el conjunto de puntos lisos de una curva nodal $\mathcal{U} = C - \text{Sing}(C)$ es un abierto denso de C .

Dada C una curva nodal consideramos su normalización $\mu : \tilde{C} \rightarrow C$, o sea, una curva \tilde{C} lisa no necesariamente conexa tal que μ es un morfismo finito birracional cumpliendo que $\mu : \mu^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$ es un isomorfismo. Como μ es un morfismo finito se tiene que para cualquier haz coherente \mathcal{F} , sus imágenes directas superiores $R^i \mu_* \mathcal{F}$ se anulan y se tiene la siguiente sucesión exacta de haces coherentes en C :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \mu_* \mathcal{O}_{\tilde{C}} \longrightarrow \bigoplus_{q \in \text{Sing}(C)} \overline{\mathcal{O}_{C,q}} / \mathcal{O}_{C,q} \longrightarrow 0$$

donde $\overline{\mathcal{O}_{C,q}}$ es el cierre íntegro de $\mathcal{O}_{C,q}$.

De esta sucesión exacta deducimos que $\chi(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}) = \chi(\mathcal{O}_{\tilde{C}}) = \chi(\mathcal{O}_C) + \chi(\overline{\mathcal{O}_{C,q}} / \mathcal{O}_{C,q})$ y obtenemos

$$g(C) = g(\tilde{C}) + \#\text{Sing}(C) = \sum_{1 \leq v \leq m} g(\tilde{C}_v) + 1 - m + \#\text{Sing}(C)$$

donde \tilde{C}_v son las normalizaciones de las componentes irreducibles C_v de C .

Cada nodo $q_i \in C(k)$ de una curva nodal tiene por antiimagen $\mu^{-1}(q_i) = \{q'_i, q''_i\}$ dos puntos cerrados. Una **caracterización** que será de utilidad es que es equivalente dar $(C, \text{Sing}(C))$ que dar $(\tilde{C}, \mu^{-1}(\text{Sing}(C)))$ en el sentido de que dado $f : C \rightarrow X$ un morfismo de esquemas es lo mismo que dar $\tilde{f} : \tilde{C} \rightarrow X$ tal que $\tilde{f}(q'_i) = \tilde{f}(q''_i)$ siendo $\mu^{-1}(q_i) = \{q'_i, q''_i\}$ para todo $q_i \in \text{Sing}(C)$. Esto se puede comprobar localmente utilizando que si $U \subset C$ es un abierto afín que solo contenga a un punto singular q_i , entonces $\mathcal{O}_C(U) = \{f \in \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}(U) : f(q'_i) = f(q''_i)\}$.

Definición 4.2. Una familia de curvas de género g con n puntos marcados $(X, S, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ se dice que es una **familia de curvas estables n -marcadas** si $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ son secciones disjuntas y las fibras geométricas X_s de π cumplen que:

- (1) X_s son todas curvas reducidas y conexas de género $g = h^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$ o bien lisas o bien nodales y X_s no tiene singularidades en los puntos $\{p_i = \sigma_i(s)\}$

- (2) Para las componentes racionales E de X_s el número de puntos marcados $P_i \in E$ junto con el número de puntos en los corta al resto de componentes de X_s es mayor o igual que 3.

Llamamos familia de curvas estables a una familia de curvas estables 0-marcada. Se llama **curva estable** (n -**marcada**) a una familia de curvas estables n -marcadas sobre $\text{Spec } k$. Se denominan **puntos especiales** de una curva estable n -marcada a los puntos marcados y los puntos donde la curva tenga un nodo.

Observación 4.3. Igual que en el caso de curvas lisas de género g (n -marcadas), se deduce del hecho de que las propiedades de que un morfismo de esquemas sea plano y propio son propiedades estables por cambio de base que si $f : X \rightarrow S$ es una familia de curvas estables (n -marcadas) sobre S y $S' \rightarrow S$ un morfismo de esquemas, entonces $f' : X \times_S S' \rightarrow S'$ es una familia de curvas estables de género g (n -marcadas) y si además f es una familia de curvas estables de género g (n -marcadas), entonces f' también lo es. Este hecho nos permitirá obtener funtores de módulos bien definidos para los correspondientes problemas de módulos.

Introducimos ahora un objeto combinatorio útil para el estudio del módulo. Vamos a utilizar la siguiente noción de grafo que es una descripción combinatoria más general que la habitual como complejo simplicial abstracto unidimensional.

Definición 4.4. Llamaremos **grafo (combinatorio)** a $\Gamma = (V(\Gamma), H(\Gamma), \iota, \epsilon)$ donde $V(\Gamma)$ un conjunto finito no vacío llamado conjunto **vértices**, $H(\Gamma)$ es un conjunto finito llamado conjunto de **medias-aristas**, $\iota : H(\Gamma) \rightarrow H(\Gamma)$ es una involución y $\epsilon : H(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)$ una aplicación.

Un **grafo ponderado** es un grafo Γ dotado de una aplicación $w : V(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Una pareja de medias aristas distintas $e = \{h, h'\}$ tales que $h' = \iota(h)$ se llama **arista (acotada)** de Γ y el conjunto de aristas acotadas $E(\Gamma)$, mientras que un punto fijo por ι (si lo hay) lo denominaremos **arista no acotada** y el conjunto de aristas no acotadas de Γ lo denotaremos como $E^\infty(\Gamma)$. Diremos que $h \in H(\Gamma)$ es **adyacente** a $v \in V(\Gamma)$ si $\epsilon(h) = v$ y llamaremos **valencia de un vértice** v a $\text{val}(v) = \#\epsilon^{-1}(v)$. Diremos que una arista $e = \{h, h'\}$ es un **lazo** si $\epsilon(h) = v = \epsilon(h')$ y llamaremos **hoja** a una arista adyacente a un vértice de valencia 1.

Definición 4.5. Un **morfismo de grafos (combinatorios)** $\lambda : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ es una pareja de morfismos $\lambda_V : V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma')$ y $\lambda_H : H(\Gamma) \rightarrow H(\Gamma')$ tales que $\lambda_H \circ \iota = \iota \circ \lambda_H$ y $\epsilon \circ \lambda_H = \lambda_V \circ \epsilon$ y cumpliendo que $\lambda(E^\infty(\Gamma)) \subseteq \lambda(E^\infty(\Gamma'))$. Si además los grafos son ponderados por w, w' respectivamente, ha de cumplirse que $w' \circ \lambda_V = w$.

Notación: Por norma general, cuando demos un grafo combinatorio daremos la colección $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma), E^\infty(\Gamma))$ haciendo explícito qué aristas son adyacentes a qué vértices, o sea, haremos uso de la identificación natural entre grafos combinatorios y grafos topológicos (i.e. complejos simpliciales de dimensión 1).

Definición 4.6. Dada $(C, \mathbf{p}) = (C; p_1, \dots, p_n)$ una curva n -marcada, el **grafo dual** a C es un grafo ponderado, i.e., un grafo dotado de una función que asocia a cada vértice un entero; $(\Gamma_{(C, \mathbf{p})}, w_{(C, \mathbf{p})})$ tal que $\Gamma_{(C, \mathbf{p})} = (\Gamma, p_1, \dots, p_n)$ verifica:

- tiene un vértice v_i por cada componente irreducible C_{v_i} de C ,
- una arista (acotada) por cada nodo uniendo las componentes conexas a las que el nodo pertenece (si un nodo solo pertenece a una componente conexa la arista es un lazo) y
- una arista no acotada p_i por cada punto marcado de manera que sea adyacente al vértice que le corresponde a la componente conexa que lo contiene.

La función de peso en los vértices se define como aquella que a cada vértice v_i le asigna el género de la normalización \tilde{C}_{v_i} de la componente irreducible C_{v_i} .

Nótese que podemos reformular la condición (2) de la Definición 4.2 diciendo que cada componente irreducible $(X_s)_v$ de cada fibra geométrica X_s cumple que $2g_v - 2 + l_v > 0$ donde g_v es el género (aritmético) de la normalización de $(X_s)_v$ y l_v es el número de medias aristas del vértice v en el grafo dual a X_s .

Proposición 4.7. *Sea C una curva nodal conexa con singularidades $\text{Sing}(C) = \{q_1, \dots, q_r\}$ y p_1, \dots, p_n puntos cerrados no singulares distintos de C , entonces (C, p_1, \dots, p_n) es estable si y solo si $\text{Aut}(C, p_1, \dots, p_n)$ es finito.*

Demostración. Supongamos que $(C, \mathbf{p}) = (C, p_1, \dots, p_n)$ es estable, sabemos que dar $\varphi \in \text{Aut}(C, \mathbf{p})$ es lo mismo que dar $\tilde{\varphi} \in \text{Aut}(\tilde{C}, p_1, \dots, p_n)$ tal que $\tilde{\varphi}(q'_i) = \tilde{\varphi}(q''_i)$. Denotaremos $(\tilde{C}_v, \mathbf{r}_v)$ a cada componente conexa de la normalización de \tilde{C} de C siendo \mathbf{r}_v los puntos especiales de dicha componente, o sea, los puntos marcados y las antiimágenes de puntos singulares de C que contenga. Nótese que denotando por Γ al grafo dual asociado a C , tenemos la siguiente sucesión exacta de grupos:

$$0 \rightarrow \prod_{v \in V(\Gamma)} \text{Aut}(\tilde{C}_v, \mathbf{r}_v) \rightarrow \text{Aut}(C, \mathbf{p}) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$$

donde el primer morfismo no trivial es la inclusión y el segundo manda un automorfismo de (C, \mathbf{p}) al que induce en su grafo dual. De donde $\text{Aut}(C, \mathbf{p})$ es finito si y solo si cada uno de los $\text{Aut}(\tilde{C}_v, \mathbf{r}_v)$ es un grupo finito ya que $\text{Aut}(\Gamma)$ es un grupo finito ya que C tiene un número finito de componentes irreducibles y de nodos, lo cual equivale a que la curva sea estable ya que en tal caso las componentes irreducibles \tilde{C}_v son bien de género 0 con 3 o más puntos especiales, de género 1 con 1 o más puntos especiales; o de género mayor que 2 y en todos estos casos solo hay un número finito de automorfismos de \tilde{C}_v dejando los puntos especiales fijos. \square

Se define el **género de un grafo ponderado** (Γ, w) como

$$g(\Gamma) = b_1(\Gamma) + \sum_{v \in V(\Gamma)} w(v) = b_1(\Gamma) + |w(\Gamma)|$$

denotando $|w(\Gamma)| = \sum_{v \in V(\Gamma)} w(v)$ y con

$$b_1(\Gamma) = \text{rg}H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) = \#\{\text{Componentes conexas de } \Gamma\} - \#V(\Gamma) + \#E(\Gamma)$$

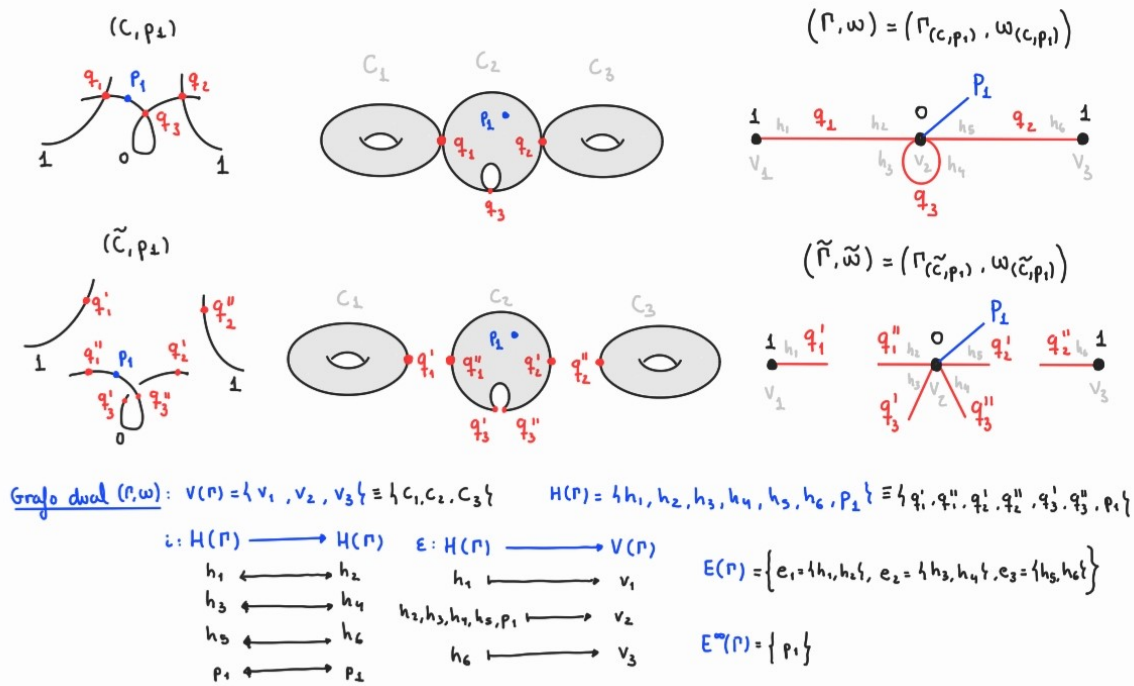
el primer número de Betti de Γ donde estamos denotando $V(\Gamma)$ el conjunto de vértices de Γ y $E(\Gamma)$ el conjunto de aristas (acotadas) de Γ .

Observemos que marcar puntos en una curva estable no cambia el género de su grafo dual y además se cumple que:

Lema 4.8. *El género de una curva estable C y el de su grafo dual Γ coinciden.*

Demostración. Como suponemos que C es conexa y tiene un número m finito de componentes irreducibles, Γ es conexo, tiene m vértices y $\#\text{Sing}(C)$ aristas y habíamos visto que $g(C) = \sum_{1 \leq v \leq m} g(\tilde{C}_v) + 1 - m + \#\text{Sing}(C) = \sum_{v \in V(\Gamma)} w(v) + b_1(\Gamma) = g(\Gamma)$. \square

Ejemplo 4.9. Podemos ver a continuación una curva estable de género 3 con un punto marcado (C, p_1) y su normalización, las visualizaciones como superficies de Riemann y los grafos duales en ambos casos incluyendo además la descripción combinatoria del grafo dual $(\Gamma, w) = (\Gamma_{(C, p_1)}, w_{(C, p_1)})$.



El grupo de automorfismos $\text{Aut}(\Gamma)$ está generado por los morfismos de grafos combinatorios $\lambda_1, \lambda_2 : \Gamma \rightarrow \Gamma$ donde λ_1 es la involución dada por $(\lambda_1)_V(v_1) = v_3$, $(\lambda_1)_H(h_1) = h_6$, $(\lambda_1)_H(h_2) = h_5$ y es la identidad en el resto y λ_2 es la involución dada por $(\lambda_2)_H(h_3) = h_4$ y es la identidad en el resto. Con lo que $\text{Aut}(\Gamma) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

4.2. Móduli de curvas estables

Daremos a continuación los resultados para construir los espacios de móduli de curvas estables.

4.2.1. Algunos resultados previos

Vamos a ver primero que las curvas pre-estables son localmente intersección completa, de donde se deduce que una familia de curvas pre-estables $\pi : X \rightarrow S$ también es localmente intersección completa en el sentido de que X localmente en un abierto $U \subset S$ es isomorfo como S -esquema a los ceros de una sucesión regular de funciones

$f_1, \dots, f_n \in \Gamma(\mathbb{A}^{n+1} \times U, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1} \times U})$; puesto que por ser π un morfismo plano y de tipo finito, basta verlo en fibra.

Lema 4.10. [20, Lema 6.2.4] Sea $X \rightarrow S$ un morfismo de tipo finito con S un esquema localmente noetheriano. Dados $s \in S$, $x \in X_s$ y sea $d = \dim_{\kappa(x)} \Omega_{X_s/\kappa(s),x}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{X_s,x}} \kappa(x)$, entonces en un entorno de x existe una inmersión cerrada $X \rightarrow Z$ en un esquema Z liso sobre S en x tal que $\dim_x Z_s = d$ y $\Omega_{Z/S,x}^1$ es libre de rango d sobre $\mathcal{O}_{Z,x}$.

Proposición 4.11. Si C es curva nodal sobre k , entonces C es localmente un subesquema cerrado de una superficie lisa sobre k , en particular C es localmente intersección completa.

Demostración. Sea $x \in C(k)$ un punto cerrado y $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_{C,x}$ el ideal maximal. El espacio tangente $T_{C,x} = (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee$ a C en x coincide con el de $\text{Spec } \mathcal{O}_{C,x}^\wedge$ y se deduce que $\dim_k T_{C,x} \leq 2$ porque $\mathcal{O}_{C,x}^\wedge \simeq k[[x_1, x_2]]/(uv)$. Utilizando que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \simeq \omega_{C,x}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{C,x}} \kappa(x)$, deducimos que $\dim_{\kappa(x)} \Omega_{C,x}^1 \otimes \kappa(x) \leq 2$. Del Lema 4.10 deducimos que C es localmente un subesquema cerrado de una superficie lisa sobre k . \square

Lema 4.12. [20, Lema 10.3.12] Sea C una curva nodal sobre k y $\mu : \tilde{C} \rightarrow C$ el morfismo de normalización.

(1) Se tiene una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mu_* \omega_{\tilde{C}/k} \rightarrow \omega_{C/k} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

donde \mathcal{F} es un haz soportado en $\text{Sing}(C)$ tal que $\mathcal{F}_x = \kappa(x)$ para cada $x \in \text{Sing}(C)$.

(2) Consideremos el divisor $D = \sum_{q \in \mu^{-1}(\text{Sing}(C))} q$ en \tilde{C} , entonces

$$\mu^* \omega_{C/k} \simeq \omega_{\tilde{C}/k}(D)$$

Proposición 4.13. El dualizante de una curva estable es amplio.

Demostración. Sea C una curva estable y $\mu : \tilde{C} \rightarrow C$ su normalización. Sea C_i una componente irreducible de C y $\mu_i : \tilde{C}_i \rightarrow C_i$ el morfismo de normalización. Por el lema previo, considerando el divisor $D_i = \sum_{y \in \mu^{-1}(\text{Sing}(C)) \cap C_i} y$ en C_i , tenemos que la restricción del dualizante de C a la componente irreducible C_i verifica que $\mu_i^*(\omega_C|_{C_i}) \simeq \omega_{C_i/k}(D_i)$.

De la relación entre el género de una curva y su normalización, teniendo en cuenta que $gr \omega_C|_{C_i} = 2g(C_i) - 2$, deducimos que

$$gr \mu_i^*(\omega_C|_{C_i}) = 2g(\tilde{C}_i) - 2 + \#(\mu^{-1}(\text{Sing}(C)) \cap \tilde{C}_i) = 2g(C_i) - 2 + \#(\overline{\{C - C_i\}} \cap C_i).$$

Por ser C una curva estable $gr \omega_C|_{C_i} > 0$ al restringir el haz a cualquiera de las componentes irreducibles y concluimos que $\omega_{C/k}$ es amplio por la Proposición 2.11. \square

Una familia de curvas estables de género $\pi : X \rightarrow S$ además de ser un morfismo cuasi-proyectivo y plano sabemos que es localmente intersección completa, luego se tiene que el haz dualizante $\omega_{X/S}$ es invertible y se cumple que para todo cambio de base $f : T \rightarrow S$, $f^*(\omega_{X/S}) \simeq \omega_{X \times_S T/T}$.

En la demostración del Teorema 4.16 consideraremos una normalización parcial de cierto número de nodos $\mu : \tilde{C} \rightarrow C$ y utilizaremos el [20, Lema 7.5.18], que afirma que el morfismo canónico $\mu^* : \text{Pic}(C) \rightarrow \text{Pic}(\tilde{C})$ es epiyectivo, lo cual se deduce de tomar cohomología en la sucesión exacta de haces $0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mu_* \mathcal{O}_{\tilde{C}} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ donde \mathcal{G} es un haz soportado en un número finito de puntos.

Observación 4.14. *De esta manera dar un haz de línea \mathcal{L} en C es lo mismo que dar $\tilde{\mathcal{L}} = \mu^* \mathcal{L}$ y una identificación $\tilde{\mathcal{L}}_{x'} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{L}}_{x''}$ donde $\mu^{-1}(x) = \{x', x''\}$, así $\mathcal{L} = \mu_* \tilde{\mathcal{L}}$. Tenemos además que $H^1(C, \mathcal{L}) = H^1(\tilde{C}, \tilde{\mathcal{L}})$ por ser μ un morfismo finito y \mathcal{L} un haz coherente.*

Nótese por otra parte que si consideramos la explosión solamente del nodo x con $\mu^{-1}(x) = \{x', x''\}$ se tiene que $\mathcal{O}_C(V) = \{f \in \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\mu_x^{-1}(V)) : f(x') = f(x'')\}$, luego $\mathfrak{m}_x(V) = \text{Ker}[\mathcal{O}_C(V) \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{C}}(V)] = \mu_*(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(-x' - x''))(V)$, o sea, $\mathfrak{m}_x = \mu_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}(-x' - x'')$. Dado \mathcal{L} un haz de línea cualquiera, el haz $\mathfrak{m}_x \mathcal{L}$ es de la forma $\mu_* \tilde{\mathcal{L}}$ para cierto haz de línea $\tilde{\mathcal{L}}$ en \tilde{C} y además $\mu_* \omega_{\tilde{C}/k} = \mathfrak{m}_x \omega_{C/k}$. Obtenemos así en cada componente irreducible C_v de C se verifica la siguiente igualdad

$$gr(\mathcal{L}|_{C_v}) - gr(\tilde{\mathcal{L}}|_{\tilde{C}_v}) = gr(\omega_{C/k}|_{C_v}) - gr(\omega_{\tilde{C}/k}|_{\tilde{C}_v}). \quad (4.2.1)$$

También utilizaremos el siguiente resultado:

Lema 4.15. *Sea C una curva nodal conexa y sea \mathcal{L} un haz de línea en C tal que al restringirlo a cada componente irreducible su grado es mayor o igual que el grado de la restricción de $\omega_{C/k}$ de manera que en alguna de las componente irreducibles C_v sea $gr(\mathcal{L}|_{C_v}) > gr(\omega_{C/k}|_{C_v})$, entonces $H^1(C, \mathcal{L}) = 0$*

Demostración. Por dualidad basta ver que $H^0(C, \mathcal{L}^{-1} \otimes \omega_{C/k}) = 0$. Por hipótesis, el grado de la restricción en cada componente es menor o igual que 0 y existe una componente C_v en la que es estrictamente negativo. Por tanto toda sección de $\mathcal{L}^{-1} \otimes \omega_{C/k}$ es idénticamente nula en C_v y por se la como C es conexa, la sección ha de ser idénticamente nula en C . \square

4.2.2. Construcción de los espacios de móduli \overline{M}_g y $\overline{M}_{g,n}$

Supondremos salvo que se diga lo contrario que $g \geq 2$. Los problemas de móduli a continuación serán los dados por los conjuntos

$$\overline{\mathcal{M}}_g := \{\text{Curvas estables } C \text{ sobre } k \text{ de género } g\}$$

y diremos que dos curvas $C, C' \in \overline{\mathcal{M}}_g$ son $\overline{\mathcal{M}}_g$ -equivalentes si son isomorfas.

El functor de familias parametrizadas $\overline{fam}_g : \mathbf{Sch}_k^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$ es el definido por

$$\overline{fam}_g(S) := \{\pi : X \rightarrow S \text{ familias de curvas estables de género } g \text{ parametrizadas por } S\}$$

y si $X \in \overline{fam}_g(S)$ y $f : S' \rightarrow S$ morfismo de esquemas, entonces $f^* X = X \times_S S' \in \overline{fam}_g(S')$. Dos familias $X, X' \in \overline{fam}_g(S)$ son equivalentes sobre S , $X \sim_S X'$, cuando exista $X \xrightarrow{\sim} X'$ isomorfismo de S -esquemas y si $f : S' \rightarrow S$ morfismo de esquemas y $X \sim_S X'$, entonces es claro que $f^* X \sim_{S'} f^* X'$.

Denotamos por $\overline{\mathcal{F}}_g$ al functor de móduli asociado al problema de móduli $\overline{\mathcal{M}}_g$:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}_g : \mathbf{Sch}_k^{op} &\longrightarrow \mathbf{Sets} \\ S &\longmapsto \{\text{familias de curvas estables de género } g \text{ parametrizadas por } S\} / \sim_S \\ f : S' \rightarrow S &\longmapsto f^* : \overline{\mathcal{F}}_g(S) \rightarrow \overline{\mathcal{F}}_g(S') \text{ con } [X]_S \mapsto [f^*X]_{S'} = [X \times_S S']_{S'} \end{aligned}$$

que está bien definido por lo expuesto en la Observación 4.3.

Vamos a ver que los problemas de móduli dados por $\overline{\mathcal{M}}_g$ tienen espacio de móduli grosero \overline{M}_g y su construcción es similar a la que se estudió para las curvas lisas de género $g \geq 2$ en la Sección 3.3.4. La forma de proceder será ver que a partir del haz canónico se puede obtener un haz muy amplio y definir inmersiones cerradas de curvas estables en el espacio proyectivo de manera que \overline{M}_g será el cociente de un subesquema de un cierto esquema de Hilbert por la acción del grupo lineal proyectivo.

El siguiente resultado es la clave para poder construir el espacio de móduli \overline{M}_g

Teorema 4.16. [11, Teorema 1.2] *Si $g \geq 2$ y C es una curva estable de género g sobre un cuerpo algebraicamente cerrado entonces $H^1(C, \omega_{C/k}^{\otimes n}) = 0$ si $n \geq 2$ y $\omega_{C/k}^{\otimes n}$ muy amplio para $n \geq 3$*

Demostración. Por la Proposición 4.13 sabemos que $\omega_{C/k}$ es amplio. Para una curva C sobre k estable por dualidad tenemos que $\text{Hom}(H^1(C, \mathcal{F}), k) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{F}, \omega_{C/k})$ para todo haz coherente \mathcal{F} en C , en particular para $\mathcal{F} = \omega_{C/k}^{\otimes n}$ se tiene que

$$\text{Hom}(H^1(C, \omega_{C/k}^{\otimes n}), k) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\omega_{C/k}^{\otimes n}, \omega_{C/k}) \simeq H^0(C, \omega_{C/k}^{\otimes(-n)} \otimes \omega_{C/k}).$$

Como hemos visto que $\omega_{C/k}$ restringido a cada componente irreducible C_v (i.e. restringido a cada subcurva) tiene grado positivo. Por tanto la restricción $\omega_{C/k}^{\otimes(1-n)}|_{C_v}$ no tiene secciones para ninguna C_v y $n \geq 2$, luego $H^1(C, \omega_{C/k}^{\otimes n}) = 0$ para $n \geq 2$.

Para ver que una haz de línea \mathcal{L} en un esquema C propio sobre k es muy amplio, por la Proposición 2.3 basta ver que

- (a) Para todas las parejas de puntos cerrados distintos $x \neq y$ de C , el siguiente morfismo es epiyectivo:

$$H^0(C, \mathcal{L}) \rightarrow H^0(C, (\mathcal{L} \otimes \kappa(x)) \oplus (\mathcal{L} \otimes \kappa(y))).$$

- (b) Para todo punto cerrado $x \in C(K)$, el siguiente morfismo es epiyectivo:

$$H^0(C, \mathcal{L}) \rightarrow H^0(C; \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{C,x}/\mathfrak{m}_x^2).$$

Tomando cohomología en la sucesión

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}_x \mathfrak{m}_y \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow (\mathcal{L} \otimes \kappa(x)) \oplus (\mathcal{L} \otimes \kappa(y)) \rightarrow 0$$

para cualesquiera $x, y \in C(K)$ deducimos que si $H^1(C, \mathfrak{m}_x \mathfrak{m}_y \mathcal{L}) = 0$ para todo $x, y \in C(K)$, entonces se verifican las condiciones (a) y (b).

Tomamos $\mathcal{L} = \omega_{C/k}^{\otimes n}$ con $n \geq 3$. Utilizaremos la siguiente **notación**: dada una componente irreducible C_v de C denotaremos $g_{C_v} = g(\tilde{C}_v)$ al género (aritmético) de su normalización y l_v al número de puntos de la normalización \tilde{C}_v que por μ van a parar a nodos de C_v (equivalentemente, es el número de de medias-aristas adyacentes al vértice v correspondiente a la componente C_v en el grafo dual).

Observemos que por ser C estable, $gr(\mathcal{L}|_{C_v}) \geq 3(2g_{C_v} - 2 + l_v)$ en cada componente irreducible C_v de C .

Si x, y son puntos no singulares de C , entonces $\mathbf{m}_x, \mathbf{m}_y$ son haces invertibles y $\mathcal{L}' = \mathbf{m}_x \mathbf{m}_y \omega_{C/k}^{\otimes n}$ es un haz de línea. Al restringir \mathcal{L}' a cada componente irreducible C_v , por ser C estable

$$gr(\mathcal{L}'|_{C_v}) \geq 3(2g_{C_v} - 2 + l_v) - 2 \geq 2g_{C_v} - 2 + l_v \geq gr(\omega_{C/k}|_{C_v}).$$

Se tiene la igualdad cuando $x, y \in C_v$ para alguna componente irreducible y además $2g_{C_v} - 2 + l_v = 1$. En una curva estable esto sucede si $g_{C_v} = 0$ y $l_v = 3$ o si $g_{C_v} = 1$ y $l_v = 1$ y en ambos casos esa no puede ser la única componente irreducible de la curva. Sea $C_{v'}$ otra componente irreducible de C , en este caso $gr(\mathcal{L}'|_{C_{v'}}) > gr(\omega_{C/k}|_{C_{v'}})$, luego estamos en las hipótesis del Lema 4.15 y $H^1(C, \mathbf{m}_x \mathbf{m}_y \mathcal{L}) = 0$.

En los demás casos alguno de los puntos x, y es singular; consideramos la explosión en estos puntos $\mu : \tilde{C} \rightarrow C$. Denotamos $\tilde{\mathcal{L}}'$ al haz de línea en \tilde{C} tal que $\mu_* \tilde{\mathcal{L}}' = \mathcal{L}'$ y utilizamos que $H^1(C, \mathcal{L}') = H^1(\tilde{C}, \tilde{\mathcal{L}}')$ (véase Observación 4.14).

Si x es un punto singular e y es un punto no singular tenemos dos casos. Si tomamos como C_v una componente irreducible que no contenga a y de la Ecuación 4.2.1 se deduce que

$$gr(\mathcal{L}'|_{C_v}) \geq gr(\omega_{\tilde{C}/k}|_{C_v}) + 2g_{C_v} - 2 + l_v > gr(\omega_{\tilde{C}/k}|_{C_v}).$$

En el caso en que $y \in C_v$ se tiene que

$$gr(\mathcal{L}'|_{C_v}) - gr(\tilde{\mathcal{L}}'|_{\tilde{C}_v}) = gr(\omega_{C/k}|_{C_v}) - gr(\omega_{\tilde{C}/k}|_{\tilde{C}_v}) + 1$$

y de ahí deducimos que

$$gr(\mathcal{L}'|_{C_v}) \geq gr(\omega_{\tilde{C}/k}|_{C_v}) + 2(2g_{C_v} - 2 + l_v) - 1 > gr(\omega_{\tilde{C}/k}|_{C_v})$$

y concluimos de nuevo por el Lema 4.15 encontrando una sección que se anula en una de las componentes irreducibles y por ser C conexa acabamos.

Si x, y son dos puntos singulares distintos y $\mu : \tilde{C} \rightarrow C$ la normalización parcial los puntos x, y , tenemos que $\mu_* \omega_{\tilde{C}/k} = \mathbf{m}_x \mathbf{m}_y \omega_{C/k} = \mathcal{L}'$. La Ecuación 4.2.1 se cumple en ese caso por se los puntos distintos y tenemos que en cada componente irreducible C_v de C

$$gr(\mathcal{L}'|_{C_v}) \geq gr(\omega_{\tilde{C}/k}|_{C_v}) + 2(2g_{C_v} - 2 + l_v) > gr(\omega_{\tilde{C}/k}|_{C_v})$$

concluyendo de forma análoga.

Por último, si $x = y$ es un punto singular y $\mathcal{L}' = \mathfrak{m}_x^2 \mathcal{L}$. Tenemos que

$$gr(\mathcal{L}'|_{C_v}) - gr(\tilde{\mathcal{L}}'|_{\tilde{C}_v}) = 2gr(\omega_{C/k}|_{C_v}) - 2gr(\omega_{\tilde{C}/k}|_{\tilde{C}_v})$$

y deducimos que

$$gr(\mathcal{L}'|_{C_v}) \geq 2gr(\omega_{\tilde{C}/k}|_{C_v}) - 2gr(\omega_{C/k}|_{C_v}) + 3(2g_{C_v} - 2 + l_v) \geq 2gr(\omega_{\tilde{C}/k}|_{C_v}) + 2g_{C_v} - 2 + l_v.$$

En el caso en que se tiene las desigualdades es claro. Si se tiene la igualdad, $gr(\omega_{C/k}|_{C_v}) = 2g(C_v) - 2 + l_v$ y esta cantidad es mayor que cero por estabilidad.

Tenemos tres posibilidades :

- $gr(\omega_{\tilde{C}/k}|_{\tilde{C}_v}) = gr(\omega_{C/k}|_{C_v}) + 2$ si la única componente irreducible que contiene a x es C_v , en cuyo caso $2 \leq l_v$;
- $gr(\omega_{\tilde{C}/k}|_{\tilde{C}_v}) = gr(\omega_{C/k}|_{C_v}) + 1$ si x está contenido en dos componentes irreducibles y C_v es una de ellas, en cuyo caso $1 \leq l_v$;
- $gr(\omega_{\tilde{C}/k}|_{\tilde{C}_v}) = gr(\omega_{C/k}|_{C_v})$ si x no pertenece a C_v .

El único caso posible en el que en una componente irreducible de una curva estable cumpla que $2gr(\omega_{\tilde{C}/k}|_{C_v}) + 2g_{C_v} - 2 + l_v = 0$ es si C_v es la única componente que contiene al punto doble $x = y$, $g_{C_v} = 0$ y $l_v = 3$. Eso implica que $gr(\tilde{\mathcal{L}}'|_{C-v}) \geq gr(\omega_{\tilde{C}/k}|_{C_v})$ para toda componente C_v y si se tiene la igualdad entonces C_v es la única componente que contiene el punto doble, $g_{C_v} = 0$ y $l_v = 3$ en cuyo caso ha de existir alguna otra componente irreducible y el grado de la restricción de $\tilde{\mathcal{L}}$ a dicha componente es estrictamente mayor que el de la restricción de $\omega_{\tilde{C}/k}$, luego por el Lema 4.15 acabamos. \square

Corolario 4.17. *Sea $\pi : X \rightarrow S$ una familia de curvas estables de género $g \geq 2$; entonces para $n \geq 3$ $\omega_{X/S}^{\otimes n}$ es relativamente muy amplio y $\pi_*(\omega_{C/k}^{\otimes n})$ es un haz localmente libre en S de rango $n(2g - 2) - g + 1$.*

Demostración. Para todo punto cerrado $s \in S$, la fibra X_s es una curva estable y por ser el morfismo π plano tenemos que $H^1(C_s, \omega_{C/S}^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_{C_s}) = 0$ para $n \geq 2$ por el Lema 2.17, luego $\pi_*(\omega_{C/S}^{\otimes n})$ es localmente libre y $\pi_*(\omega_{C/S}^{\otimes n}) \otimes \kappa(s) \simeq H^0(C_s, \omega_{C/S}^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_{C_s})$. \square

Dada una familia de curvas estables $f : X \rightarrow S$ el dualizante $\omega_{X/S}^{\otimes n}$ es relativamente muy amplio para $n \geq 3$. Tomando $n = 3$ podemos dar una inmersión de cualquier familia de curvas estables en \mathbb{P}^{5g-6} como un subesquema cerrado de polinomio de Hilbert $P(m) = (6g - 6)m - g + 1$.

Se puede razonar igual que para las curvas lisas de género 2 y obtener un subesquema $H_g \subset \text{Hilb}_{\mathbb{P}^{5g-6}}^P$ que parametriza todas las curvas estables inmersas en \mathbb{P}^{5g-6} vía la inmersión tricanónica y así

$$\text{Hom}(S, H_g) \simeq \left\{ \begin{array}{l} \text{Familias de curvas estables } \pi : C \rightarrow S \\ \text{e isomorfismos } \mathbb{P}(\pi_*(\omega_{X/S}^{\otimes 3})) \simeq \mathbb{P}^{5g-6} \times_k S \end{array} \right\} /_{\text{iso}}.$$

En este caso también se tiene una familia universal de curvas estables tricanónicas $U_g \subset \mathbb{P}^{5g-6} \times_k H_g$. Considerando la acción de PGL_{5g-6} en H_g , tenemos que el functor de módulos de curvas estables es la hacificación del cociente de funtores $H_g^\bullet / \mathbf{PGL}_{5g-6}$.

De igual manera, el cociente geométrico $\overline{M}_g = H_g / PGL_{5g-6}$ es un espacio de módulos grosero para \overline{M}_g .

Observación 4.18. *Para una construcción detallada los espacios de módulos \overline{M}_g haciendo uso de la teoría geométrica de invariantes véase [12].*

Observación 4.19. *En [11] Deligne y Mumford, una vez construyen H_g demuestran que H_g es liso (sobre \mathbb{Z}) [11, Corolario 1.7], que es separado [11, Lema 1.12] y que es irreducible [11, Sección 3]. Además el subconjunto H_g^0 de H_g que parametriza las curvas lisas es un abierto denso de H_g , de hecho H_g^0 es el esquema $H_{g,3}$ de la Proposición 3.16.*

Para ver que el espacio de módulos de curvas estables es propio [11, Teorema 5.2] se introduce el lenguaje de stacks que presentaremos en la siguiente sección.

Supondremos que $2g - 2 + n \geq 1$. Consideramos los problemas de módulos dados por

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,n} := \{\text{Curvas estables } C \text{ sobre } k \text{ de género } g \text{ con } n \text{ puntos marcados}\}$$

y diremos que dos curvas $(C, p_1, \dots, p_n), (C', p'_1, \dots, p'_n) \in \overline{\mathcal{M}}_g$ son $\overline{\mathcal{M}}_g$ -equivalentes si existe un isomorfismo $\varphi : C \rightarrow C'$ tal que $\varphi(p_i) = p'_i$.

El functor de familias parametrizadas $\overline{fam}_{g,n} : \mathbf{Sch}_k^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$ es el definido por

$$\overline{fam}_{g,n}(S) := \left\{ \begin{array}{l} \pi : X \rightarrow S \text{ familias de curvas estables de género } g \\ \text{parametrizadas por } S \text{ con } n \text{ secciones disjuntas} \end{array} \right\}$$

Dada $\mathcal{X} = (X, S, \pi, \sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \overline{fam}_{g,n}(S)$ y $f : S' \rightarrow S$ morfismo de esquemas, entonces $f^*\mathcal{X} = (X \times_S S', S', \pi_2, f^*\sigma_1, \dots, f^*\sigma_n) \in \overline{fam}_{g,n}(S')$ es una familia de curvas estables donde $f^*\sigma_i = \sigma_i \circ f$.

Dos familias de curvas estables $\mathcal{X}, \mathcal{X}' \in \overline{fam}_{g,n}(S)$ son equivalentes sobre S , $\mathcal{X} \sim_S \mathcal{X}'$, cuando sean familias de curvas estables marcadas S -isomorfas (Observación 4.3). Además si $f : S' \rightarrow S$ morfismo de esquemas y $\mathcal{X} \sim_S \mathcal{X}'$, entonces es claro que $f^*\mathcal{X} \sim_{S'} f^*\mathcal{X}'$.

Denotamos por $\overline{\mathcal{F}}_{g,n}$ al functor de módulos asociado al problema de módulos $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$:

$$\begin{array}{lcl} \overline{\mathcal{F}}_{g,n} : \mathbf{Sch}_k^{op} & \longrightarrow & \mathbf{Sets} \\ S & \longmapsto & \overline{fam}_{g,n}(S) / \sim_S \\ f : S' \rightarrow S & \longmapsto & f^* : \overline{\mathcal{F}}_{g,n}(S) \rightarrow \overline{\mathcal{F}}_{g,n}(S') \text{ con } [\mathcal{X}]_S \mapsto [f^*\mathcal{X}]_{S'} \end{array}$$

con las notaciones precedentes.

El Teorema 4.16 se puede generalizar para el caso de curva estables n -marcadas:

Teorema 4.20. *[18, Teorema 1.8 y Corolario 1.9] Sea (C, p_1, \dots, p_n) es una curva estable n -marcada tal que $2g - 2 + n \geq 1$ y $\mathcal{L} = \omega_{C/k}(p_1 + \dots + p_n)$, entonces si $n \geq 2$ $H^1(C, \omega_{C/k}^{\otimes n}) = 0$ y $H^0(C, \omega_{C/k}^{\otimes n})$ no tiene puntos base; y si $n \geq 3$ el haz $\omega_{C/k}^{\otimes n}$ es muy amplio.*

Se deduce que podemos dar una inmersión cerrada canónica de cualquier curva estable con n puntos marcados (C, p_1, \dots, p_n) en $\mathbb{P}(\omega_{C/k}^\nu(D)) \simeq \mathbb{P}_k^{\nu(2g-2+n)-g}$ donde $\nu \geq 3$ con $D = p_1 + \dots + p_n$ siendo el polinomio de Hilbert de esta inmersión $P(m) = \nu(2g-2+n)m + 1 - g$. Nótese que como $h^1(C, \omega_{C/k}^{\otimes \nu}(D)) = 0$ por el Teorema de Riemann-Roch, $h^0(C, \omega_{C/k}^{\otimes \nu}(D)) = gr(\omega_{C/k}^{\otimes \nu}(D)) + 1 - g$ y $P(m) = h^0(C, \omega_{C/k}^{\otimes \nu m}(D))$.

4.2.3. Breve introducción a la noción de stack

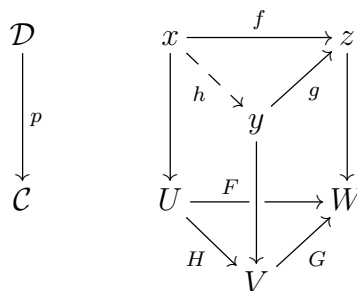
La intuición detrás de un stack es considerar una estructura de categoría relativa a otra categoría que tomamos como base. En esta oportunidad la categoría base será **Sch**, como sabemos un punto en un esquema es un conjunto mientras que un punto en un stack tendrá estructura de categoría y además los morfismos de esta categoría serán todos isomorfismos. En este sentido resultan adecuados para estudiar problemas de móduli ya que un punto puede codificar simultáneamente el objeto a parametrizar y sus automorfismos. Una consecuencia de este hecho es que al considerar el cociente de un esquema X por la acción de un grupo G , en el caso que se expone en el Ejemplo 4.28, el stack conserva la información ciertos elementos de G cuya acción es trivial en X .

Veremos cómo se definen los stacks de curvas estables y comentando brevemente algunos de los resultados que se pueden probar haciendo uso de este formalismo.

Sea \mathcal{C} una categoría, llamaremos **categoría sobre \mathcal{C}** a una pareja (\mathcal{D}, p) formada por una categoría \mathcal{D} y un functor covariante $p : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ llamado morfismo de estructura. Si $x \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ (resp. un morfismo f en \mathcal{D}) y $p(x) = U \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ (resp. $p(f) = F$), diremos que x yace sobre U (resp. f yace sobre F). Para cada $U \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, denotamos a su anti-imagen por p como $\mathcal{D}_U = p^{-1}(U)$.

Definición 4.21. Sea $p : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ una categoría sobre \mathcal{C} . Se dice que la categoría \mathcal{D} es **fibrada en grupoides** sobre \mathcal{C} si se cumple que:

- (1) para todo morfismo $F : U \rightarrow V$ en \mathcal{C} y cualquier $y \in \text{Obj}(\mathcal{D}_V)$, existe un morfismo $f : x \rightarrow y$ en \mathcal{D} tal que f yace sobre F y
- (2) dados dos morfismos $f : x \rightarrow z$ y $g : y \rightarrow z$ en \mathcal{D} , sean $F : U \rightarrow W$ y $G : V \rightarrow W$ sus respectivas imágenes en \mathcal{C} , entonces para todo morfismo $H : U \rightarrow V$ en \mathcal{C} tal que $F = G \circ H$, existe un único morfismo $h : x \rightarrow y$ en \mathcal{D} tal que $f = g \circ h$ y $p(h) = H$.



Dado un morfismo $F : U \rightarrow V$ en \mathcal{C} , para cada $y \in \text{Obj}(\mathcal{D}_V)$ supongamos fijado un $f : x \rightarrow y$ que, de la definición, se deduce que es único salvo isomorfismos canónicos; y denotaremos $F^*y := x$. Además también se deduce fácilmente que f es un isomorfismo si y solo si $p(f) = F$ es un isomorfismo.

Nótese que \mathcal{D}_U es una subcategoría de \mathcal{D} formada por los objetos de \mathcal{D} que yacen sobre $U \in \text{Obj}(\mathcal{C})$. Se tiene que $F^* : \mathcal{D}_V \rightarrow \mathcal{D}_U$ es un functor y se cumple que $(FG)^* \simeq G^*F^*$ son canónicamente isomorfos.

Sea \mathbf{Sch} la categoría de esquemas dotada de una topología de Grothendieck (v.g. la topología étale). Vamos a considerar categorías fibradas en grupoides sobre \mathbf{Sch} , $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sch}$. En este caso, dada una familia de morfismos de esquemas $\varphi_i : U_i \rightarrow U$, y $x \in \text{Obj}(\mathcal{C}_U)$, utilizaremos la notación $x|_i := \varphi_i^*x$ y para $\varphi_{ij,i} : U_i \times_U U_j \rightarrow U_i$ y $x_i \in \text{Obj}(\mathcal{C}_{U_i})$, denotaremos por $x_i|_{ij}$ al pullback $\varphi_{ij,i}^*x_i$. Con estas notaciones establecidas, fijamos $\{\varphi_i : U_i \rightarrow U\}$ un recubrimiento de U cualquiera para la topología considerada en \mathbf{Sch} (v.g. si tomamos la topología étale en \mathbf{Sch} , entonces los morfismos φ_i han de ser morfismos étale tales que $U = \bigcup \varphi_i(U_i)$); una colección de $x_i \in \text{Obj}(\mathcal{C}_{U_i})$ y morfismos $\psi_{ij} : x_j|_{ij} \rightarrow x_i|_{ij}$ tales que cumplen la condición de cociclo $\psi_{ij}|_{ijk} \circ \psi_{jk}|_{ijk} = \psi_{ki}|_{ijk}$ se llamará **dato de descenso** relativo al recubrimiento y diremos que un dato de descenso es **efectivo** si existe un objeto $x \in \text{Obj}(\mathcal{C}_u)$ y morfismos $\Psi_i : x|_i \xrightarrow{\sim} x_i$ tales que $\Psi_i|_{ji} = \psi_{ji} \circ \Psi_i|_{ij}$.

Para obtener el stack de módulos de curvas estables, la topología de Grothendieck considerada por [11] en \mathbf{Sch} es la topología étale, por tanto definiremos los stacks específicamente sobre esta categoría. No obstante, la definición de stack se puede dar de modo general para una categoría \mathcal{C} con productos y productos fibrados dotada de una topología de Grothendieck.

Definición 4.22. *Un **stack (en grupoides)** sobre \mathbf{Sch} con la topología étale, \mathcal{C}/\mathbf{Sch} , es una categoría fibrada en grupoides sobre \mathbf{Sch} , $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sch}$ tal que*

- (1) *Para todo esquema U y cualesquiera objetos x_1, x_2 en \mathcal{C}_U , denotando $\mathbf{Sch}/U = \mathbf{Sch}_U$ la categoría sobre U dada por $p_U : \mathbf{Sch} \rightarrow U$, entonces el functor*

$$\begin{aligned} \mathbf{Sch}_U &\longrightarrow \mathbf{Sets} \\ F : V \rightarrow U &\rightsquigarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_V}(F^*x_1, F^*x_2) \end{aligned}$$

es un haz en \mathbf{Sch}_U (v.g. para la topología étale).

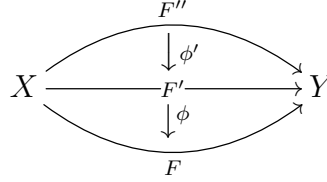
- (2) *Dado $\{\varphi_i : U_i \rightarrow U\}$ un recubrimiento de U , todo dato de descenso relativo al recubrimiento es efectivo.*

Ahora bien, queremos definir una “categoría” cuyos objetos sean los stacks sobre \mathbf{Sch} ya que hablaremos más adelante de morfismos entre stacks sobre \mathbf{Sch} . El modo de proceder es introducir una noción más general de categoría que es la siguiente:

Definición 4.23. [1, Definición 003H] *Una **2-categoría** \mathcal{B} consiste en dar*

- *una colección de objetos $\text{Obj}(\mathcal{B})$*

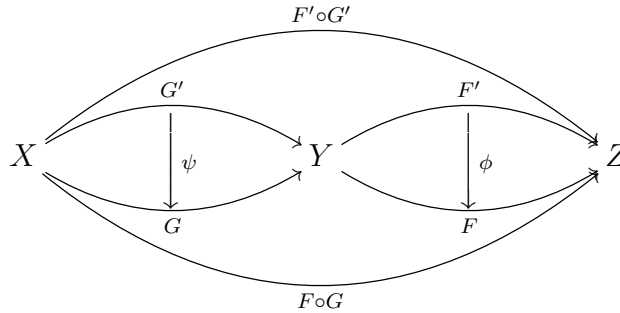
- para cada pareja de objetos $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{B})$ una categoría $\text{Mor}_{\mathcal{B}}(x, y)$ cuyos objetos $F : X \rightarrow Y$ se llaman **1-morfismos**, los morfismos entre objetos se llaman **2-morfismos** $\phi : F' \rightarrow F$ y dados dos 2-morfismos $\phi : F' \rightarrow F$, $\phi' : F'' \rightarrow F'$ su composición es $\phi \circ \phi' : F'' \rightarrow F$ y se llama **composición vertical**:



- Para cada $X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{B})$ un functor

$$(\circ, \star) : \text{Mor}_{\mathcal{B}}(Y, Z) \times \text{Mor}_{\mathcal{B}}(X, Y) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{B}}(X, Z)$$

donde la imagen de una pareja de 1-morfismos (F, G) es su composición que denotamos $F \circ G$ y la imagen de cada pareja de 2-morfismos (ϕ, ψ) se llama composición horizontal y se denota como $\phi \star \psi : F' \circ G' \rightarrow F \circ G$ con las notaciones del diagrama:



Cumpliendo:

- la colección de objetos junto con los 1-morfismos y la composición de 1-morfismos, \circ , forma una categoría
- la composición horizontal \star de 2-morfismos es asociativa
- el 2-morfismos identidad $\text{Id}_{\text{Id}_X} : \text{Id}_X \rightarrow \text{Id}_X$ con $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ el 1-morfismo identidad, es neutro respecto de la composición horizontal.

De este modo, la colección de stacks sobre **Sch** es una 2-categoría \mathcal{B}_{Sch} donde los objetos son los stacks \mathcal{C}/Sch , los 1-morfismos son funtores entre stacks $B : \mathcal{C}/\text{Sch} \rightarrow \mathcal{D}/\text{Sch}$ compatibles con los morfismos de estructura y los 2-morfismos son morfismos de funtores. En este caso todos los 2-morfismos son isomorfismos y existen los 2-productos fibrados.

Dado un stack \mathcal{C}/Sch y X un esquema, llamaremos a la fibra de X vía el morfismo de estructura \mathcal{C}_X **categoría de secciones** de \mathcal{C} sobre X .

Al igual que en teoría de categorías el Lema de Yoneda nos permite pensar los objetos de una categoría \mathcal{C} como funtores $\text{Func}(\mathcal{C}^{opp}, \mathbf{Sets})$ y establecer la noción de representabilidad de un functor, en el caso de un stack \mathcal{C}/Sch podemos proceder de forma similar.

En general, dado T un esquema sobre S , con $P : T \rightarrow S$ su morfismo estructural, consideramos la categoría de esquemas sobre T , \mathbf{Sch}_T . Definimos el functor

$$p_{T,S} : \mathbf{Sch}_T \longrightarrow \mathbf{Sch}_S$$

como aquel que aplicado a un T -esquema es $p_{T,S}(f_X : X \rightarrow T) = P \circ f_X : X \rightarrow S$ y que manda un morfismo de T -esquemas $\varphi : (X, f_X) \rightarrow (X', f'_X)$ al morfismo de S -esquemas $\varphi : (X, P \circ f_X) \rightarrow (X', P \circ f'_X)$. De esta manera $\mathbf{T}^\bullet := \mathbf{Sch}_T$ es un stack sobre \mathbf{Sch}_S y lo llamaremos **stack asociado al esquema T** .

Dar \mathbf{T}^\bullet equivale a dar la asignación que a cada $X \in \mathbf{Sch}_S$ le asocia su categoría de secciones, \mathbf{T}_X^\bullet , definida como aquella en que los objetos son los morfismos de S -esquemas de X en T , $\text{Hom}_S(X, T)$, y los morfismos entre objetos son la identidad.

Se dice que un stack \mathcal{C} sobre \mathbf{Sch}_S es un **stack representable** por un S -esquema T cuando el stack \mathcal{C} es \mathbf{Sch}_S -isomorfo al stack asociado a T .

Observación 4.24. *Un stack tal que alguno de sus objetos tiene un automorfismo distinto a la identidad no es representable por un esquema.*

El Lema de Yoneda se puede generalizar al siguiente resultado:

Lema 4.25. *Sea \mathcal{C} un stack sobre \mathbf{Sch}_S y $T \in \mathbf{Sch}_S$, entonces el functor*

$$u : \text{Nat}_{\mathbf{Sch}_S}(\mathbf{T}^\bullet, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}_T$$

que manda un morfismo de stacks $F : \mathbf{T}^\bullet \rightarrow \mathcal{C}$ a $F(\text{Id}_T)$ es una equivalencia de categorías.

Definición 4.26. *Se dice que un 1-morfismo de stacks $\Phi : \mathcal{C}_1/\mathbf{Sch} \rightarrow \mathcal{C}_2/\mathbf{Sch}$ es un **1-morfismo representable** si para todo $X \in \mathbf{Sch}$, y todo 1-morfismo $x : \mathbf{X}^\bullet \rightarrow \mathcal{C}_2$ el producto fibrado $\mathbf{X}^\bullet \times_{\mathcal{C}_2} \mathcal{C}_1$ es un stack representable.*

Si \mathbf{P} es una propiedad de un morfismo $f : X \rightarrow Y$ en \mathbf{Sch} estable por cambio de base y local en Y (por ejemplo, si \mathbf{P} es isomorfismo, plano, liso, (cuasi-)separado o cuasi-compacto), se dice que un 1-morfismo $\Phi : \mathcal{C}_1/\mathbf{Sch} \rightarrow \mathcal{C}_2/\mathbf{Sch}$ de stacks sobre \mathbf{Sch} tiene la propiedad \mathbf{P} cuando para todo 1-morfismo $x : \mathbf{X}^\bullet \rightarrow \mathcal{C}_2$ como antes, el morfismo inducido $\mathbf{X}^\bullet \times_{\mathcal{C}_2} \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathbf{X}^\bullet$ tiene la propiedad \mathbf{P} .

Al igual que a los espacios anillados se les requiere cumplir ciertas propiedades para dar la noción de esquema y garantizar que los objetos estudiados tienen unas “características geométricas” adecuadas, los stacks con los que se trabaja a nivel geométrico en nuestro caso son los stacks algebraicos:

Definición 4.27. *Se llama **stack algebraico** a un stack \mathcal{C} sobre \mathbf{Sch} (con la topología étale) tal que*

- (1) *El morfismo diagonal $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ es representable*
- (2) *Existe un 1-morfismo $x : \mathbf{X}^\bullet \rightarrow \mathcal{C}$ con X un esquema, llamado **atlas**, tal que para todo morfismo $y : \mathbf{Y}^\bullet \rightarrow \mathcal{C}$ con $Y \in \mathbf{Sch}$, la proyección $\mathbf{X}^\bullet \times_{\mathcal{C}} \mathbf{Y}^\bullet \rightarrow \mathbf{Y}^\bullet$ es un morfismo liso y epiyectivo*

Se dice que un stack algebraico es un **stack de Deligne-Mumford** si el morfismo x es además étale

Ejemplo 4.28. (Stack cociente por la acción de un grupo): Sea X un S -esquema y G un S -esquema en grupos étale, separado y de tipo finito que actúa en X por la derecha. Se define el stack cociente $[X/G]$ como aquel cuyas categorías de secciones son G fibrados principales $\pi : P \rightarrow S$ junto con un morfismo G -equivariante $\gamma : P \rightarrow X$ y los 1-morfismos son diagramas cartesianos

$$\begin{array}{ccc} P' & \xrightarrow{\sigma} & P \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ S' & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

cumpliendo además que $\gamma \circ \sigma = \gamma'$. Nótese que el morfismo natural $\mathbf{X}^\bullet \rightarrow [X/G]$ es étale y epiyectivo y además se puede ver que el morfismo diagonal es representable con lo que $[X/G]$.

La diferencia fundamental entre el cociente de esquemas y el cociente de stacks sobre la categoría de esquemas reside en el hecho de que puede suceder que al hacer el cociente de un esquema por dos grupos distintos se obtenga el mismo cociente, sin embargo los correspondientes stacks son distintos puesto que conservan la información de los elementos cuya acción es trivial en el siguiente sentido: Si tenemos X un esquema y G un grupo algebraico afín que actúa libremente en X tal que existe un subgrupo normal $H \subset G$ tal que su acción en X es trivial, se tiene que como esquemas $X/G = X/(G/H)$, sin embargo como stacks $[X/G]$ y $[X/(G/H)]$ son diferentes. Dado $p = (\pi : P \rightarrow S, \gamma : P \rightarrow X)$ un punto cualquiera de $[X/G]$, el grupo automorfismo de dicho puntos es el estabilizador G_x con $x \in X$ un punto en la órbita de p , o sea el grupo de automorfismos es H y en particular el stack $[X/G]$ no puede representarse por un esquema, mientras que en el caso de $[X/(G/H)]$ el grupo de automorfismos en cada punto es trivial y en este caso se puede probar que sí es representable por un esquema.

Los stacks $\overline{\mathfrak{M}}_g$ y $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$

Se define la categoría de curvas estables n -marcadas, $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$, como aquella cuyos objetos son las familias de curvas $X \rightarrow S$ de género g con n secciones disjuntas y donde los morfismos son diagramas de la forma

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{F} & X \\ \sigma_i \left(\downarrow \pi' & & \downarrow \pi \right. \\ S' & \xrightarrow{f} & S \end{array} \left. \right) \sigma_i$$

con $F \circ \sigma'_i = \sigma_i \circ f$ para $i = \{1, \dots, n\}$ y el morfismo $X' \rightarrow X \times_S S'$ inducido por F y π' es un isomorfismo. Cuando $n = 0$ denotaremos a la categoría por $\overline{\mathfrak{M}}_g$.

Estas categorías son stacks tomando como categoría de secciones sobre un esquema S es la categoría de familias de curvas de género g sobre S donde los morfismos son los isomorfismos de esquemas sobre S .

Se puede demostrar que $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$ es isomorfo al stack $[H_{g,n}^\nu / PGL((2\nu - 1)(g - 1) - \nu n)]$ donde $H_{g,n}^\nu$ es el esquema de Hilbert que parametriza las curvas estables de género g con

n puntos marcados ν -canónicamente embebidas en \mathbb{P}_k^N con $N = (2\nu - 1)(g - 1) - \nu n$, (véase [3, Teorema 5.5.6]).

Consideramos ahora al categoría $\mathfrak{U}_{g,n}$ cuyos objetos son las curvas estables de género g n -marcadas con $n + 1$ secciones añadiendo la sección diagonal definida del modo obvio, donde los morfismos son los análogos a los definidos en la categoría $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$ (considerando las $n + 1$ secciones, o sea de modo que $F \circ \Delta' = \Delta \circ f$ con las notaciones previas). En [18] se demuestra que los stacks $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n} \rightarrow \mathfrak{U}_{g,n-1}$ son isomorfos del modo que sigue.

Definición 4.29. Dadas X, X' dos familias de curvas marcadas sobre un esquema S , diremos que un morfismo entre ellas

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{F} & X \\ \sigma_i \swarrow & & \searrow \sigma_i \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ S & \xlongequal{\quad} & S \end{array}$$

es una **contracción** si X' es una familia de curvas $n + 1$ marcadas y X es una familia de curvas n marcadas cumpliendo que $F \circ \sigma'_i = \sigma_i$ para $1 \leq i \leq n$ y el morfismo inducido entre las fibras geométricas en cada punto geométrico s cumple una de las dos condiciones:

- $F_s : X'_s \rightarrow X_s$ es un isomorfismo
- Existe una componente racional $E \subset X' - S$ tal que $\sigma'_{n+1}(s) \in E$, $F_s(E) = x$ es un punto cerrado de X_s y $F_s : X'_s - E \rightarrow X_s - \{x\}$ es un isomorfismo.

Nótese que si tomamos una curva marcada y consideramos el morfismo que olvida el último de los puntos marcados, la curva marcada obtenida no necesariamente es estable.

En el caso de curvas estables sobre $\text{Spec } k$ solo tenemos dos tipos de contracciones no triviales:

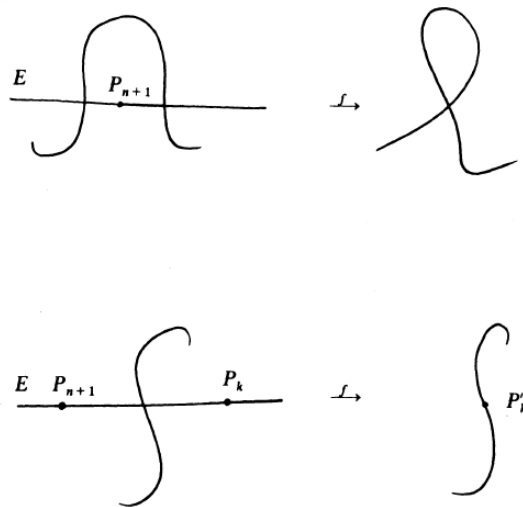


Figura 4.2: [18, Figura 1]

Se prueba que los morfismos de contracción establecen un 1-morfismo de stacks $c : \overline{\mathfrak{M}}_{g,n} \rightarrow \mathfrak{U}_{g,n-1}$ ya que en la [18, Proposición 2.1] se demuestra que dada cualquier familia de curvas estables X sobre un esquema S con $n+1$ puntos marcados y $2g-2+n > 0$ existe una única contracción salvo isomorfismos canónicos y después se construye el morfismo inverso.

Capítulo 5

Móduli de curvas tropicales: relación con los espacios de móduli de curvas algebraicas

Vamos a profundizar en el estudio de la estructura combinatoria que tienen los espacios de móduli de curvas estables a partir de los grafos duales asociados a las curvas. Esto lo haremos con el lenguaje de la geometría tropical, una rama de relativamente reciente aparición dentro de la geometría algebraica.

A modo de breve presentación de la geometría tropical diremos en la que en lugar considerar estructuras algebraicas sobre anillos y cuerpos, se trabaja sobre el semicuerpo tropical $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \text{máx}, +)$ y los semianillos de polinomios definidos sobre este. Los ceros de polinomios tropicales resultan ser complejos poliédricos y se puede trabajar con ellos tomando un enfoque combinatorio a partir de los monomios de dicho polinomio. Por ejemplo, las curvas planas son cierto tipo de grafos en \mathbb{R}^2 y una curva algebraica plana se puede tropicalizar obteniendo una curva tropical que hace las veces de esqueleto combinatorio de la curva algebraica que conserva información de la curva (como pueda ser su género o grado). Al igual que en geometría algebraica se introduce la noción de esquema que entre otras cosas nos permite hablar de curvas sin necesidad de que estén embebidas en un espacio afín o proyectivo, presentaremos la noción de curva tropical, que en ocasiones se denomina curva tropical abstracta, que es un cierto tipo de grafo que adquiere espacial significado en el contexto tropical.

Estableciendo una relación de equivalencia entre las curvas tropicales abstractas que sean en cierto sentido estables obtendremos espacios de móduli que serán complejos poliédricos con los que estaremos de hecho parametrizando los tipos combinatorios de grafos duales a curvas estables de género g y n puntos marcados en función de la longitud de sus aristas acotadas. Asimismo, recopilaremos algunos de los paralelismos entre los espacios de móduli de curvas algebraicas estables y de curvas tropicales estables a partir de la traducción combinatoria de determinados resultados para curvas algebraicas obtenida al pasar al grafo dual de estas.

Las referencias utilizadas principalmente para la elaboración de este capítulo son [5] [6] donde se sigue la construcción dada en [4].

5.1. Curvas tropicales y su móduli

Definición 5.1. Llamaremos **curva tropical** a (Γ, l, w) un grafo $\Gamma = (\Gamma, E(\Gamma), H(\Gamma), \iota, \epsilon)$ tal que no ι no tiene puntos fijos, dotado una función de peso $w : V(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y una función $l : E(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$ que asigna una longitud a cada arista de Γ cumpliendo que $l(e) = \infty$ si y solo si e es una hoja de Γ . Diremos que una curva tropical (Γ, l, w) es una **curva tropical pura** si $w = 0$.

Supondremos, salvo que se indique lo contrario, que las curvas tropicales son grafos conexos, o sea, que su realización geométrica como grafo topológico es conexa. Llamaremos **género de una curva tropical** (Γ, l, w) al género del grafo ponderado (Γ, w) , o sea, con las notaciones establecidas

$$g(\Gamma) = b_1(\Gamma) + |w(\Gamma)|.$$

Diremos que dos grafos ponderados sin aristas no acotadas $(\Gamma, w), (\Gamma', w')$ son del mismo **tipo combinatorio tropical** si Γ' se obtiene a partir de Γ del modo siguiente:

- Quitando o añadiendo vértices de peso 0 y valencia 1 junto con la arista tipo hoja adyacente a este del modo obvio.
- Quitando o añadiendo vértices de peso 0 y valencia 2: en este caso si v es un tal vértice, adyacente a las aristas e_1, e_2 con extremos $\{v_1, v\}, \{v_2, v\}$ respectivamente, se elimina el vértice v y se identifican las aristas e_1, e_2 con una arista e ; y dada una arista e se puede añadir un vértice de peso cero tomando como vértice un punto interior a e obteniendo dos aristas e_1, e_2 .

Nótese que esto define una relación de equivalencia, y diremos que dos grafos ponderados son combinatoriamente equivalentes cuando sean del mismo tipo combinatorio tropical. Además, dos grafos ponderados del mismo tipo combinatorio tropical tienen el mismo género.

Dos curvas tropicales $(\Gamma, l, w), (\Gamma', l', w')$ son **tropicalmente equivalentes** si son del mismo tipo combinatorio tropical y además cuando

- Al quitar una hoja su longitud es nula mientras que al añadir una hoja se le asigna longitud infinita.
- Al quitar un vértice de valencia 2, la arista e tiene longitud $l(e) = l(e_1) + l(e_2)$ (suponiendo que $L + \infty = \infty$ para cualquier $L \in \mathbb{R}$) y al añadir un vértice de valencia 2, las aristas obtenidas e_1, e_2 tienen longitudes tales que $l(e) = l(e_1) + l(e_2)$.

Diremos que dos curvas tropicales $(\Gamma, l, w), (\Gamma', l', w')$ son **isomorfos** si existe un isomorfismo de grafos $\lambda : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ tal que $l = l' \circ \lambda$ y $w = w' \circ \lambda$.

Definición 5.2. Una **curva tropical n -marcada** es una pareja $(\Gamma, \{x_1, \dots, x_n\})$ donde Γ es una curva tropical tal que tiene n aristas no acotadas $\{x_1, \dots, x_n\}$ cuya longitud se considera infinita y a las que nos referiremos como **puntos marcados** de Γ .

Dos grafos ponderados $(\Gamma, \{x_1, \dots, x_n\}, w), (\Gamma', \{x'_1, \dots, x'_n\}, w')$ de género g con n aristas no acotadas con $2g - 2 + n \geq 1$ son del mismo tipo combinatorio tropical cuando

obtenemos uno a partir de la otra añadiendo o quitando aristas y vértices como antes, cumpliendo además que cada arista no acotada x_i va a parar a las respectiva arista no acotada x'_i respetando el marcado. A su vez, dos curvas tropicales n -marcadas $(\Gamma, \{x_1, \dots, x_n\}, l, w), (\Gamma', \{x'_1, \dots, x'_n\}, l', w')$ con $2g - 2 + n \geq 1$ son tropicalmente equivalentes cuando sean del mismo tipo combinatorio y sus funciones de longitud sean compatibles en el mismo sentido que antes. En este caso diremos que dos curvas tropicales n -marcadas son isomorfas si hay un isomorfismo de grafos ponderados que además manda aristas no acotadas a aristas no acotadas en el mismo orden, en particular dos curvas tropicales isomorfas son tropicalmente equivalentes.

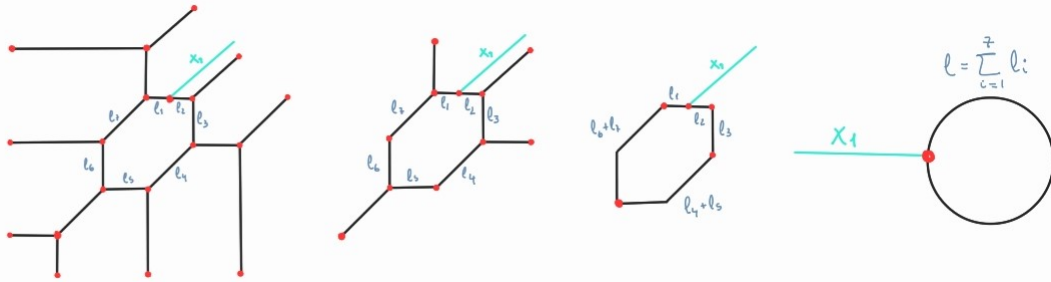


Figura 5.1: Curvas tropicales de género 1 con un punto marcado tropicalmente equivalentes

Observación 5.3. *Se impone la condición de que $2g - 2 + n \geq 1$ para evitar, por ejemplo que una curva tropical de género 1 formada por un vértice de peso 0 y un lazo sea equivalente sea equivalente a quitar el vértice por tener valencia dos ya que, por definición, las curvas tropicales han de tener algún vértice.*

Nótese que con estas definiciones, una curva tropical no es más que el grafo dual asociado a una curva nodal dotado de una función de longitud en las aristas.

Definición 5.4. *Diremos que un **grafo ponderado** (Γ, w) es **estable** si sus vértices de peso 0 tienen valencia mayor o igual a 3 y los vértices peso 1 tienen valencia mayor o igual que 1. Una curva tropical se dice que es **estable** cuando lo sea como grafo ponderado.*

*Diremos que (Γ, w) es un **grafo regular** (resp. (Γ, l, w) **curva tropical regular**) si $\text{val}(v) = 3$ y $w(v) = 0$ para todo $v \in V(\Gamma)$.*

Para estudiar las clases de equivalencia tropical de curvas tropicales veamos primero:

Lema 5.5. *Un grafo estable conexo (Γ, w) de género g con n aristas no acotadas con $2g - 2 + n \geq 1$ tiene un número de aristas $\#E(\Gamma) \leq 3g - 3 + n$ y se tienen la igualdad si y solo si todos sus vértices tienen valencia 3 y $b_1(\Gamma) = g$, y en tal caso $w = 0$, o sea, la igualdad se tiene para los grafos regulares.*

Demostración. Por definición de género tenemos que

$$\#E(\Gamma) = g - |w(\Gamma)| - 1 + \#V(\Gamma) \leq g - 1 + \#V(\Gamma),$$

luego el máximo número de aristas se tiene cuando $|w(\Gamma)| = 0$, o sea, cuando $w = 0$ y por tanto $g(\Gamma) = b_1(\Gamma)$.

Supongamos entonces que $w = 0$ y todos los vértices de Γ tiene valencia mayor o igual que 3. Consideramos el grafo $\bar{\Gamma}$ definido como el grafo Γ añadiendo un vértice de peso 0 en el extremo de cada arista no acotada obteniendo un grafo ponderado no estable con $g(\Gamma) = g(\bar{\Gamma})$. Utilizando que para cualquier grafo G $\#E(G) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} \text{val}(v)$, y que en nuestro caso $\bar{\Gamma}$ por construcción cumple que $\#E(\bar{\Gamma}) = n + \#E(\Gamma)$, tiene n vértices de valencia 1 y $\#V(\Gamma)$ vértices de valencia mayor o igual que 3, deducimos que

$$g(\Gamma) - 1 = \#E(\bar{\Gamma}) - \#V(\bar{\Gamma}) \geq \frac{n}{2} + 3\#V(\Gamma) - (V(\Gamma) + n) = 2\#V(\Gamma) - \frac{n}{2}$$

luego $\#V(\Gamma) \leq 2g - 2 + n$, de donde deducimos la desigualdad del enunciado y que se tiene la igualdad si todos los vértices de Γ son de valencia 3. \square

Proposición 5.6. *Supongamos que $2g - 2 + n \geq 1$, el conjunto de clases de equivalencia de curvas tropicales de género g con n puntos marcados combinatoriamente equivalentes está en biyección el conjunto de grafos ponderados estables de género g con n aristas no acotadas.*

Demostración. Se deduce de la definición de que dos curvas tropicales sean combinatoriamente equivalentes ya que tomando un curva tropical siempre podemos encontrar una que sea combinatoriamente equivalente y que no tenga vértices de peso 0 y valencia menor que tres. \square

Observación 5.7. *En particular se deduce que el conjunto de las clases de equivalencia de curvas tropicales n -marcadas tropicalmente equivalentes está en correspondencia biyectiva con el conjunto de grafos métricos estables con n aristas no acotadas. Además, en cada clase de equivalencia de curvas tropicales n -marcadas tropicalmente equivalentes podemos tomar un representante tal que las n aristas no acotadas sean disjuntas.*

Contracción ponderada de aristas

Por definición de curva tropical (Γ, l, w) , las aristas $e \in E(\Gamma)$ tienen longitud $l(e) > 0$ y a la hora de parametrizarlas tendremos que estudiar que pasa cuando la longitud de alguna de las aristas tienda a 0. Vamos a describir a continuación una construcción que nos permite obtener la curva tropical correspondiente a la contracción de una arista (acotada), de manera que la curva tropical resultante tenga el mismo género (y el mismo número de aristas no acotadas) que antes de contraer la aristas.

Sea (Γ, w) un grafo ponderado con n aristas no acotadas y $S \subset E(\Gamma)$ un conjunto de aristas. Para cada arista $e \in S$ consideramos la contracción $c_e : \Gamma \rightarrow \Gamma_{/e}$ donde mandamos la arista e y sus vértices extremos v_1, v_2 en Γ a un único vértice v de $\Gamma_{/e}$ dejando el resto del grafo sin cambiar. Haciendo esto para todas las aristas de S , obtenemos una curva tropical $\Gamma_{/S}$, de manera que la antiimagen de cada vértice v' de $\Gamma_{/S}$ es una curva tropical (conexa) contenida en $\Gamma - \{E(\Gamma) - S\}$ tal vez formada por un solo vértice. Definimos la función de peso en $(\Gamma_{/S}, w_{/S})$ vía la contracción $c_S : \Gamma \rightarrow \Gamma_{/S}$ como

$$w_{/S}(v') := g(c_S^{-1}(v')) = b_1(c_S^{-1}(v')) + \sum_{v \in c_S^{-1}(v')} w(v).$$

Resumidamente, si contraemos un lazo en el vértice v , el peso de ese vértice aumenta en 1, mientras que si contraemos una arista acotada e con extremos v_1, v_2 , el peso del vértice v al que se contrae es la suma de los pesos de los vértices v_1, v_2 . Por construcción, tenemos que $g(\Gamma, w) = g(\Gamma_{/S}, w_{/S})$ y denotaremos como $(\Gamma_{/S}, w_{/S}) \leq (\Gamma, w)$, cuando $(\Gamma_{/S}, w_{/S})$ a la contracción ponderada de (Γ, l, w) de las aristas $S \subseteq E(\Gamma)$.

Diremos que una curva tropical $(\Gamma_{/S}, l_{/S}, w_{/S})$ es una **especialización** de otra curva tropical (Γ, l, w) si $(\Gamma_{/S}, w_{/S}) \leq (\Gamma, w)$ es una contracción ponderada y $l_{/S} = l|_{\Gamma_{/S}}$.

5.1.1. Móduli de curvas tropicales estables

Supondremos siempre que $2g - 2 + n \geq 1$.

Como hemos visto que las clases de equivalencia de curvas tropicales n -marcadas tropicalmente equivalentes se corresponden biyectivamente con los grafos métricos estables con n aristas no acotadas, vamos a parametrizar estos grafos.

El problema de móduli que vamos a estudiar es el dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{g,n}^{\text{trop}} / \sim_{\mathcal{M}_{g,n}^{\text{trop}}} &= \{ \text{Curvas tropicales estables de género } g \text{ } n\text{-marcadas} \} /_{\text{iso}} = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \text{Curvas tropicales de género } g \text{ } n\text{-marcadas} \\ \text{tropicalmente equivalentes} \end{array} \right\} /_{\text{iso}} = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \text{Grafos métricos estables (ponderados)} \\ \text{de género } g \text{ con } n \text{ aristas no acotadas} \end{array} \right\} /_{\text{iso}} \end{aligned}$$

En primer lugar, dado un grafo estable (ponderado) (Γ, w) tal vez con un número finito de aristas no acotadas, vamos a parametrizar los grafos métricos que podemos obtener a partir de él, o sea, las posibles funciones $l : E(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$; obteniendo conos (poliédricos) abiertos. Después consideraremos todos los posibles grafos métricos estables de género g con n aristas marcadas, parametrizando así las curvas tropicales estables. Además, obtendremos número finito de conos que parametrizan cada tipo combinatorio de curvas tropicales de género g con n puntos marcados y veremos que hay un modo natural de describir la frontera de cada cono considerando la especialización de curvas tropicales.

Sea (Γ, w) un grafo ponderado estable. Fijamos orden en sus aristas $(e_1, \dots, e_{\#E(\Gamma)})$ y definimos

$$R(\Gamma, w) := \mathbb{R}_{>0}^{\#E(\Gamma)} \quad \text{y su cierre} \quad \overline{R(\Gamma, w)} := \mathbb{R}_{\geq 0}^{\#E(\Gamma)},$$

es claro que cada elemento punto de $R(\Gamma, w)$ define un grafo métrico estable (Γ, w, l) haciendo corresponder a cada punto $(a_1, \dots, a_{\#E(\Gamma)})$ la función de longitud tal que $l = l_a$ con $l_a(e_i) = a_i$. Claramente $R(\Gamma, w)$ es un abierto denso en $\overline{R(\Gamma, w)}$.

Denotaremos por $\text{Aut}^n(\Gamma, l, w) := \text{Aut}(\Gamma, \{x_1, \dots, x_n\}, l, w)$, tenemos que $\text{Aut}^n(\Gamma, l, w) \subseteq \text{Aut}(\Gamma, l, w) \subseteq S_{\#E(\Gamma)} \times S_{\#V(\Gamma)}$ es un grupo finito y definimos el cociente

$$\pi : R(\Gamma, w) \longrightarrow M^{\text{trop}}(\Gamma, w) = R(\Gamma, w) / \sim$$

donde $a \sim a'$ si $(\Gamma, w, l_a) \simeq (\Gamma, w, l_{a'})$ y dotamos a $M^{\text{trop}}(\Gamma, w)$ de la topología cociente para el morfismo de paso al cociente.

Nótese que pueden existir automorfismos no triviales de (Γ, w) cuya acción en $R(\Gamma, w)$ es trivial.

Por otra parte, cada punto de la frontera $\partial R(\Gamma, w) = \overline{R(\Gamma, w)} - R(\Gamma, w)$ se corresponde con una especialización de la curva tropical (Γ, l, w) . Supongamos que $a \in \partial R(\Gamma, w)$ es de la forma $a = (a_1, \dots, a_r, 0, \dots, 0)$, este punto se corresponde con la curva tropical estable n -marcada (Γ_a, w_a, l_a) tal que (Γ_a, w_a) se obtiene a partir de (Γ, w) al hacer la contracción ponderada las $\#E(\Gamma) - r$ últimas aristas de Γ y donde definimos $l_a(e'_i) = a_i$ para cada $e'_i \in E(\Gamma_a) = \{e'_1, \dots, e'_r\}$. Claramente (Γ_a, w_a, l_a) es una curva tropical estable n -marcada de género g .

De este modo obtenemos que

$$\overline{R(\Gamma, w)} = \bigsqcup_{I \subseteq \{1, \dots, \#E(\Gamma)\}} R(\Gamma, w)_I$$

donde I es un subconjunto de índices y $R(\Gamma, w)_I = R(\Gamma_{/S_I}, w_{/S_I})$ donde estamos realizado la contracción ponderada de las aristas $S_I = \{e_i : e_i \in E(\Gamma), i \in I\}$ del grafo (Γ, w) .

Nótese que si contraemos todas las aristas de (Γ, w) obtenemos una curva tropical formada por único vértice v de peso $|w| = |w(\Gamma)|$ con n -aristas no acotada adyacentes a v y en este caso $R(\Gamma, w)_I = \{0\}$.

Puntos distintos de $R(\Gamma, w)$ pueden identificarse con curvas tropicales estables isomorfas, luego igual que antes definimos

$$\bar{\pi} : \overline{R(\Gamma, w)} \longrightarrow \overline{M^{\text{trop}}(\Gamma, w)} = \overline{R(\Gamma, w)} / \sim$$

donde $a_1 \sim a_2$ cuando las curvas tropicales asociadas $(\Gamma_{a_1}, l_{a_1}, w_{a_1}), (\Gamma_{a_2}, l_{a_2}, w_{a_2})$ son isomorfas como curvas tropicales n -marcadas y dotamos a $\overline{M^{\text{trop}}(\Gamma, w)}$ de la topología cociente.

Para describir adecuadamente el cociente $\overline{M^{\text{trop}}(\Gamma, w)}$, observemos que puede haber conjuntos de índices distintos $I, J \subset \{1, \dots, \#E(\Gamma)\}$ tales que existe un isomorfismo de grafos (con aristas no acotadas) $\phi_J : (\Gamma_{/S_I}, w_{/S_I}) \xrightarrow{\sim} (\Gamma_{/S_J}, w_{/S_J})$ entre las contracciones de (Γ, w) por los respectivos conjuntos de aristas. Dado I , para cada J como antes, fijamos un isomorfismo ϕ_J y este induce de modo natural una biyección

$$\Phi_J : \overline{R(\Gamma, w)_I} \xrightarrow{\sim} \overline{R(\Gamma, w)_J},$$

que es una isometría (en el sentido de que $|\Phi_J(a)| = |a|$) donde estamos considerando los cierres como subespacios de $R(\Gamma, w)$.

Lema 5.8. *Sea (Γ, w) un grafo estable con n aristas no acotadas. Dado $a \in \overline{R(\Gamma, w)}$, entonces $a \in R(\Gamma, w)_I$ para un cierto conjunto de índices $I \subset \{1, \dots, \#E(\Gamma)\}$ y denotando por $\text{Iso}(a) = \{J \subset \{1, \dots, \#E(\Gamma)\} : (\Gamma_{/S_J}, w_{/S_J}) \simeq (\Gamma_{/S_I}, w_{/S_I})\}$ se cumple que*

$$\bar{\pi}^{-1}(\bar{\pi}(a)) = \{g \cdot \Phi_J(a) \quad \forall J \in \text{Iso}(a) \text{ y } g \in \text{Aut}^n(\Gamma_{/S_J}, w_{/S_J})\}$$

donde estamos considerando la acción de $\text{Aut}^n(\Gamma_{/S_J}, w_{/S_J})$ donde $g \cdot \Phi_J(a)$ se corresponde con el punto que parametriza el grafo métrico obtenido al aplicar el automorfismo g a $(\Gamma_{\Phi_J(a)}, l_{\Phi_J(a)}, w_{\Phi_J(a)})$.

Demostración. Dado el punto $a = (a_1, \dots, a_{\#E(\Gamma)})$, se corresponde con (Γ_a, l_a, w_a) y el conjunto $\{g \cdot \Phi_J(a) \mid \forall J \in Iso(a) \text{ y } g \in \text{Aut}^n(\Gamma_{/S_J}, w_{/S_J})\}$ está formado los de grafos métricos estables con n aristas no acotadas isomorfos a (Γ_a, l_a, w_a) , luego claramente está contenido en $\bar{\pi}^{-1}(\bar{\pi}(p))$.

Sea $F_I = R(\Gamma, w)_I$ la cara abierta del cono $\overline{R(\Gamma, w)}$ que contiene al punto a . Sea $b \in \overline{R(\Gamma, w)}$ otro punto tal que $\bar{\pi}(b) = \bar{\pi}(a)$, o sea, tal que $F_I = (\Gamma_a, l_a, w_a) \simeq (\Gamma_b, l_b, w_b)$ y por tanto $(\Gamma_a, l_a, w_a) \simeq (\Gamma_b, l_b, w_b)$. Tenemos dos casos, si $b \in F_I$, las curvas tropicales Γ_a y Γ_b tienen los mismos grafos ponderados subyacentes y difieren en un automorfismo; si $b \in F_J$ para un conjunto de índices $J \neq I$, vamos a resucirlo al caso anterior. En este caso, por definición $J \in Iso(a)$ y el isomorfismo entre los grafos definidos por a y b induce una isometría $\Phi_J : R(\Gamma, w)_I \xrightarrow{\sim} R(\Gamma, w)_J$ entre las caras abiertas de $R(\Gamma, w)$. El punto $b' = \Phi(a)$ parametriza un grafo métrico ponderado isomorfo a Γ_a y aplicando un automorfismo como antes acabamos. \square

Proposición 5.9. *Sea (Γ, w) un grado estable, entonces*

(1) *Existe una descomposición canónica*

$$\overline{M^{\text{trop}}(\Gamma, w)} = \bigsqcup_{(\Gamma', w') \leq (\Gamma, w)} M^{\text{trop}}(\Gamma', w')$$

y $M^{\text{trop}}(\Gamma, w)$ es un abierto denso de $\overline{M^{\text{trop}}(\Gamma, w)}$.

(2) *El morfismo de paso al cociente $\bar{\pi}$ tiene fibras finitas y factoriza como*

$$\bar{\pi} : \overline{R(\Gamma, w)} \xrightarrow{\tau} \overline{R(\Gamma, w)}/\text{Aut}(\Gamma, w) \xrightarrow{\iota} \overline{M^{\text{trop}}(\Gamma, w)}.$$

Demostración. Como $\overline{R(\Gamma, w)} = \bigsqcup_{I \subseteq \{1, \dots, \#E(\Gamma)\}} R(\Gamma, w)_I$, pasando al cociente obtenemos la descomposición de (1). Además como $R(\Gamma, w)$ es un abierto denso en su cierre y $\bar{\pi}^{-1}(M^{\text{trop}}(\Gamma, w)) = R(\Gamma, w)$, como estamos considerando la topología cociente en $\overline{M^{\text{trop}}(\Gamma, w)}$, deducimos que $M^{\text{trop}}(\Gamma, w)$ es un abierto denso suyo.

Para ver (2), vamos a denotar $G := \text{Aut}(\Gamma, w)$. En el abierto $R(\Gamma, w)$ se tiene que $M^{\text{trop}}(\Gamma, w) = R(\Gamma, w)/G$, luego hemos de ver el comportamiento del cociente en los puntos de la frontera.

Sea $a = (a_1, \dots, a_{\#E(\Gamma)}) \in R(\Gamma, w)_I$ donde $I \subseteq \{1, \dots, \#E(\Gamma)\}$ es un conjunto de índices no vacío y por definición $a_i = 0$ para $i \in I$. Tomamos un automorfismo $g \in G$, este actúa en el conjunto de índices $\{1, \dots, \#E(\Gamma)\}$ como una permutación y deducimos que $g \cdot a = (a_{g^{-1}(1)}, \dots, a_{g^{-1}(\#E(\Gamma))}) \in R(\Gamma, w)_{g \cdot I}$, donde $g \cdot I = \{g \cdot i\}_{i \in I}$.

Razonando como antes, por ser g un automorfismo es fácil comprobar que a y $g \cdot a$ parametrizan grafos métricos isomorfos, luego $\bar{\pi}(a) = \bar{\pi}(g \cdot a)$ y por tanto $\bar{\pi}$ factoriza como en (2). Además $\bar{\pi}$ tiene fibras finitas por el Lema 5.8, ya que los grafos considerados tienen un número finito de aristas. \square

Ejemplo 5.10. Un ejemplo de una curva tropical cuya contracción tiene automorfismos que la curva de partida no tenía es el siguiente, ya que en el grafo obtenido al contraer la arista e_1 podemos permutar los tres lazos y esto define una acción no trivial en $\overline{R(\Gamma, w)}$.

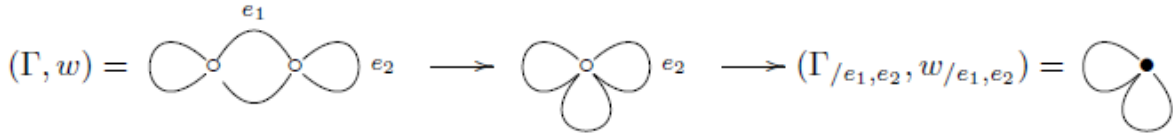


Figura 5.2: [5, Ejemplo 2.28]

Claramente los automorfismos mencionados no vienen inducidos por automorfismos de (Γ, w) y sin embargo para obtener $\overline{M^{\text{trop}}(\Gamma, w)}$ hemos de identificarlos.

Por su parte, los automorfismos que consisten en permutar las dos medias aristas que conforman cada uno de los lazos de la contracción $(\Gamma/e_1, w/e_1)$ sí están inducidos por automorfismos de (Γ, w) . Además, tenemos tres posibilidades a la hora de contraer un lazo e_2 de $(\Gamma/e_1, w/e_1)$ lo cual resulta en grafos ponderados isomorfos que habremos de identificar en $\overline{M^{\text{trop}}(\Gamma, w)}$.

Una vez sabemos cómo parametrizar grafos métricos estables, en particular podemos parametrizar curvas tropicales estables de género g con n puntos marcados. El Lema 5.5 que los grafos estables (Γ, w) de género g con n aristas no acotadas, tienen un número finito de aristas $\#E(\Gamma, w) \leq 3g - 3 + n$ y que se cumple la igualdad cuando todos los vértices de Γ tienen valencia 3 y la función de peso es nula. Definimos

$$M_{g,n}^{\text{trop}} := \left(\bigsqcup_{\substack{\Gamma : \text{val}(v)=3 \forall v \in V(\Gamma), \\ b_1(\Gamma)=g, \#E^\infty(\Gamma)=n}} \overline{M^{\text{trop}}(\Gamma, 0)} \right) / \cong$$

donde \cong denota que estamos identificando los puntos correspondientes a curvas tropicales isomorfas y dotamos a $M_{g,n}^{\text{trop}}$ de la topología cociente.

Teorema 5.11. $M_{g,n}^{\text{trop}}$ parametriza biyectivamente las clases de isomorfismos de curvas tropicales de género g n -marcadas tropicalmente equivalentes.

Demostración. Sea (Γ, l, w) una curva tropical de género g con n aristas no acotadas, para ver que su clase de isomorfismos se corresponde con un punto P_Γ de $M_{g,n}^{\text{trop}}$, basta que veamos que se obtiene vía una contracción ponderada de aristas de una cierta curva tropical $(\Gamma_0, l, 0)$ de género 0 con n aristas no acotadas tal que todos su vértices son de valencia 3. En tal caso, $P_\Gamma \in \overline{R(\Gamma_0, 0)}$.

Denotemos $W = |w(\Gamma)|$. Si $W = 0$ y todos los vértices de Γ tienen valencia 3 no hay nada que decir. Si Γ tiene vértices de valencia mayor que 3, sea $v \in V(\Gamma)$ tal que $\text{val}(v) = r > 3$, consideramos los conjuntos de las medias-aristas adyacentes a v $H_1 = \{h_1, h_2\}$ y $H_2 = \{h_3, \dots, h_r\}$, hacemos corresponder v con una nueva arista acotada e (de longitud finita) con extremos v_1, v_2 distintos tales que H_i es adyacente al vértice v_i . Nótese que las medias-aristas h_i pueden pertenecer a una arista no acotada, a una arista acotada (y en particular a un lazo), sin embargo al contraer e a v no contraemos ningún lazo. Repitiendo este proceso concluimos.

Supongamos que $W > 0$. Elegimos un vértice $v \in V(\Gamma)$ tal que $w(v) > 0$ y definimos otra curva tropical (Γ', w') de manera que (Γ, w) sea una contracción ponderada de (Γ', w') , para ello añadimos un lazo a Γ (de longitud finita) en el vértice v' y definimos la función

de peso w' en Γ' como $w'(v) = w(v)$ para los vértices $v \neq v'$ y $w'(v') = w(v) - 1$, luego $W' = W - 1$. Repitiendo este proceso un número finito de veces obtenemos $(\bar{\Gamma}, l, 0)$ y aplicando el caso anterior acabamos. \square

De lo visto se deduce fácilmente que tenemos una partición

$$M_{g,n}^{\text{trop}} = \bigsqcup_{\substack{(\Gamma,w) \text{ estable de género } g \\ \text{y } n \text{ aristas no acotadas}}} M^{\text{trop}}(\Gamma, w) \quad (5.1.1)$$

a la que llamaremos **estratificación** de $M_{g,n}^{\text{trop}}$ siendo cada $M^{\text{trop}}(\Gamma, w)$ un **estrato**.

Hemos construido $M^{\text{trop}}(\Gamma, w)$ como un cociente del espacio topológico $R(\Gamma, w)$ por un grupo finito y además se puede probar que es un espacio Hausdorff. En general, para un espacio topológico X que contiene un abierto denso que localmente es el cociente de una variedad topológica n -dimensión por la acción de un grupo finito¹ se define su dimensión como $\dim X = n$. Luego tiene sentido definir la dimensión de $M^{\text{trop}}(\Gamma, w)$ como

$$\dim M^{\text{trop}}(\Gamma, w) := \dim R(\Gamma, w) = \#E(\Gamma).$$

Se puede probar además que $M_{g,n}^{\text{trop}}$ es un espacio topológico conexo y Hausdorff que, con la definición de dimensión que acabamos de dar, es de dimensión $3g - 3 + n$.

Observación 5.12. *En el caso de los espacios de móduli de curvas tropicales estables se puede definir su compactificación de forma sencilla, haciendo uso de la compactificación por punto de \mathbb{R} , de modo que obtenemos que $(\mathbb{R} \cup \{\infty\})^m$ es un espacio compacto y Hausdorff. Para ello Caporaso introduce la noción de **curva tropical extendida** n -marcada, como una curva tropical tal que las aristas $E(\Gamma)$ pueden tener longitud infinita y generaliza la construcción de $M_{g,n}^{\text{trop}}$ del modo obvio.*

Observación 5.13. *La construcción de los espacios de móduli de curvas tropicales también se ha formulado con el lenguaje de stacks en [8]. Igual que como se hace en los stacks de curvas estables, se puede obtener una curva universal cosa que no se tiene a priori debido a la presencia de automorfismos.*

Algunos ejemplos sencillos de espacios de móduli de curvas tropicales son los siguientes:

Ejemplo 5.14. Sabíamos ya que $\bar{M}_{0,3} = M_{0,3}$ es un único punto y es claro que como el grafo dual de una curva racional con tres puntos marcados es una curva tropical estable con un único vértice y tres aristas no acotadas marcadas, $M_{0,3}^{\text{trop}}$ es también un único punto.

Ejemplo 5.15. Consideremos el problema de móduli $\mathcal{M}_{0,4}^{\text{trop}} / \sim_{\mathcal{M}_{0,4}^{\text{trop}}}$. Por el Lema 5.5, el mayor número de aristas (acotadas) que pueden tener los grafos considerados es $2g - 3 + n = 0 - 3 + 4 = 1$, luego tenemos cuatro tipos combinatorios y parametrizando la longitud de la arista acotada obtenemos que $M_{0,4}^{\text{trop}}$ está formado por tres copias de $\mathbb{R}_{>0}$ y un punto 0 que parametriza el tipo combinatorio sin aristas acotadas y que aparece de modo natural en la frontera de los $\mathbb{R}_{>0}$ cuando hacemos tender a 0 la longitud de la arista acotada parametrizada:

¹Este tipo de variedades topológicas se llaman orbifolds u orbivarietades.

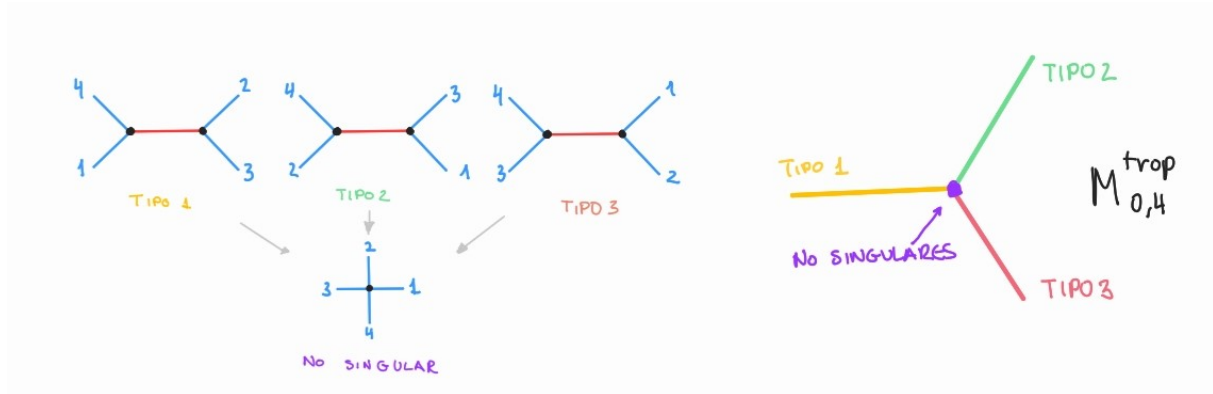


Figura 5.3: A la izquierda podemos ver los 4 tipos combinatorios tropicales y a la derecha el espacio de módulos $M_{0,4}^{\text{trop}}$ que parametriza las curvas tropicales de género 0 con cuatro puntos marcados.

Nótese que ya sabíamos que $\overline{M}_{0,4}$ es la recta proyectiva que habíamos obtenido completando $M_{0,4} = \mathbb{P}_k^1 - \{0, 1, \infty\}$ y de hecho $M_{0,4}^{\text{trop}}$ pensado como grafo formado por un único vértice y tres aristas no acotadas en cierto sentido es una recta tropical (cosa que el lector puede ver con facilidad en la literatura del tema).

Los puntos que hemos añadido parametrizan las curvas estables que tienen por grafo dual alguno de los tres tipos indicados en la imagen y que en $M_{0,4}^{\text{trop}}$ están parametrizados por aristas, lo que sugiere que también hay una cierta dualidad entre los espacios de módulos $\overline{M}_{0,4}$ y $M_{0,4}^{\text{trop}}$ cosa que veremos a continuación.

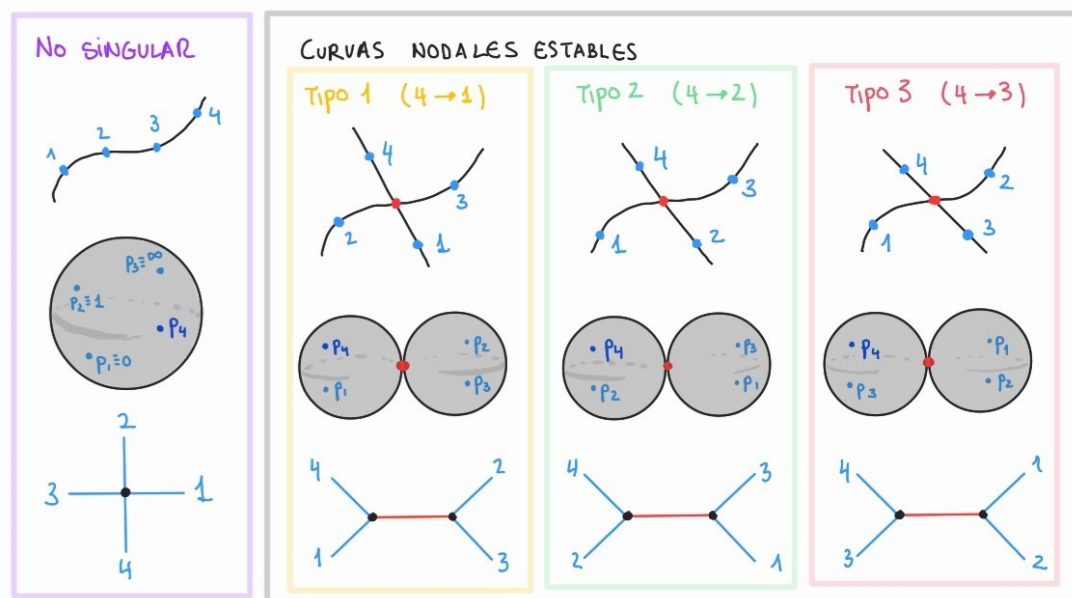


Figura 5.4: Combinando los tres enfoques planteados en el trabajo podemos ver los distintos tipos de curvas estables parametrizadas por $\overline{M}_{0,4}$ (así como su visualización como superficies de Riemann) y los grafos duales a estas que representan los tipos combinatorios de curvas tropicales parametrizados por $M_{0,4}^{\text{trop}}$.

5.2. Relación entre las curvas algebraicas y tropicales y comparación de sus espacios de móduli

Explicamos ahora el significado del tratamiento que le hemos dado a las curvas tropicales si las entendemos como el grafo dual a una curva nodal. No detallaremos completamente los motivos exactos por los que ciertos resultados se cumplen, sino que el foco estará en acercar la motivación detrás de las elecciones aparentemente arbitrarias hechas a lo largo del capítulo.

5.2.1. Equivalencia tropical y modelo estable de una curva nodal

La equivalencia tropical establecida en los grafos como grafos duales a una curva estable se corresponde con el proceso de estabilización que ahora se describe. En el grafo dual explicamos también como eventualmente deberían modificarse las longitudes de las aristas aunque a priori no estemos considerando los grafos como grafos métricos.

Sea (C, p_1, \dots, p_n) una curva sobre k de género g , pre-estable con n puntos marcados, o sea, sus singularidad son puntos dobles ordinarios. Al no ser estable hay componentes irreducibles de X que tales que el grado de $F = \omega_C(p_1 + \dots + p_n)$ es menor o igual que 0 y queremos obtener un modelo estable. Sabemos que para cada componente irreducible C_v de C se cumple la siguiente igualdad

$$gr(F|_{C_i}) = 2g_{C_v} - 2 + \#(C_v \cap \{p_1, \dots, p_n\}) + \#(C_v \cap \overline{X - C_v})$$

(1) En primer lugar, si C_v es una componente irreducible tal que $gr F|_{C_v} < 0$, como C es conexa se deduce que $\#(C_v \cap \overline{X - C_v}) = 1$ y C_v es lisa, racional con $g_{C_v} = 0$ y no contiene ninguno de los puntos marcados p_j de modo que $gr \omega_C(p_1 + \dots + p_n) = -1$. Este tipo de componentes se conocen como **colas racionales**. Quitar dicha componente de C no cambia el género de C , además sigue siendo conexa ya que C_v solo corta a la curva en un punto. Repetimos este proceso (un número finito de veces) hasta que no haya componentes irreducibles de este tipo.

(1)* En el grafo dual de C quitar una de estas componentes C_v es quitar el vértice v correspondiente que tiene peso 0 y la única arista adyacente que tiene que es la dual al punto de intersección $C_v \cap \overline{X - C_v}$. Claramente al iterar este proceso el tipo combinatorio tropical del grafo no cambia.

Podemos suponer que el grado de F en cada componente de C es mayor o igual que 0. Si la curva estable acabamos, si no lo es, hay alguna componente irreducible C_v tal que el grado es 0, o sea, $2g_{C_v} - 2 + \#(C_v \cap \{p_1, \dots, p_n\}) + \#(C_v \cap \overline{X - C_v}) = 0$. Como C es conexa, $\#(C_v \cap \overline{X - C_v}) \geq 1$, luego $g_{C_v} = 0$ y tenemos dos posibilidades, o bien $\#(C_v \cap \overline{X - C_v}) = 2$; o bien $\#(C_v \cap \overline{X - C_v}) = 1$ y $\#(C_v \cap \{p_1, \dots, p_n\}) = 1$:

(2A) Si C_v es tal que $C_v \cap \overline{X - C_v} = \{q_1, q_2\}$ y no contiene ninguno de los puntos marcados. Este tipo de componentes se conocen como **componentes excepcionales**. Puede suceder que q_1, q_2 pertenezcan a distintas componentes irreducibles o que

pertenezcan a una misma componente irreducible, en ambos casos contraemos la componente C_v a un nodo (en el primer si explotamos el nodo obtenido la curva deja de ser conexa y en el segundo caso no). Nótese que este proceso deja invariantes los puntos marcados, no cambia el género de la curva y no añade colas racionales.

- (2A)* En el grafo dual de C quitar una componente excepcional C_v es quitar un vértice v de peso 0 adyacente a dos aristas acotadas $\{e_1, e_2\}$ identificando las aristas e_1 y e_2 con una única arista e (cuya longitud es $l(e) = l(e_1) + l(e_2)$). Esto puede dar lugar a un lazo o a una arista que desconecta el grafo si es eliminada. Por definición, el tipo combinatorio tropical del grafo no cambia.

Podemos suponer ahora que la curva no tiene componentes excepcionales ni colas racionales. Nótese que si la curva no tuviese puntos marcados habríamos acabado.

- (2B) Si C_v es tal que $C_v \cap \overline{X - C_v} = \{q\}$ y $C_v \cap \{p_1, \dots, p_n\} = p_j$, esta es una **componente racional con un punto marcado**. En este caso simplemente eliminamos la componente C_v y marcamos el punto $q = p_j$ que es un punto no singular por ser la curva C nodal y sin componentes excepcionales. Además esto no cambia el género de la curva y no añade componentes excepcionales ni colas racionales y tras un número finito de pasos eliminamos todas las componentes racionales con un punto marcado.
- (2B)* En el grafo dual de C una componente racional con un punto marcado es un vértice v de peso 0 adyacente a una arista acotada e adyacente a otro vértice v' y una arista no acotada p_j . Quitar v consiste en identificar las aristas e y p_j con una única arista no acotada p_j adyacente a v' . Y de nuevo, el tipo combinatorio tropical del grafo no cambia de manera que al final no quedan vértices de valencia menor que 3.

La curva n -marcada obtenida al término de este proceso es una curva estable n -marcada, única salvo isomorfismos, que se denomina **modelo estable** y su grafo dual es un grafo estable del mismo tipo combinatorio tropical. Esta estabilización del grafo dual es una descripción algorítmica que se puede aplicar en la demostración de la Proposición 5.6.

A su vez, a partir de lo visto podemos definir que dos curvas algebraicas nodales n -marcadas son establemente equivalentes si sus modelos estables son isomorfos. Concluyendo así que la parametrización de curvas tropicales parametriza los grafos duales de curvas nodales establemente equivalentes.

5.2.2. Nodos de una curva algebraica estable y longitud de las aristas de la curva tropical asociada

Veremos ahora el motivo por que la longitud de la longitud de las curvas tropicales se ha definido del modo en que lo hemos hecho.

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y K un cuerpo que contiene a k y que es completo respecto de una valoración no arquimediana, esto es, una aplicación $v : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ cumpliendo que $v(a) = \infty$ si y solo si $a = 0$; $v(ab) = v(a) + v(b)$ y $v(a + b) \geq \min(v(a), v(b))$ para todo $a, b \in K$.

Nótese que podemos definir una norma a partir de una valoración tomando $|a| = e^{-v(a)}$ y esta norma cumple que $|a + b| \leq \max(|a|, |b|)$. Supondremos además que $v(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in k$.

Denotaremos por R al anillo de valoración de K . Se puede probar, como consecuencia del Teorema de reducción estable [11, Corolario 2.7] que:

Teorema 5.16. [6, Teorema 3.3.1] *Sea C una curva estable sobre K , existe una extensión finita $K \hookrightarrow K'$ tal que la curva cambiada de base $C' = C \times_{\text{Spec } K} \text{Spec } K'$ admite un modelo estable, o sea, existe una curva estable sobre $X \rightarrow \text{Spec } R'$ tal que su fibra sobre el punto genérico es isomorfa a C' siendo R' el anillo de valoración de K' .*

Dada C una curva lisa sobre K podemos obtener una curva estable C_k sobre k tomando fibra excepcional en $\text{Spec } R$ o en la extensión finita de este obtenida en el Teorema anterior y que denotaremos también por R . Cada nodo de C_k es de la forma $xy = f$ donde f pertenece al maximal de R lo que nos permite definir la longitud de la arista e del grafo dual a C_k correspondiente a dicho nodo como

$$l(e) = v(f)$$

donde supondremos que eventualmente hemos extendido la valoración $v : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ a una valoración en K' (que de hecho está completamente determinada por la valoración en K dadas las hipótesis que estamos considerando).

Observación 5.17. *A raíz de lo dicho en la Observación 5.12 cabe comentar que si C tiene algún nodo, este va a parar a un nodo de C_k y se tendría que $f = 0$ siendo longitud de las arista correspondiente igual a infinito (véase [6, Proposición 3.3.3]).*

Resumidamente, la longitud de las aristas de las curvas tropicales entendidas como grafo dual a una curva estable encierra parcialmente información sobre la naturaleza del nodo al que es dual.

5.2.3. Dualidad en la estratificación de $\overline{M}_{g,n}$ y $\overline{M}_{g,n}^{\text{trop}}$

El estudio de la frontera de los espacios de móduli como sabemos nos da la información sobre como degeneran las familias de objetos parametrizadas de forma continua por el espacio de móduli. En nuestro caso en la frontera las curvas estables que aparecen exhiben un comportamiento combinatorio particular dado por los grafos duales y las contracciones ponderadas de estos.

Supondremos siempre que $2g - 2 + n \geq 1$.

Sea $\overline{M}_{g,n}$ el espacio de móduli grosero de las curvas estables de género g con n puntos marcados y supondremos conocido que es un esquema irreducible, proyectivo de dimensión $3g - 3 + n$. Dado (Γ, w) un grafo ponderado estable de género g con n aristas no acotadas y definimos

$$M^{\text{alg}}(\Gamma, w) = \{(C, \mathbf{p}) \in \overline{M}_{g,n} : (\Gamma_{(C, \mathbf{p})}, w_{(C, \mathbf{p})}) = (\Gamma, w)\},$$

esto es, los puntos de $\overline{M}_{g,n}$ que parametrizan curvas cuyo grafo dual es (Γ, w) .

Lema 5.18. [5, Lema 4.5] Dado cualquier grafo estable (Γ, w) de género g con n aristas no acotadas, $M^{\text{alg}}(\Gamma, w)$ es una variedad quasiproyectiva irreducible y su codimensión en $\overline{M}_{g,n}$ es $\#E(\Gamma)$.

Tenemos por tanto la siguiente estratificación de $\overline{M}_{g,n}$ en el sentido de que no solo es una partición conjuntística sino que es una unión disjunta de variedades algebraicas.

$$\overline{M}_{g,n} = \bigsqcup_{\substack{(\Gamma,w) \text{ estable de género } g \\ \text{y } n \text{ aristas no acotadas}}} M^{\text{alg}}(\Gamma, w). \quad (5.2.1)$$

El siguiente resultado establece la dualidad entre las estratificaciones de $\overline{M}_{g,n}$ y $M_{g,n}^{\text{trop}}$:

Teorema 5.19. [5, Teorema 4.7] Con las notaciones prefijadas se cumple que

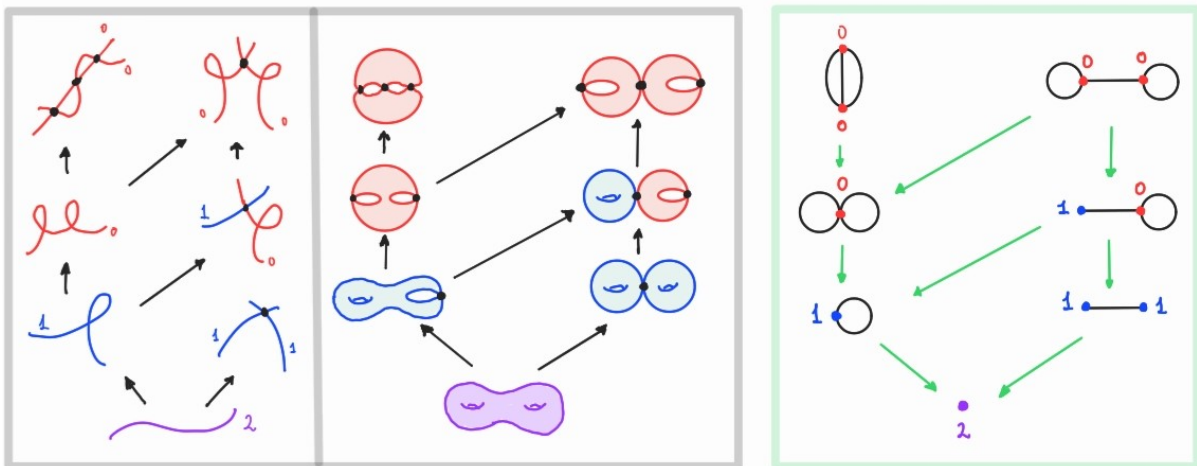
- (1) $\dim M^{\text{alg}}(\Gamma, w) = \text{codim } M^{\text{trop}}(\Gamma, w) = 3g - 3 + n - \#E(\Gamma)$,
- (2) $M^{\text{alg}}(\Gamma, w) \subset \overline{M^{\text{alg}}(\Gamma', w')} \Leftrightarrow M^{\text{trop}}(\Gamma', w') \subset \overline{M^{\text{trop}}(\Gamma, w)} \Leftrightarrow (\Gamma', w') \leq (\Gamma, w)$.
- (3) Sea (Γ, w) estable tal que $E(\Gamma) \neq \emptyset$, entonces existe un grafo estable (Γ', w') con una arista menos tal que $M^{\text{alg}}(\Gamma, w) \subset \overline{M^{\text{alg}}(\Gamma', w')}$

A partir de este resultado tiene sentido llamar **estrato k -dimensional** de la estratificación (5.2.1) de $\overline{M}_{g,n}$ al subesquema cerrado de $\overline{M}_{g,n}$ dado por

$$E_{g,n}^k = \overline{\bigsqcup_{\dim M^{\text{alg}}(\Gamma, w) = k} M^{\text{alg}}(\Gamma, w)} = \bigsqcup_{\dim M^{\text{alg}}(\Gamma, w) \leq k} M^{\text{alg}}(\Gamma, w).$$

Algunos ejemplos en los que podemos apreciar claramente la dualidad de las estratificaciones en los correspondientes espacios de módulos son los siguientes.

Ejemplo 5.20. Una visualización sencilla de la dualidad planteada es la siguiente para el caso de $\overline{M}_{2,0}$ y $M_{2,0}^{\text{trop}}$:



En esta representación aproximada, de izquierda a derecha, de los tipos de curvas pertenecientes a cada estrato $M^{\text{alg}}(\Gamma, w) \subset \overline{M}_{2,0}$, su interpretación como superficies de Riemann y los grafos duales ordenados vía sus especializaciones resultando en la estratificación de $M_{2,0}^{\text{trop}}$. Se indican las inclusiones entre los distintos estratos, siendo cada fila representa uno de los estratos k -dimensionales de estos espacios de módulos.

Ejemplo 5.21. Presentamos ahora la estratificación de $\overline{M}_{1,2}$ y $M_{1,2}^{\text{trop}}$. En primer lugar se representan los posibles tipos de curvas estables de género 1 con 2 puntos marcados y como se deforman unas en otras y a continuación los grafos duales en los que se indica igual que antes la especializaciones entre los grafos. Se puede apreciar que cada fila se corresponde a su vez con uno de los estratos k -dimensionales de estos espacios de módulos.

Por último, en este caso hemos podido incluir la forma aproximada que toma $M_{1,2}^{\text{trop}}$. La región sombreada en un tono más claro de gris no pertenece a dicho como poliédrico, ya que las curvas parametrizadas por estos puntos son isomorfas a las de la región simétrica según el eje indicado puesto que podemos considerar en tal caso un automorfismo que intercambia las aristas acotadas que unen los dos vértices de peso 0.

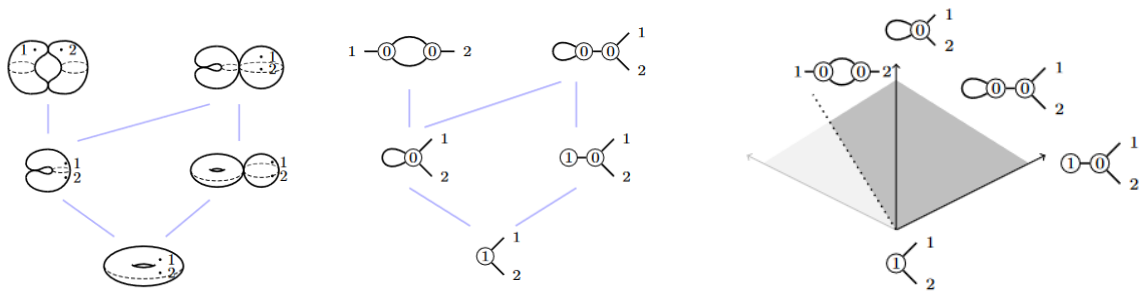


Figura 5.5: Representación de $M_{1,2}^{\text{trop}}$ tomada de [9]

Conclusiones

Los principales resultados del documento son las construcciones de los distintos espacios de móduli de curvas (lisas, estables y tropicales en los casos con y sin puntos marcados). Los focos en el caso algebraico se centran especialmente en el estudio de la presencia de automorfismos no triviales y en qué condiciones estos son un número finito; y en el hecho de que las curvas sean esquemas proyectivos siendo clave comprender los esquemas de Hilbert como problemas de móduli de los cuales emanan las respuestas para muchos otros. Para las curvas tropicales se tiene un enfoque de mayor sencillez si bien también resulta fructífero por su conexión con el caso algebraico, lo que añade interés al estudio de esta novedosa rama.

Como colofón, analizamos brevemente algunas de las herramientas más relevantes utilizadas en el trabajo y el modo de acercarse a estas en el documento. A raíz de lo aprendido al estudiar la materia, comentamos ciertas diferencias entre trabajar con el lenguaje de esquemas y de stacks ; y algunas de las ampliaciones que podrían hacerse al presente trabajo, sobre todo en lo referente a la geometría tropical justificando en parte así el motivo de haberla incluido en este documento.

Al abordar un problema de móduli se busca siempre la mayor generalidad en su resolución, por ello resulta conveniente sentar las bases del lenguaje a utilizar con el mayor rigor posible. El modo en que se hizo es adecuado para el propósito del documento si bien podría haberse optado, según los resultados que se busquen, por plantearlo considerando topologías de Grothendieck y espacios algebraicos desde el inicio para poder hacer uso posteriormente del lenguaje de stacks que como ya se ha expuesto es mejor para tratar los problemas de móduli planteados. Lenguaje este último que a la vez demanda un estudio más profundo que el presentado; que para los fines del trabajo se estimó suficiente: ya que, entre otras cosas, habría que haber incluido el modo en que se trasladan a stacks las nociones geométricas definidas en la categoría de esquemas y la generalización de otros resultados conocidos (como los criterios valorativos de separabilidad y propiedad entre otros).

Podría haberse incluido también en el trabajo una revisión más exhaustiva de la Teoría Geométrica de Invariantes y de la Teoría de la Deformación con las que se demuestran muchos de los resultados que hemos tenido que dar por ciertos en la memoria. A su vez, y en combinación con el trabajo sobre los stacks, se podría haber estudiado con mayor detalle tanto la construcción de los espacios de móduli de curvas lisas de género mayor o igual a 2 como la compactificación por curvas estables en el caso general (cuando tratamos curvas de género g y n puntos marcados cumpliendo que $2g - 2 + n \geq 1$). En el primer caso el interés reside en ver una de las primeras aplicaciones a nivel histórico

de la teoría geométrica de invariantes, mientras que el estudio de los stacks de curvas estables demuestra que se pueden establecer relaciones entre stacks de móduli y familias universales cumpliendo ciertas condiciones.

No obstante, lo recogido en este documento, al seguir el desarrollo histórico de la materia y estar más próximo a la intuición geométrica, constituye un punto de partida adecuado para poder aproximarse a un mayor nivel de abstracción y complejidad en los problemas considerados. El objetivo que se cumple trabajando directamente desde la teoría de esquemas es poder entender la naturaleza geométrica de las curvas algebraicas que han aparecido a lo largo del documento.

Una de las motivaciones para incluir los resultados que comparan el espacio de móduli de curvas algebraicas y tropicales es el hecho de que hay diversas líneas de investigación abiertas tratando de conectar ambos mundos y establecer una noción adecuada de tropicalización, esquema tropical etc. A partir del artículo de Caporaso que ha seguido en el trabajo, su autora y otros matemáticos han continuado obteniendo resultados con los que entender mejor cómo se puede llegar a dar este vínculo en el caso del móduli de curvas (véase [2]). Las técnicas de geometría tropical, por ejemplo, han permitido que saber más sobre la cohomología de \overline{M}_g (véase [10]) y también se han podido construir stacks de móduli para curvas tropicales (véase [8])... Aunque quedan muchas preguntas por responder, los resultados que se tienen por ahora parecen prometedores respecto al modo en que esta perspectiva más combinatoria pueda aportar nuevos conocimientos provechosos en geometría.

Bibliografía

- [1] STACKS PROJECT AUTHORS. The stacks project. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2023.
- [2] ABRAMOVICH, D., CAPORASO, L., AND PAYNE, S. The tropicalization of the moduli space of curves. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.(4)* 48, 4 (2015), 765–809.
- [3] ARBARELLO, E., CORNALBA, M., GRIFFITHS, P., AND HARRIS, J. D. *Geometry of algebraic curves (Volume II with a contribution by Joseph Daniel Harris)*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften ; 267, 268. Springer, 2011.
- [4] BRANNETTI, S., MELO, M., AND VIVIANI, F. On the tropical Torelli map. *Adv. Math.* 226, 3 (2011), 2546–2586.
- [5] CAPORASO, L. Algebraic and tropical curves: comparing their moduli spaces. In *Handbook of moduli. Vol. I*, vol. 24 of *Adv. Lect. Math. (ALM)*. Int. Press, Somerville, MA, 2013, pp. 119–160.
- [6] CAPORASO, L. Tropical methods in the moduli theory of algebraic curves. In *Algebraic geometry: Salt Lake City 2015*, vol. 97 of *Proc. Sympos. Pure Math.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018, pp. 103–138.
- [7] CAVALIERI, R. Moduli spaces of pointed rational curves. Combinatorial Algebraic Geometry program at the Fields Institute, 2016. (Lecture Notes, Graduate Student School) <https://www.math.colostate.edu/~renzo/teaching/Moduli16/Fields.pdf>.
- [8] CAVALIERI, R., CHAN, M., ULIRSCH, M., AND WISE, J. A moduli stack of tropical curves. *Forum Math. Sigma* 8 (2020), Paper No. e23, 93.
- [9] CHAN, M. Moduli spaces of curves: classical and tropical. *Notices Amer. Math. Soc.* 68, 10 (2021), 1700–1713.
- [10] CHAN, M., GALATIUS, S., AND PAYNE, S. Tropical curves, graph complexes, and top weight cohomology of \mathcal{M}_g . *Journal of the American Mathematical Society* 34, 2 (2021), 565–594.
- [11] DELIGNE, P., AND MUMFORD, D. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 36 (1969), 75–109.

- [12] GIESEKER, D. *Lectures on moduli of curves*, vol. 69 of *Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics*. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay by Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.
- [13] GÖRTZ, U., AND WEDHORN, T. *Algebraic geometry I. Schemes—with examples and exercises*. Springer Studium Mathematik—Master. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2020. Second edition.
- [14] GROTHENDIECK, A., AND RAYNAUD, M. Revêtements étales et groupe fondamental: Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1960–1961 (SGA 1). *Lecture Notes in Mathematics 224* (1971), 1–447.
- [15] HARTSHORNE, R. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. ISBN 978-1-4419-2807-8.
- [16] HARTSHORNE, R. *Deformation theory*, vol. 257 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2010.
- [17] HOSKINS, V. Moduli problems and geometric invariant theory. FU Berlin, Winter Semester 2015. https://userpage.fu-berlin.de/hoskins/M15_Lecture_notes.pdf.
- [18] KNUDSEN, F. F. The projectivity of the moduli space of stable curves. II. The stacks $M_{g,n}$. *Math. Scand.* 52, 2 (1983), 161–199.
- [19] KOCK, J., AND VAINSENCHER, I. *An invitation to quantum cohomology*, vol. 249 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007. Kontsevich’s formula for rational plane curves.
- [20] LIU, Q. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, vol. 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Ern e, Oxford Science Publications.
- [21] MAC LANE, S., AND MOERDIJK, I. *Sheaves in geometry and logic*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1994. A first introduction to topos theory, Corrected reprint of the 1992 edition.
- [22] MONTGOMERY, S. *Hopf algebras and their actions on rings*, vol. 82 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.
- [23] MUMFORD, D., FOGARTY, J., AND KIRWAN, F. *Geometric invariant theory*, third ed., vol. 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [24] MUMFORD, D., AND SUOMINEN, K. Introduction to the theory of moduli. In *Algebraic geometry, Oslo 1970 (Proc. Fifth Nordic Summer School in Math.)* (1972), Wolters-Noordhoff, Groningen, pp. 171–222.

- [25] NITSURE, N. Construction of Hilbert and Quot schemes. In *Fundamental algebraic geometry*, vol. 123 of *Math. Surveys Monogr.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 105–137.
- [26] SERNESI, E. *Deformations of algebraic schemes*, vol. 334 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [27] VAKIL, R. The rising sea. <https://math216.wordpress.com/>, Noviembre 2017. (Borrador).
- [28] VENKATA BALAJI, T. E. *An introduction to families, deformations and moduli*. Universitätsdrucke Göttingen, Göttingen, 2010.