Tables of modular Galois representations

Nicolas Mascot*

University of Warwick, Coventry CV4 7AL, UK. Formerly IMB, Université Bordeaux 1, UMR 5251, F-33400 Talence, France. CNRS, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, France. INRIA, project LFANT, F-33400 Talence, France.

Notation

Following the tradition, we define

$$E_4 = 1 + 240 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_3(n) q^n, \quad E_6 = 1 - 504 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_5(n) q^n, \quad \text{and } \Delta = \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728},$$

where $\sigma_k(n) = \sum_{0<d|n} d^k$.

Let k be an even integer which is either 12 or at least 16. According to Maeda's conjecture, for each such k, there is only one newform in $S_k(1)$ up to $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-conjugation. This conjecture has been verified for k up to 2000, so for $k < 2000$ we may denote without ambiguity one of the newforms in $S_k(1)$ by f_k, and the coefficients of its q-expansion at infinity by $\tau_k(n)$. The newform f_k and the sequence $\big(\tau_k(n)\big)_{n \geqslant 2}$ are then well-defined up to $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-action, and the newforms in $S_k(1)$ are the $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-conjugates of

$$f_k = q + \sum_{n=2}^{+\infty} \tau_k(n) q^n.$$

Thus for instance we have $f_{12} = \Delta$, $\tau_{12} = \tau$ is Ramanujan's τ-function, $f_{16} = E_4\Delta = q + \sum_{n=2}^{+\infty} \tau_{16}(n) q^n$ is the only newform of level 1 and weight 16, and so on.

Let R be the set of couples $(f, \mathfrak{l})$, where $\mathfrak{l}$ a prime ideal of degree 1 of the Hecke field[1] of f lying above a prime number $\ell \leqslant 31$, and $f \in S_k(1)$ a newform of level $N = 1$ and weight $k < \ell$, and let $R' \subsetneq R$ be the subset formed by the couples $(f, \mathfrak{l})$ such that the image of the Galois representation $\rho_{f,\mathfrak{l}}$ attached to f mod $\mathfrak{l}$ contains $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_\mathfrak{l})$[2].

For each[3] $(f, \mathfrak{l})$ in R', I used my algorithms to determine the image in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\mathfrak{l})$ (up to similarity of course) of the Frobenius at p by $\rho_{f,\mathfrak{l}}$ for the 40 first primes $p \in \mathbb{N}$ above 10^{1000}, so as to illustrate the fact that huge values of p are not a problem for these algorithms. In particular, this allows us to recover the value of $a_p(f)$ mod $\mathfrak{l}$

2010 *Mathematics subject classification:* 11Y70, 11S20, 11F80, 11F11, 11Y40, 20B40, 20J06

*n.a.v.mascot@warwick.ac.uk

[1] By *Hecke field* of a newform, we mean the number field generated by its Fourier coefficients.

[2] So we exclude precisely Δ mod 23 and $E_4\Delta$ mod 31.

[3] And also for Δ mod 11.

for such p, as the trace of the image of the Frobenius. I display these data in tables below.

I also display data describing a few Galois representations attached to forms of higher level which admit a companion mod ℓ.

Instead of representing a similarity class in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\mathfrak{l})$ by a matrix, I deemed it more elegant to give its *minimal* polynomial in factored form over $\mathbb{F}_\mathfrak{l}$. Since $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ splits into similarity classes as follows, this is a faithful representation.

Type of class	Representative	Minimal polynomial	# of classes	# of elements in class
Scalar	$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$	$x-\lambda$	$\ell-1$	1
Split semisimple	$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$	$(x-\lambda)(x-\mu)$	$\frac{(\ell-1)(\ell-2)}{2}$	$\ell(\ell+1)$
Non-split semisimple	$\begin{bmatrix} 0 & -n \\ 1 & t \end{bmatrix}$	x^2-tx+n irreducible over $\mathbb{F}_\ell$	$\frac{\ell(\ell-1)}{2}$	$\ell(\ell-1)$
Non-semisimple	$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$	$(x-\lambda)^2$	$\ell-1$	$(\ell+1)(\ell-1)$

For $\ell \neq 17$, I also display for each representation the reduced polynomial $F_r(x)$ defining the number field corresponding to the stabiliser of a point (cf. my article on the certification of Galois representations for the details). In particular, the number field cut out by the representation may be recovered as the compositum of the splitting field of $F_r(x)$ and of the appropriate subfield of the cyclotomic field $\mathbb{Q}(\mu_\ell)$.

Except for $\ell = 17$, these data have all been certified.

Remark. I have certified that the 40 values of p used in the tables below are indeed prime, because I am not sure what would happen if the algorithm were ran with a composite pseudoprime. As a result, the values of a_p mod $\mathfrak{l}$ displayed in the tables below are completely rigorous.

The tables

$\ell = 11$

$$f_{12} = \Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n) q^n = q - 24q^2 + 252q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned} F_1(x) = {} & x^{24} - 2\,x^{23} - 21\,x^{22} - 143\,x^{21} + 1265\,x^{20} + 660\,x^{19} - 13442\,x^{18} - 17380\,x^{17} + 53504\,x^{16} + 251735\,x^{15} + 527736\,x^{14} + 742684\,x^{13} \\ & + 793436\,x^{12} + 699454\,x^{11} + 544071\,x^{10} + 386650\,x^{9} + 246499\,x^{8} + 135080\,x^{7} + 61215\,x^{6} + 22198\,x^{5} + 6226\,x^{4} + 1309\,x^{3} + 199\,x^{2} + 20\,x + 1 \end{aligned}$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau(p)$ mod 11
$10^{1000} + 453$	$(x-9)(x-4)$	2
$10^{1000} + 1357$	$(x-8)(x-2)$	10
$10^{1000} + 2713$	$x^2 + x + 8$	10
$10^{1000} + 4351$	$(x-6)(x-3)$	9
$10^{1000} + 5733$	$x^2 + 3x + 3$	8
$10^{1000} + 7383$	$x^2 + 3x + 3$	8
$10^{1000} + 10401$	$(x-8)(x-5)$	2
$10^{1000} + 11979$	$x^2 + 1$	0
$10^{1000} + 17557$	$(x-10)(x-9)$	8
$10^{1000} + 21567$	$x^2 + 10x + 8$	1
$10^{1000} + 22273$	$(x-9)(x-6)$	4
$10^{1000} + 24493$	$(x-8)(x-1)$	9
$10^{1000} + 25947$	$(x-9)(x-6)$	4
$10^{1000} + 27057$	$x^2 + 4x + 9$	7
$10^{1000} + 29737$	$(x-9)(x-3)$	1
$10^{1000} + 41599$	$x^2 + 9$	0
$10^{1000} + 43789$	$x^2 + 6x + 10$	5
$10^{1000} + 46227$	$(x-7)(x-4)$	0
$10^{1000} + 46339$	$(x-8)(x-1)$	9
$10^{1000} + 52423$	$(x-3)^2$	6
$10^{1000} + 55831$	$x^2 + 10x + 7$	1
$10^{1000} + 57867$	$(x-8)(x-1)$	9
$10^{1000} + 59743$	$(x-3)(x-1)$	4
$10^{1000} + 61053$	$(x-9)^2$	7
$10^{1000} + 61353$	$x^2 + x + 7$	10
$10^{1000} + 63729$	$x^2 + x + 7$	10
$10^{1000} + 64047$	$(x-3)(x-2)$	5
$10^{1000} + 64749$	$(x-10)(x-7)$	6
$10^{1000} + 68139$	$x^2 + 2x + 6$	9
$10^{1000} + 68367$	$(x-3)(x-1)$	4
$10^{1000} + 70897$	$(x-10)(x-8)$	7
$10^{1000} + 72237$	$(x-4)(x-3)$	7
$10^{1000} + 77611$	$(x-8)(x-5)$	2
$10^{1000} + 78199$	$(x-6)(x-2)$	8
$10^{1000} + 79237$	$(x-5)(x-1)$	6
$10^{1000} + 79767$	$x^2 + 4x + 7$	7
$10^{1000} + 82767$	$x^2 + 2x + 4$	9
$10^{1000} + 93559$	$(x-4)^2$	8
$10^{1000} + 95107$	$(x-10)(x-9)$	8
$10^{1000} + 100003$	$(x-9)(x-4)$	2

Remark 1. Since $E_{10} \equiv 1 \bmod 11$, this is also the representation attached to $E_{10}\Delta$ mod 11.

$\underline{\ell = 13}$

$$f_{12} = \Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n) q^n = q - 24q^2 + 252q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned} F_2(x) = {} & x^{56} - x^{55} - 37\,x^{54} + 4\,x^{53} + 497\,x^{52} + 260\,x^{51} - 2028\,x^{50} + 2132\,x^{49} + 1885\,x^{48} - 60567\,x^{47} - 30446\,x^{46} + 204009\,x^{45} - 747773\,x^{44} \\ & + 871995\,x^{43} + 16377640\,x^{42} - 9022363\,x^{41} - 147711263\,x^{40} + 18036923\,x^{39} + 814575476\,x^{38} + 13489814\,x^{37} - 3417235796\,x^{36} \\ & - 197131727\,x^{35} + 11411481146\,x^{34} - 1346122570\,x^{33} - 32447035595\,x^{32} + 17127244355\,x^{31} + 70474309381\,x^{30} - 92406875231\,x^{29} \\ & - 80461319143\,x^{28} + 273676546812\,x^{27} - 119094061348\,x^{26} - 397497781226\,x^{25} + 653548189645\,x^{24} - 91120785769\,x^{23} \\ & - 919285150524\,x^{22} + 1206896879916\,x^{21} - 139157860036\,x^{20} - 1343173532727\,x^{19} + 1534313629056\,x^{18} - 180233797432\,x^{17} \\ & - 1093325823486\,x^{16} + 933426608400\,x^{15} + 26333274968\,x^{14} - 456340289431\,x^{13} + 169085116551\,x^{12} + 137007023023\,x^{11} \\ & - 107582588958\,x^{10} - 16900234741\,x^{9} + 38101647922\,x^{8} + 2701467548\,x^{7} - 14262107015\,x^{6} + 3197825982\,x^{5} + 1917782689\,x^{4} \\ & - 657641326\,x^{3} - 172529479\,x^{2} + 74207396\,x + 18396689 \end{aligned}$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau(p)$ mod 13
$10^{1000} + 453$	$x^2 + 3x + 1$	10
$10^{1000} + 1357$	$(x - 10)(x - 7)$	4
$10^{1000} + 2713$	$x^2 + 12x + 12$	1
$10^{1000} + 4351$	$x^2 + x + 12$	12
$10^{1000} + 5733$	$(x - 12)(x - 4)$	3
$10^{1000} + 7383$	$x^2 + 6x + 7$	7
$10^{1000} + 10401$	$(x - 5)(x - 2)$	7
$10^{1000} + 11979$	$(x - 9)^2$	5
$10^{1000} + 17557$	$x^2 + 6x + 4$	7
$10^{1000} + 21567$	$x^2 + 5x + 9$	8
$10^{1000} + 22273$	$(x - 10)(x - 8)$	5
$10^{1000} + 24493$	$x^2 + 8x + 10$	5
$10^{1000} + 25947$	$x^2 + 10x + 7$	3
$10^{1000} + 27057$	$(x - 7)(x - 4)$	11
$10^{1000} + 29737$	$x^2 + x + 3$	12
$10^{1000} + 41599$	$(x - 11)(x - 3)$	1
$10^{1000} + 43789$	$(x - 10)(x - 7)$	4
$10^{1000} + 46227$	$x^2 + 10x + 7$	3
$10^{1000} + 46339$	$(x - 8)(x - 7)$	2
$10^{1000} + 52423$	$(x - 10)(x - 3)$	0
$10^{1000} + 55831$	$(x - 4)(x - 3)$	7
$10^{1000} + 57867$	$(x - 2)(x - 1)$	3
$10^{1000} + 59743$	$x^2 + 6$	0
$10^{1000} + 61053$	$x^2 + x + 5$	12
$10^{1000} + 61353$	$(x - 11)(x - 5)$	3
$10^{1000} + 63729$	$(x - 11)(x - 1)$	12
$10^{1000} + 64047$	$(x - 10)(x - 9)$	6
$10^{1000} + 64749$	$(x - 4)(x - 3)$	7
$10^{1000} + 68139$	$x^2 + 6x + 3$	7
$10^{1000} + 68367$	$(x - 7)(x - 5)$	12
$10^{1000} + 70897$	$(x - 12)(x - 7)$	6
$10^{1000} + 72237$	$x^2 + 11x + 12$	2
$10^{1000} + 77611$	$x^2 + 5x + 10$	8
$10^{1000} + 78199$	$(x - 7)(x - 4)$	11
$10^{1000} + 79237$	$(x - 4)(x - 2)$	6
$10^{1000} + 79767$	$x^2 + 7x + 7$	6
$10^{1000} + 82767$	$x^2 + 9x + 12$	4
$10^{1000} + 93559$	$x^2 + 8x + 1$	5
$10^{1000} + 95107$	$x^2 + 10x + 7$	3
$10^{1000} + 100003$	$x^2 + 6x + 4$	7

$$5.6.1.a = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n = q + 2q^2 - 4q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned} F_2(x) = {} & x^{56} - 19\,x^{55} + 176\,x^{54} - 1099\,x^{53} + 5292\,x^{52} - 19916\,x^{51} + 53755\,x^{50} - 82979\,x^{49} - 11609\,x^{48} + 418938\,x^{47} - 1351519\,x^{46} + 3570307\,x^{45} \\ & -8104499\,x^{44} + 9946931\,x^{43} + 5331934\,x^{42} - 12684220\,x^{41} - 180933386\,x^{40} + 956990587\,x^{39} - 2345057533\,x^{38} + 2930653050\,x^{37} \\ & -366740868\,x^{36} - 2647967569\,x^{35} - 10686690040\,x^{34} + 66782657110\,x^{33} - 169078436150\,x^{32} + 261459165916\,x^{31} - 253975820897\,x^{30} \\ & +159187764447\,x^{29} - 272743393068\,x^{28} + 1165595337221\,x^{27} - 3256037467741\,x^{26} + 6113796826345\,x^{25} - 8131597368544\,x^{24} \\ & +7180532683571\,x^{23} - 2160263809470\,x^{22} - 5641397045687\,x^{21} + 12758000383973\,x^{20} - 15558252071934\,x^{19} + 12690172501916\,x^{18} \\ & -6215260751330\,x^{17} + 180457670019\,x^{16} + 2797189991937\,x^{15} - 3474577634674\,x^{14} + 4227913001201\,x^{13} - 5838445844387\,x^{12} \\ & +6919193824400\,x^{11} - 5805277968711\,x^{10} + 2648204866489\,x^{9} + 369252764894\,x^{8} - 1933374840137\,x^{7} + 1819874305834\,x^{6} \\ & -1245647904878\,x^{5} + 908803702639\,x^{4} - 675346876626\,x^{3} + 345380525276\,x^{2} - 96857560911\,x + 7979838361 \end{aligned}$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	a_p mod 13
$10^{1000} + 453$	$(x+2)(x-6)$	4
$10^{1000} + 1357$	$x^2 + x - 5$	12
$10^{1000} + 2713$	$(x+2)(x+6)$	5
$10^{1000} + 4351$	$(x-4)(x-3)$	7
$10^{1000} + 5733$	$(x+5)(x-6)$	1
$10^{1000} + 7383$	$x^2 - 3x + 6$	3
$10^{1000} + 10401$	$(x-5)(x-2)$	7
$10^{1000} + 11979$	$x^2 - 6x + 3$	6
$10^{1000} + 17557$	$x^2 - 3x + 4$	3
$10^{1000} + 21567$	$(x+2)(x-2)$	0
$10^{1000} + 22273$	$x^2 + 4x - 2$	9
$10^{1000} + 24493$	$x^2 - 5x - 3$	5
$10^{1000} + 25947$	$(x+2)(x+3)$	8
$10^{1000} + 27057$	$(x+2)(x-1)$	12
$10^{1000} + 29737$	$(x+5)(x-2)$	10
$10^{1000} + 41599$	$x^2 + 3x + 6$	10
$10^{1000} + 43789$	$x^2 + x - 5$	12
$10^{1000} + 46227$	$(x-6)(x-1)$	7
$10^{1000} + 46339$	$(x-6)(x-5)$	11
$10^{1000} + 52423$	$(x-4)(x-1)$	5
$10^{1000} + 55831$	$(x+3)(x+4)$	6
$10^{1000} + 57867$	$x^2 - 6x - 2$	6
$10^{1000} + 59743$	$(x+2)(x-3)$	1
$10^{1000} + 61053$	$(x-4)(x-2)$	6
$10^{1000} + 61353$	$x^2 - 2x + 3$	2
$10^{1000} + 63729$	$x^2 + x + 2$	12
$10^{1000} + 64047$	$(x-4)(x-3)$	7
$10^{1000} + 64749$	$(x+5)^2$	3
$10^{1000} + 68139$	$x^2 + 2x + 3$	11
$10^{1000} + 68367$	$(x+4)(x-1)$	10
$10^{1000} + 70897$	$x^2 + 3x - 6$	10
$10^{1000} + 72237$	$x^2 - x - 1$	1
$10^{1000} + 77611$	$(x-5)(x-2)$	7
$10^{1000} + 78199$	$(x+4)(x+6)$	3
$10^{1000} + 79237$	$(x-5)(x-1)$	6
$10^{1000} + 79767$	$(x-3)(x-2)$	5
$10^{1000} + 82767$	$(x-4)(x-3)$	7
$10^{1000} + 93559$	$(x+1)^2$	11
$10^{1000} + 95107$	$(x-6)(x-1)$	7
$10^{1000} + 100003$	$x^2 + 6x + 4$	7

$$7.8.1.a = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n = q - 6q^2 - 42q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned} F_2(x) = {} & x^{56} - 14\,x^{55} + 69\,x^{54} - 82\,x^{53} - 396\,x^{52} + 823\,x^{51} + 3351\,x^{50} - 11931\,x^{49} + 8522\,x^{48} - 35835\,x^{47} + 186446\,x^{46} - 8847\,x^{45} - 854460\,x^{44} \\ & -743676\,x^{43} + 4590031\,x^{42} + 7212191\,x^{41} - 22038546\,x^{40} - 38957922\,x^{39} + 49157879\,x^{38} + 243902411\,x^{37} - 180717704\,x^{36} \\ & -988889224\,x^{35} + 704374598\,x^{34} + 4859375083\,x^{33} - 3763415241\,x^{32} - 16386779936\,x^{31} + 21701597191\,x^{30} + 46834006724\,x^{29} \\ & -85332561468\,x^{28} - 70138311949\,x^{27} + 302231735974\,x^{26} - 10052385427\,x^{25} - 632464301217\,x^{24} + 556951211889\,x^{23} + 1081393994453\,x^{22} \\ & -1845293759824\,x^{21} - 358646925616\,x^{20} + 3673731123829\,x^{19} - 1686600977427\,x^{18} - 4103844332008\,x^{17} + 5303152415742\,x^{16} \\ & +2644700341946\,x^{15} - 8175629100848\,x^{14} + 3069957630241\,x^{13} + 5747922498716\,x^{12} - 4528557603372\,x^{11} - 3341692089599\,x^{10} \\ & +6603867688269\,x^{9} - 2399016765221\,x^{8} - 1314878616927\,x^{7} + 1252052945123\,x^{6} - 5862989822\,x^{5} - 159810157800\,x^{4} - 23334202447\,x^{3} \\ & +35386045540\,x^{2} + 9146004182\,x + 973774019 \end{aligned}$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	a_p mod 13
$10^{1000} + 453$	$x^2 - 3x + 1$	3
$10^{1000} + 1357$	$(x+3)(x+6)$	4
$10^{1000} + 2713$	$(x-6)(x-2)$	8
$10^{1000} + 4351$	$(x+2)(x+6)$	5
$10^{1000} + 5733$	$x^2 - 6x + 3$	6
$10^{1000} + 7383$	$x^2 + 5x - 2$	8
$10^{1000} + 10401$	$(x+1)(x+4)$	8
$10^{1000} + 11979$	$(x+6)(x-5)$	12
$10^{1000} + 17557$	$(x-5)(x-2)$	7
$10^{1000} + 21567$	$(x+4)^2$	5
$10^{1000} + 22273$	$x^2 - 3x + 6$	3
$10^{1000} + 24493$	$(x-6)(x-5)$	11
$10^{1000} + 25947$	$(x+5)(x-3)$	11
$10^{1000} + 27057$	$(x+4)(x-5)$	1
$10^{1000} + 29737$	$(x-3)^2$	6
$10^{1000} + 41599$	$(x+2)(x-1)$	12
$10^{1000} + 43789$	$(x-6)(x-3)$	9
$10^{1000} + 46227$	$x^2 - 2$	0
$10^{1000} + 46339$	$(x-6)^2$	12
$10^{1000} + 52423$	$x^2 - 5x - 3$	5
$10^{1000} + 55831$	$x^2 - x - 1$	1
$10^{1000} + 57867$	$(x+4)(x-5)$	1
$10^{1000} + 59743$	$x^2 - x + 2$	1
$10^{1000} + 61053$	$x^2 - x + 5$	1
$10^{1000} + 61353$	$(x+3)^2$	7
$10^{1000} + 63729$	$(x+6)(x-1)$	8
$10^{1000} + 64047$	$(x-6)(x-2)$	8
$10^{1000} + 64749$	$x^2 - 2x - 1$	2
$10^{1000} + 68139$	$(x+4)(x-1)$	10
$10^{1000} + 68367$	$(x+4)^2$	5
$10^{1000} + 70897$	$(x+3)(x+5)$	5
$10^{1000} + 72237$	$x^2 + 4x - 1$	9
$10^{1000} + 77611$	$x^2 + x + 4$	12
$10^{1000} + 78199$	$(x-6)(x-1)$	7
$10^{1000} + 79237$	$(x+2)(x+4)$	7
$10^{1000} + 79767$	$x^2 + 4x - 2$	9
$10^{1000} + 82767$	$(x-5)^2$	10
$10^{1000} + 93559$	$(x-1)^2$	2
$10^{1000} + 95107$	$x^2 - 4x - 2$	4
$10^{1000} + 100003$	$x^2 - 3x - 3$	3

$\underline{\ell = 17}$

$$f_{12} = \Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n) q^n = q - 24q^2 + 252q^3 + O(q^4)$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau(p)$ mod 17
$10^{1000} + 453$	$x^2 + 3$	0
$10^{1000} + 1357$	$(x - 15)^2$	13
$10^{1000} + 2713$	$(x - 14)(x - 12)$	9
$10^{1000} + 4351$	$(x - 10)(x - 6)$	16
$10^{1000} + 5733$	$(x - 6)(x - 4)$	10
$10^{1000} + 7383$	$(x - 15)(x - 2)$	0
$10^{1000} + 10401$	$(x - 7)(x - 3)$	10
$10^{1000} + 11979$	$x^2 + 6x + 3$	11
$10^{1000} + 17557$	$x^2 + 11x + 6$	6
$10^{1000} + 21567$	$x^2 + 16x + 3$	1
$10^{1000} + 22273$	$x^2 + 16x + 8$	1
$10^{1000} + 24493$	$x^2 + 8x + 6$	9
$10^{1000} + 25947$	$x^2 + 2x + 13$	15
$10^{1000} + 27057$	$(x - 16)(x - 2)$	1
$10^{1000} + 29737$	$x^2 + 5x + 7$	12
$10^{1000} + 41599$	$x^2 + 6x + 16$	11
$10^{1000} + 43789$	$(x - 11)(x - 5)$	16
$10^{1000} + 46227$	$x^2 + 4x + 7$	13
$10^{1000} + 46339$	$(x - 14)(x - 10)$	7
$10^{1000} + 52423$	$(x - 16)(x - 5)$	4
$10^{1000} + 55831$	$x^2 + 14x + 8$	3
$10^{1000} + 57867$	$x^2 + 8x + 9$	9
$10^{1000} + 59743$	$(x - 14)(x - 7)$	4
$10^{1000} + 61053$	$x^2 + 15x + 11$	2
$10^{1000} + 61353$	$x^2 + 6x + 16$	11
$10^{1000} + 63729$	$x^2 + 6$	0
$10^{1000} + 64047$	$x^2 + 7x + 14$	10
$10^{1000} + 64749$	$(x - 6)(x - 1)$	7
$10^{1000} + 68139$	$(x - 11)(x - 10)$	4
$10^{1000} + 68367$	$(x - 16)(x - 2)$	1
$10^{1000} + 70897$	$x^2 + 5x + 5$	12
$10^{1000} + 72237$	$x^2 + 7$	0
$10^{1000} + 77611$	$x^2 + 15x + 11$	2
$10^{1000} + 78199$	$(x - 16)(x - 8)$	7
$10^{1000} + 79237$	$(x - 10)(x - 5)$	15
$10^{1000} + 79767$	$(x - 8)(x - 1)$	9
$10^{1000} + 82767$	$x^2 + 16x + 3$	1
$10^{1000} + 93559$	$x^2 + 5x + 14$	12
$10^{1000} + 95107$	$(x - 11)^2$	5
$10^{1000} + 100003$	$(x - 14)(x - 5)$	2

$$f_{16} = E_4\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{16}(n)q^n = q + 216q^2 - 3348q^3 + O(q^4)$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau_{16}(p)$ mod 17
$10^{1000} + 453$	$x^2 + 5x + 12$	12
$10^{1000} + 1357$	$x^2 + 3x + 4$	14
$10^{1000} + 2713$	$x^2 + 8x + 2$	9
$10^{1000} + 4351$	$x^2 + 14x + 8$	3
$10^{1000} + 5733$	$x^2 + 11x + 6$	6
$10^{1000} + 7383$	$(x - 8)^2$	16
$10^{1000} + 10401$	$(x - 16)(x - 13)$	12
$10^{1000} + 11979$	$(x - 9)(x - 7)$	16
$10^{1000} + 17557$	$(x - 5)(x - 2)$	7
$10^{1000} + 21567$	$x^2 + 12x + 12$	5
$10^{1000} + 22273$	$x^2 + 13x + 9$	4
$10^{1000} + 24493$	$x^2 + 10$	0
$10^{1000} + 25947$	$(x - 16)(x - 4)$	3
$10^{1000} + 27057$	$(x - 10)(x - 7)$	0
$10^{1000} + 29737$	$x^2 + 9x + 6$	8
$10^{1000} + 41599$	$x^2 + 4x + 16$	13
$10^{1000} + 43789$	$(x - 4)(x - 1)$	5
$10^{1000} + 46227$	$(x - 12)(x - 9)$	4
$10^{1000} + 46339$	$x^2 + 15x + 4$	2
$10^{1000} + 52423$	$(x - 11)(x - 9)$	3
$10^{1000} + 55831$	$x^2 + 9x + 9$	8
$10^{1000} + 57867$	$x^2 + 12x + 8$	5
$10^{1000} + 59743$	$(x - 8)^2$	16
$10^{1000} + 61053$	$(x - 15)(x - 5)$	3
$10^{1000} + 61353$	$x^2 + 16x + 16$	1
$10^{1000} + 63729$	$x^2 + 14x + 10$	3
$10^{1000} + 64047$	$x^2 + 12x + 5$	5
$10^{1000} + 64749$	$x^2 + 10$	0
$10^{1000} + 68139$	$(x - 10)(x - 6)$	16
$10^{1000} + 68367$	$x^2 + 8x + 2$	9
$10^{1000} + 70897$	$(x - 16)(x - 14)$	13
$10^{1000} + 72237$	$(x - 13)(x - 7)$	3
$10^{1000} + 77611$	$(x - 6)(x - 4)$	10
$10^{1000} + 78199$	$(x - 8)(x - 1)$	9
$10^{1000} + 79237$	$x^2 + 13x + 16$	4
$10^{1000} + 79767$	$x^2 + 4x + 9$	13
$10^{1000} + 82767$	$x^2 + 5x + 12$	12
$10^{1000} + 93559$	$x^2 + 5$	0
$10^{1000} + 95107$	$(x - 7)^2$	14
$10^{1000} + 100003$	$(x - 10)^2$	3

$\underline{\ell = 19}$

$$f_{12} = \Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n) q^n = q - 24q^2 + 252q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned} F_1(x) = {} & x^{40} - 16\,x^{39} + 140\,x^{38} - 817\,x^{37} + 3800\,x^{36} - 15390\,x^{35} + 58995\,x^{34} - 207898\,x^{33} + 660269\,x^{32} - 1791605\,x^{31} + 4249920\,x^{30} \\ & -8817558\,x^{29} + 17481691\,x^{28} - 30769759\,x^{27} + 42650459\,x^{26} + 4428596\,x^{25} - 246009017\,x^{24} + 970805266\,x^{23} - 2240221961\,x^{22} \\ & +3342627779\,x^{21} - 1129506594\,x^{20} - 9237713818\,x^{19} + 30659287414\,x^{18} - 52304629617\,x^{17} + 42602398481\,x^{16} + 39795805368\,x^{15} \\ & -199581521723\,x^{14} + 352618821308\,x^{13} - 337331645679\,x^{12} + 27899425257\,x^{11} + 512274200988\,x^{10} - 1012277828949\,x^{9} \\ & +1176338629721\,x^{8} - 933262103102\,x^{7} + 490955651394\,x^{6} - 133342457368\,x^{5} - 15516736289\,x^{4} + 25116208224\,x^{3} - 5068054794\,x^{2} \\ & -1206842437\,x + 402242217 \end{aligned}$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau(p) \bmod 19$
$10^{1000} + 453$	$(x-15)(x-10)$	6
$10^{1000} + 1357$	$(x-17)^2$	15
$10^{1000} + 2713$	$(x-11)(x-4)$	15
$10^{1000} + 4351$	$(x-6)(x-4)$	10
$10^{1000} + 5733$	$(x-16)(x-1)$	17
$10^{1000} + 7383$	$(x-1)^2$	2
$10^{1000} + 10401$	$x^2 + 11x + 4$	8
$10^{1000} + 11979$	$(x-16)(x-13)$	10
$10^{1000} + 17557$	$x^2 + 8x + 14$	11
$10^{1000} + 21567$	$(x-11)^2$	3
$10^{1000} + 22273$	$(x-13)(x-1)$	14
$10^{1000} + 24493$	$(x-14)(x-10)$	5
$10^{1000} + 25947$	$x^2 + 14x + 15$	5
$10^{1000} + 27057$	$(x-10)(x-9)$	0
$10^{1000} + 29737$	$x^2 + 12x + 7$	7
$10^{1000} + 41599$	$(x-18)(x-15)$	14
$10^{1000} + 43789$	$(x-13)(x-11)$	5
$10^{1000} + 46227$	$x^2 + 5$	0
$10^{1000} + 46339$	$x^2 + x + 11$	18
$10^{1000} + 52423$	$x^2 + 7x + 7$	12
$10^{1000} + 55831$	$(x-16)(x-13)$	10
$10^{1000} + 57867$	$(x-17)(x-2)$	0
$10^{1000} + 59743$	$x^2 + 5x + 9$	14
$10^{1000} + 61053$	$x^2 + 9x + 3$	10
$10^{1000} + 61353$	$(x-14)(x-10)$	5
$10^{1000} + 63729$	$x^2 + 15x + 8$	4
$10^{1000} + 64047$	$(x-6)(x-5)$	11
$10^{1000} + 64749$	$(x-13)^2$	7
$10^{1000} + 68139$	$x^2 + 15x + 13$	4
$10^{1000} + 68367$	$(x-14)(x-5)$	0
$10^{1000} + 70897$	$(x-18)(x-15)$	14
$10^{1000} + 72237$	$(x-10)(x-5)$	15
$10^{1000} + 77611$	$x^2 + 13x + 6$	6
$10^{1000} + 78199$	$(x-15)^2$	11
$10^{1000} + 79237$	$x^2 + 12x + 9$	7
$10^{1000} + 79767$	$x^2 + 13x + 13$	6
$10^{1000} + 82767$	$x^2 + 3x + 8$	16
$10^{1000} + 93559$	$x^2 + 4x + 8$	15
$10^{1000} + 95107$	$x^2 + 13x + 15$	6
$10^{1000} + 100003$	$x^2 + 5x + 3$	14

$$f_{16} = E_4\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{16}(n)q^n = q + 216q^2 - 3348q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned}F_1(x) = {} & x^{40} - 13\,x^{39} + 85\,x^{38} - 228\,x^{37} - 722\,x^{36} + 9500\,x^{35} - 31445\,x^{34} - 33839\,x^{33} + 456931\,x^{32} + 1563206\,x^{31} - 30819064\,x^{30} \\ & +167020735\,x^{29} - 407815012\,x^{28} - 299395407\,x^{27} + 6495665850\,x^{26} - 28396958497\,x^{25} + 91277030845\,x^{24} - 394369406963\,x^{23} \\ & +2524930215221\,x^{22} - 15561271230172\,x^{21} + 79747345873985\,x^{20} - 341821309072496\,x^{19} + 1257076454086508\,x^{18} \\ & -4047070285252713\,x^{17} + 11566956418121869\,x^{16} - 29635437910386251\,x^{15} + 68484491392483606\,x^{14} - 143167230885680637\,x^{13} \\ & +270832520294895621\,x^{12} - 463163941602368220\,x^{11} + 714404010643350527\,x^{10} - 988646191706254226\,x^{9} + 1215859558697801815\,x^{8} \\ & -1311425760966182878\,x^{7} + 1220493041734537850\,x^{6} - 952949304766364345\,x^{5} + 596265519844162148\,x^{4} - 283730519579116052\,x^{3} \\ & +94901547946488681\,x^{2} - 19812929291266312\,x + 1769027494041856\end{aligned}$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau_{16}(p)$ mod 19
$10^{1000} + 453$	$(x-15)(x-2)$	17
$10^{1000} + 1357$	$(x-18)(x-12)$	11
$10^{1000} + 2713$	$x^2 + 6x + 7$	13
$10^{1000} + 4351$	$x^2 + 9x + 11$	10
$10^{1000} + 5733$	$(x-17)(x-4)$	2
$10^{1000} + 7383$	$x^2 + 5x + 1$	14
$10^{1000} + 10401$	$x^2 + 13x + 7$	6
$10^{1000} + 11979$	$(x-16)(x-13)$	10
$10^{1000} + 17557$	$(x-9)(x-3)$	12
$10^{1000} + 21567$	$x^2 + 5x + 1$	14
$10^{1000} + 22273$	$(x-17)(x-13)$	11
$10^{1000} + 24493$	$(x-17)(x-9)$	7
$10^{1000} + 25947$	$(x-18)(x-7)$	6
$10^{1000} + 27057$	$x^2 + 5x + 8$	14
$10^{1000} + 29737$	$(x-13)(x-3)$	16
$10^{1000} + 41599$	$x^2 + 7x + 7$	12
$10^{1000} + 43789$	$x^2 + 9x + 12$	10
$10^{1000} + 46227$	$x^2 + 16x + 11$	3
$10^{1000} + 46339$	$(x-17)(x-9)$	7
$10^{1000} + 52423$	$(x-15)(x-14)$	10
$10^{1000} + 55831$	$(x-14)(x-4)$	18
$10^{1000} + 57867$	$x^2 + 18x + 12$	1
$10^{1000} + 59743$	$x^2 + 7$	0
$10^{1000} + 61053$	$(x-17)(x-15)$	13
$10^{1000} + 61353$	$(x-10)(x-2)$	12
$10^{1000} + 63729$	$x^2 + 16x + 18$	3
$10^{1000} + 64047$	$(x-10)(x-2)$	12
$10^{1000} + 64749$	$x^2 + 10x + 11$	9
$10^{1000} + 68139$	$(x-10)(x-5)$	15
$10^{1000} + 68367$	$(x-18)(x-7)$	6
$10^{1000} + 70897$	$x^2 + 6x + 7$	13
$10^{1000} + 72237$	$x^2 + 6x + 18$	13
$10^{1000} + 77611$	$x^2 + 13x + 7$	6
$10^{1000} + 78199$	$(x-7)^2$	14
$10^{1000} + 79237$	$(x-14)(x-10)$	5
$10^{1000} + 79767$	$(x-12)(x-1)$	13
$10^{1000} + 82767$	$(x-16)(x-13)$	10
$10^{1000} + 93559$	$x^2 + 2x + 18$	17
$10^{1000} + 95107$	$x^2 + 18x + 12$	1
$10^{1000} + 100003$	$(x-14)(x-6)$	1

$$f_{18} = E_6\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{18}(n)q^n = q - 528q^2 - 4284q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned} F_1(x) = {} & x^{40} - 20\,x^{39} + 195\,x^{38} - 1235\,x^{37} + 5605\,x^{36} - 18639\,x^{35} + 77520\,x^{34} - 634695\,x^{33} + 5974075\,x^{32} - 44919420\,x^{31} + 269657576\,x^{30} \\ & -1335110240\,x^{29} + 5601144140\,x^{28} - 20279556140\,x^{27} + 64141804721\,x^{26} - 178659600587\,x^{25} + 440047768796\,x^{24} - 958879114352\,x^{23} \\ & +1838577559297\,x^{22} - 3055504899081\,x^{21} + 4240711859704\,x^{20} - 4423871953112\,x^{19} + 1957612139036\,x^{18} + 5028063809308\,x^{17} \\ & -17299685514024\,x^{16} + 32633627449550\,x^{15} - 44374401190937\,x^{14} + 42560094954381\,x^{13} - 18844866456996\,x^{12} - 26159905350680\,x^{11} \\ & +78762471096571\,x^{10} - 117334131209392\,x^{9} + 125149929590101\,x^{8} - 102005895245433\,x^{7} + 64099427338094\,x^{6} - 30715143275002\,x^{5} \\ & +10983288040894\,x^{4} - 2842308291921\,x^{3} + 511081803872\,x^{2} - 60039731531\,x + 3791580991 \end{aligned}$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau_{18}(p)$ mod 19
$10^{1000}+453$	$(x-7)(x-5)$	12
$10^{1000}+1357$	$(x-14)(x-2)$	16
$10^{1000}+2713$	$(x-13)(x-12)$	6
$10^{1000}+4351$	$(x-15)(x-10)$	6
$10^{1000}+5733$	$(x-12)(x-2)$	14
$10^{1000}+7383$	x^2+8x+1	11
$10^{1000}+10401$	$(x-17)(x-5)$	3
$10^{1000}+11979$	$(x-15)(x-5)$	1
$10^{1000}+17557$	x^2+x+2	18
$10^{1000}+21567$	x^2+9x+7	10
$10^{1000}+22273$	$x^2+9x+15$	10
$10^{1000}+24493$	$(x-13)(x-2)$	15
$10^{1000}+25947$	$(x-18)(x-9)$	8
$10^{1000}+27057$	x^2+x+2	18
$10^{1000}+29737$	$x^2+13x+7$	6
$10^{1000}+41599$	x^2+9	0
$10^{1000}+43789$	$(x-16)(x-2)$	18
$10^{1000}+46227$	$x^2+17x+17$	2
$10^{1000}+46339$	x^2+x+11	18
$10^{1000}+52423$	$(x-7)(x-1)$	8
$10^{1000}+55831$	$(x-18)(x-1)$	0
$10^{1000}+57867$	$(x-16)(x-3)$	0
$10^{1000}+59743$	$(x-6)(x-1)$	7
$10^{1000}+61053$	$x^2+18x+14$	1
$10^{1000}+61353$	$x^2+17x+7$	2
$10^{1000}+63729$	$x^2+15x+8$	4
$10^{1000}+64047$	$(x-7)^2$	14
$10^{1000}+64749$	$(x-7)(x-5)$	12
$10^{1000}+68139$	$(x-5)(x-3)$	8
$10^{1000}+68367$	$(x-9)(x-8)$	17
$10^{1000}+70897$	$(x-16)^2$	13
$10^{1000}+72237$	$x^2+14x+12$	5
$10^{1000}+77611$	x^2+9x+4	10
$10^{1000}+78199$	$(x-18)(x-14)$	13
$10^{1000}+79237$	$(x-15)(x-8)$	4
$10^{1000}+79767$	$(x-18)(x-4)$	3
$10^{1000}+82767$	$(x-16)(x-10)$	7
$10^{1000}+93559$	x^2+4x+8	15
$10^{1000}+95107$	$x^2+10x+10$	9
$10^{1000}+100003$	$(x-15)(x-6)$	2

$\underline{\ell = 23}$

$$f_{16} = E_4\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{16}(n)q^n = q + 216q^2 - 3348q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned} F_1(x) = {} & x^{48} - x^{47} - 109\,x^{46} + 115\,x^{45} + 6440\,x^{44} - 6394\,x^{43} - 254173\,x^{42} + 298195\,x^{41} + 6680212\,x^{40} - 12540083\,x^{39} - 105978020\,x^{38} \\ & +360363080\,x^{37} + 741259709\,x^{36} - 5812234366\,x^{35} + 9191899147\,x^{34} + 55452117582\,x^{33} - 211231290795\,x^{32} + 147889165307\,x^{31} \\ & +1740241057594\,x^{30} - 7645264063602\,x^{29} + 7669255582815\,x^{28} + 60083978920133\,x^{27} - 279598231381203\,x^{26} + 153518796138698\,x^{25} \\ & +2191201025098472\,x^{24} - 5178523451901724\,x^{23} - 3942351004260743\,x^{22} + 31751818763042583\,x^{21} - 23642489276795062\,x^{20} \\ & -70327453383818895\,x^{19} + 35476360881916929\,x^{18} + 207645172341981063\,x^{17} + 614665649023326814\,x^{16} - 2480249308287556886\,x^{15} \\ & -2089099163581882731\,x^{14} + 14703206845134497824\,x^{13} - 6626565457509126 34\,x^{12} - 60880967914869221908\,x^{11} \\ & +45971711795579182300\,x^{10} + 178142724618984326995\,x^{9} - 307009171695553073017\,x^{8} - 146967079511282247344\,x^{7} \\ & +73528271256634416359 3\,x^{6} - 410409037261752574692\,x^{5} - 494298777344951832589\,x^{4} + 633409634614291928469\,x^{3} \\ & -483697302512113768 79\,x^{2} - 226080014532799333230\,x + 91130234051170697347 \end{aligned}$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau_{16}(p) \bmod 23$
$10^{1000} + 453$	$(x-15)(x-5)$	20
$10^{1000} + 1357$	$(x-19)(x-15)$	11
$10^{1000} + 2713$	$x^2 + 11x + 21$	12
$10^{1000} + 4351$	$x^2 + 7x + 11$	16
$10^{1000} + 5733$	$(x-18)(x-14)$	9
$10^{1000} + 7383$	$(x-13)(x-6)$	19
$10^{1000} + 10401$	$x^2 + 4x + 7$	19
$10^{1000} + 11979$	$(x-15)(x-7)$	22
$10^{1000} + 17557$	$x^2 + 8x + 1$	15
$10^{1000} + 21567$	$x^2 + 8x + 6$	15
$10^{1000} + 22273$	$(x-17)(x-5)$	22
$10^{1000} + 24493$	$(x-8)(x-5)$	13
$10^{1000} + 25947$	$(x-21)(x-13)$	11
$10^{1000} + 27057$	$(x-8)(x-2)$	10
$10^{1000} + 29737$	$x^2 + 12x + 17$	11
$10^{1000} + 41599$	$(x-20)(x-7)$	4
$10^{1000} + 43789$	$(x-15)^2$	7
$10^{1000} + 46227$	$(x-9)(x-2)$	11
$10^{1000} + 46339$	$(x-22)(x-18)$	17
$10^{1000} + 52423$	$(x-19)(x-6)$	2
$10^{1000} + 55831$	$x^2 + 4x + 12$	19
$10^{1000} + 57867$	$x^2 + 16x + 21$	7
$10^{1000} + 59743$	$(x-7)(x-6)$	13
$10^{1000} + 61053$	$x^2 + 21x + 3$	2
$10^{1000} + 61353$	$(x-11)(x-8)$	19
$10^{1000} + 63729$	$x^2 + 5x + 13$	18
$10^{1000} + 64047$	$(x-22)(x-21)$	20
$10^{1000} + 64749$	$x^2 + 16x + 11$	7
$10^{1000} + 68139$	$(x-18)(x-3)$	21
$10^{1000} + 68367$	$x^2 + 2x + 3$	21
$10^{1000} + 70897$	$x^2 + 21x + 3$	2
$10^{1000} + 72237$	$x^2 + 14x + 5$	9
$10^{1000} + 77611$	$x^2 + 14x + 16$	9
$10^{1000} + 78199$	$x^2 + 6x + 21$	17
$10^{1000} + 79237$	$x^2 + 9x + 4$	14
$10^{1000} + 79767$	$x^2 + 15x + 20$	8
$10^{1000} + 82767$	$(x-8)(x-1)$	9
$10^{1000} + 93559$	$x^2 + x + 10$	22
$10^{1000} + 95107$	$(x-15)(x-11)$	3
$10^{1000} + 100003$	$(x-14)(x-13)$	4

$$f_{18} = E_6 \Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{18}(n) q^n = q - 528q^2 - 4284q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned}
F_1(x) = \; & x^{48} - 18\,x^{47} + 104\,x^{46} + 713\,x^{45} - 13386\,x^{44} + 42320\,x^{43} + 437966\,x^{42} - 3584136\,x^{41} - 3339692\,x^{40} + 117478296\,x^{39} - 76525784\,x^{38} \\
& -3648261357\,x^{37} + 9580556574\,x^{36} + 74841100470\,x^{35} - 352965147250\,x^{34} - 923679014933\,x^{33} + 7483087262898\,x^{32} + 6892331867252\,x^{31} \\
& -115691668824547\,x^{30} - 9010472416647\,x^{29} + 1404323760176187\,x^{28} - 504101395316095\,x^{27} - 14118342896995443\,x^{26} \\
& +6775139158683603\,x^{25} + 120603721493152376\,x^{24} - 33289865537178654\,x^{23} - 874043558035736859\,x^{22} - 80708392130512501\,x^{21} \\
& +4862014895202418788\,x^{20} + 3060724675323713997\,x^{19} - 19422736489020355842\,x^{18} - 21890739645935163089\,x^{17} \\
& +50418874698976713276\,x^{16} + 98887445427018773888\,x^{15} - 102037279053112805944\,x^{14} - 256005840143866545898\,x^{13} \\
& +26094027981527569931\,x^{12} + 798786452550782888631\,x^{11} - 299233372467202788217\,x^{10} - 869124768161450402719\,x^{9} \\
& +816944544574594518372\,x^{8} + 315411777791535651850 5\,x^{7} - 719027138860511025292\,x^{6} - 418846433430068384977\,x^{5} \\
& +352755938591814686683 3\,x^{4} + 332680438916880330903 5\,x^{3} + 225358000968591830040 9\,x^{2} + 330681889074462667261\,x \\
& +56978276693960008269
\end{aligned}$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau_{18}(p)$ mod 23
$10^{1000} + 453$	$(x-18)(x-4)$	22
$10^{1000} + 1357$	$x^2+10x+4$	13
$10^{1000} + 2713$	$x^2+13x+10$	10
$10^{1000} + 4351$	$(x-6)(x-5)$	11
$10^{1000} + 5733$	x^2+x+22	22
$10^{1000} + 7383$	$(x-20)(x-14)$	11
$10^{1000} + 10401$	$(x-7)(x-4)$	11
$10^{1000} + 11979$	$(x-11)(x-5)$	16
$10^{1000} + 17557$	x^2+7x+1	16
$10^{1000} + 21567$	$(x-15)(x-14)$	6
$10^{1000} + 22273$	$x^2+22x+18$	1
$10^{1000} + 24493$	$(x-15)(x-9)$	1
$10^{1000} + 25947$	$(x-7)(x-3)$	10
$10^{1000} + 27057$	$x^2+5x+18$	18
$10^{1000} + 29737$	$x^2+5x+20$	18
$10^{1000} + 41599$	$(x-13)(x-1)$	14
$10^{1000} + 43789$	x^2+8x+6	15
$10^{1000} + 46227$	x^2+4x+6	19
$10^{1000} + 46339$	$(x-18)(x-15)$	10
$10^{1000} + 52423$	$x^2+15x+22$	8
$10^{1000} + 55831$	$(x-17)(x-5)$	22
$10^{1000} + 57867$	$x^2+22x+10$	1
$10^{1000} + 59743$	$x^2+13x+15$	10
$10^{1000} + 61053$	$(x-20)(x-7)$	4
$10^{1000} + 61353$	$(x-15)(x-1)$	16
$10^{1000} + 63729$	x^2+9	0
$10^{1000} + 64047$	$(x-17)^2$	11
$10^{1000} + 64749$	$x^2+22x+7$	1
$10^{1000} + 68139$	$(x-9)^2$	18
$10^{1000} + 68367$	x^2+8x+2	15
$10^{1000} + 70897$	$(x-2)(x-1)$	3
$10^{1000} + 72237$	$(x-17)(x-1)$	18
$10^{1000} + 77611$	$(x-19)(x-7)$	3
$10^{1000} + 78199$	$(x-17)(x-6)$	0
$10^{1000} + 79237$	x^2+4x+8	19
$10^{1000} + 79767$	$x^2+11x+21$	12
$10^{1000} + 82767$	x^2+x+12	22
$10^{1000} + 93559$	$(x-10)(x-6)$	16
$10^{1000} + 95107$	$x^2+13x+8$	10
$10^{1000} + 100003$	$(x-14)(x-4)$	18

$$f_{20} = E_8\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{20}(n)q^n = q + 456q^2 + 50652q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned} F_1(x) = {} & x^{48} + 138\,x^{44} + 6164\,x^{42} + 411217\,x^{40} - 11380860\,x^{38} - 115516534\,x^{36} + 9539635848\,x^{34} - 156908942942\,x^{32} + 799959548436\,x^{30} \\ & +7913514052832\,x^{28} - 126708655366718\,x^{26} + 136577769771093\,x^{24} + 9853386367540650\,x^{22} - 108888707630352348\,x^{20} \\ & +671709172818003575\,x^{18} - 1321020868142116948\,x^{16} - 8427106301982332424\,x^{14} + 36752291123108567958\,x^{12} \\ & -132035700922805270649\,x^{10} - 230317508156965273782\,x^{8} + 2140287150300153916243\,x^{6} - 3276962879805991132931\,x^{4} \\ & +1254790821501687608044\,x^{2} - 1413496679053333555200 \end{aligned}$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau_{20}(p)$ mod 23
$10^{1000} + 453$	$x^2 + 5x + 13$	18
$10^{1000} + 1357$	$x^2 + 22x + 12$	1
$10^{1000} + 2713$	$x^2 + 11x + 19$	12
$10^{1000} + 4351$	$(x - 22)(x - 6)$	5
$10^{1000} + 5733$	$x^2 + 22x + 22$	1
$10^{1000} + 7383$	$(x - 15)(x - 10)$	2
$10^{1000} + 10401$	$x^2 + 13x + 20$	10
$10^{1000} + 11979$	$x^2 + 10x + 8$	13
$10^{1000} + 17557$	$(x - 16)(x - 13)$	6
$10^{1000} + 21567$	$(x - 18)(x - 2)$	20
$10^{1000} + 22273$	$(x - 22)(x - 20)$	19
$10^{1000} + 24493$	$(x - 11)(x - 3)$	14
$10^{1000} + 25947$	$x^2 + 18x + 14$	5
$10^{1000} + 27057$	$x^2 + 16x + 3$	7
$10^{1000} + 29737$	$x^2 + 22x + 10$	1
$10^{1000} + 41599$	$(x - 22)(x - 19)$	18
$10^{1000} + 43789$	$x^2 + 2$	0
$10^{1000} + 46227$	$(x - 14)(x - 10)$	1
$10^{1000} + 46339$	$(x - 18)(x - 5)$	0
$10^{1000} + 52423$	$(x - 21)(x - 12)$	10
$10^{1000} + 55831$	$(x - 21)(x - 20)$	18
$10^{1000} + 57867$	$(x - 22)(x - 4)$	3
$10^{1000} + 59743$	$(x - 11)(x - 9)$	20
$10^{1000} + 61053$	$x^2 + 9x + 9$	14
$10^{1000} + 61353$	$(x - 22)(x - 16)$	15
$10^{1000} + 63729$	$x^2 + 19x + 8$	4
$10^{1000} + 64047$	$(x - 18)(x - 13)$	8
$10^{1000} + 64749$	$(x - 21)(x - 3)$	1
$10^{1000} + 68139$	$(x - 18)(x - 1)$	19
$10^{1000} + 68367$	$x^2 + x + 9$	22
$10^{1000} + 70897$	$x^2 + 21x + 9$	2
$10^{1000} + 72237$	$(x - 11)(x - 4)$	15
$10^{1000} + 77611$	$(x - 15)(x - 14)$	6
$10^{1000} + 78199$	$(x - 17)(x - 16)$	10
$10^{1000} + 79237$	$x^2 + 5x + 16$	18
$10^{1000} + 79767$	$x^2 + 18x + 14$	5
$10^{1000} + 82767$	$(x - 11)(x - 10)$	21
$10^{1000} + 93559$	$x^2 + 6x + 15$	17
$10^{1000} + 95107$	$(x - 19)^2$	15
$10^{1000} + 100003$	$x^2 + 15x + 19$	8

$$f_{22} = E_{10}\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{22}(n)q^n = q - 288q^2 - 128844q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned}F_1(x) = {} & x^{48} - 24\,x^{47} + 282\,x^{46} - 2162\,x^{45} + 11730\,x^{44} - 44022\,x^{43} + 107318\,x^{42} - 230184\,x^{41} + 1224773\,x^{40} - 6418150\,x^{39} + 20646180\,x^{38} \\
& -106239070\,x^{37} + 861388341\,x^{36} - 4350708474\,x^{35} + 12951557531\,x^{34} - 35220285296\,x^{33} + 153515022439\,x^{32} - 557061221116\,x^{31} \\
& +1043490443744\,x^{30} - 2145293494508\,x^{29} + 15533275998644\,x^{28} - 64440788973996\,x^{27} + 126301910679527\,x^{26} - 289016829533129\,x^{25} \\
& +1490830930509531\,x^{24} - 4151958313846730\,x^{23} + 2959806178106587\,x^{22} - 554199734239875\,x^{21} + 37398039631939009\,x^{20} \\
& -68948885441009402\,x^{19} - 242079678914859136\,x^{18} + 923458362403503805\,x^{17} - 1028152009950784023\,x^{16} + 1430450017732252380\,x^{15} \\
& -873595542770528106 2\,x^{14} + 30262326442397465638\,x^{13} - 65136249892800022998\,x^{12} + 106344209427676987159\,x^{11} \\
& -191263763013553856825\,x^{10} + 398016985508687147570\,x^{9} - 846755977929831045149\,x^{8} + 1489158519043217595209\,x^{7} \\
& -2173930736784586255275\,x^{6} + 2517085538320694878766\,x^{5} - 2400712246359310007498\,x^{4} + 1777165025685530549441\,x^{3} \\
& -1034356393810662476365\,x^{2} + 401807061619352818864\,x - 104412681259163758868\end{aligned}$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau_{22}(p)$ mod 23
$10^{1000}+453$	$(x-19)(x-7)$	3
$10^{1000}+1357$	x^2+13	0
$10^{1000}+2713$	$x^2+8x+20$	15
$10^{1000}+4351$	$(x-16)(x-11)$	4
$10^{1000}+5733$	$x^2+19x+22$	4
$10^{1000}+7383$	$(x-19)(x-14)$	10
$10^{1000}+10401$	$(x-16)(x-5)$	21
$10^{1000}+11979$	$(x-17)(x-15)$	9
$10^{1000}+17557$	$(x-19)(x-17)$	13
$10^{1000}+21567$	$(x-19)(x-7)$	3
$10^{1000}+22273$	$x^2+14x+12$	9
$10^{1000}+24493$	$(x-7)(x-4)$	11
$10^{1000}+25947$	$x^2+4x+17$	19
$10^{1000}+27057$	$x^2+3x+12$	20
$10^{1000}+29737$	x^2+5x+5	18
$10^{1000}+41599$	$(x-7)^2$	14
$10^{1000}+43789$	$x^2+18x+16$	5
$10^{1000}+46227$	$x^2+19x+16$	4
$10^{1000}+46339$	$x^2+22x+7$	1
$10^{1000}+52423$	$(x-22)(x-1)$	0
$10^{1000}+55831$	$x^2+12x+8$	11
$10^{1000}+57867$	$(x-17)(x-12)$	6
$10^{1000}+59743$	$(x-21)(x-16)$	14
$10^{1000}+61053$	x^2+4x+6	19
$10^{1000}+61353$	$(x-19)(x-8)$	4
$10^{1000}+63729$	$(x-5)^2$	10
$10^{1000}+64047$	$(x-12)(x-6)$	18
$10^{1000}+64749$	$(x-13)(x-10)$	0
$10^{1000}+68139$	$(x-21)^2$	19
$10^{1000}+68367$	$(x-19)(x-10)$	6
$10^{1000}+70897$	$x^2+14x+6$	9
$10^{1000}+72237$	$(x-20)(x-13)$	10
$10^{1000}+77611$	$(x-4)(x-3)$	7
$10^{1000}+78199$	$(x-14)(x-8)$	22
$10^{1000}+79237$	$x^2+20x+9$	3
$10^{1000}+79767$	$x^2+8x+17$	15
$10^{1000}+82767$	$x^2+16x+4$	7
$10^{1000}+93559$	$(x-14)(x-13)$	4
$10^{1000}+95107$	$(x-3)^2$	6
$10^{1000}+100003$	$(x-19)(x-18)$	14

$\underline{\ell = 29}$

$$f_{12} = \Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n) q^n = q - 24q^2 + 252q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned}
F_2(x) = {} & x^{120} - 39\,x^{119} + 52\,x^{118} + 18802\,x^{117} - 260738\,x^{116} - 2224996\,x^{115} + 78123651\,x^{114} - 328828100\,x^{113} - 8263917952\,x^{112} \\
& +105418992285\,x^{111} - 9281370047\,x^{110} - 8673650394390\,x^{109} + 67175813321912\,x^{108} + 3240223696313\,x^{107} - 3625273840703346\,x^{106} \\
& +28868328866222299\,x^{105} - 55712181926653112\,x^{104} - 831213186859484809\,x^{103} + 6400389530587512440\,x^{102} + 5664948473704761298\,x^{101} \\
& -236599099025809755837\,x^{100} - 861490465265746007141\,x^{99} + 18049361157398735512827\,x^{98} - 14303417173847332465414\,x^{97} \\
& +3099082799270361144089 48\,x^{96} + 4110452935977502930211262\,x^{95} - 4980858750768408684161327 2\,x^{94} + 25571839079776121898011224 9\,x^{93} \\
& -370938232422515550238030706\,x^{92} - 4239746526064029063336974560\,x^{91} + 4005926013783907999032473568 2\,x^{90} \\
& -20513410003540864749070929492 5\,x^{89} + 690810959665321724654129463170\,x^{88} - 1150913531696070804731460240641\,x^{87} \\
& -2905017526953691499670077418670\,x^{86} + 47322659102097465506352390635856\,x^{85} - 42579229247807961684304670631408 3\,x^{84} \\
& +273983823418391368950441782624952 5\,x^{83} - 1237724766258906442878486581595807 5\,x^{82} + 412962513007632429112918749244922 36\,x^{81} \\
& -86096254481992808573240127681847534\,x^{80} - 17416198743861733006951195745494821 6\,x^{79} + 300494544286520846539964686478530600 7\,x^{78} \\
& -1942660986678065957896284118296271486 5\,x^{77} + 1081994531218585445622743376957315359 51\,x^{76} \\
& -540562354485415170568171856724347249028\,x^{75} + 2003170329279473549264139360014033008269\,x^{74} \\
& -4906345350745852789161273456858421483526\,x^{73} + 6852101959985515455407213317694533880854\,x^{72} \\
& +21744835456542777978544010432017957570998\,x^{71} - 354531601960104186814288045752985534837356\,x^{70} \\
& +241581376771037535500717404878536933737061 9\,x^{69} - 117954763206371874471128478901572564306418 18\,x^{68} \\
& +51949786215458201865850168647651038718083533\,x^{67} - 205837760707652251236618469331715307953868772\,x^{66} \\
& +632794675891664554262532875475585224624885501\,x^{65} - 1549984687081576409789267803107087061300626754\,x^{64} \\
& +378017168044373662926558778853181704310135802 1\,x^{63} - 2032042888653854240770004273667014042737914619\,x^{62} \\
& -75296586398944854033134144067268466018165634371\,x^{61} + 492438774401604429008913700838759413140834029077\,x^{60} \\
& -1872146628576921265301617989405459118651511828249\,x^{59} + 7889534315510055163849348514205854835317146183354\,x^{58} \\
& -37623219532998612719188117562544690312647851443329\,x^{57} + 133715149099087666221878622209330023885832980173762\,x^{56} \\
& -358527853259357643101016413194439711168998587653646\,x^{55} + 1150214873720403752145704516777301458540259708566007\,x^{54} \\
& -4251058748128336628769990060481020773188738825695702\,x^{53} + 10642612653109338583300281664637819808188791020684468\,x^{52} \\
& -17402914533613728148979826342208602338942607463119246\,x^{51} + 48633429629872181118699939461795124668503022992755678\,x^{50} \\
& -165403276792631997282371651395087674782654230366714124\,x^{49} + 145015997107909021398686766742679587247121061293408986\,x^{48} \\
& +492392849280060573773565340461610525259317147507294865\,x^{47} - 2715114582964383824881116936107750024974651284171703 94\,x^{46} \\
& -6526646192486203303910266434448179610463332821364057 57\,x^{45} - 16367594587199289948998686451709338569385261309703750822\,x^{44} \\
& +44978511235283376299343780035953332879799842232519914312\,x^{43} + 196460736685598582240236509298226221129340805737952284 22\,x^{42} \\
& +285351674292608162023033636265975197513072922037481805 24\,x^{41} - 498090822280959521158336743012213915583277009997639543769\,x^{40} \\
& -940364373679220067932549479979755134636234011579427914542\,x^{39} + 2521673052520748698612222377227238872725904760567919548740\,x^{38} \\
& +7019283132304011272238795849686785307621156377148940945457\,x^{37} + 12407898598890801572422838737227607844456571501921254925864\,x^{36} \\
& -5477494054293281239503154931515713429267598751685716293693 3\,x^{35} \\
& -16728016029174311224390252816926845697895793955883320050638 4\,x^{34} \\
& +66685231231069675353959106828906025058508433889848745908446\,x^{33} \\
& +114420020007129579614174698223262933210266204113319462554452 7\,x^{32} \\
& +146538077851632580289022514328912014384400393859779956594201 5\,x^{31} \\
& -454604223375249308255325579879374403307137550469935257105158 2\,x^{30} \\
& -1269104852969082017767072355129038790225843259947458251101132 4\,x^{29} \\
& +5219645215184371778852291796118549498037264765670011997356903\,x^{28} \\
& +59536146913870227752311679132874695245690076312069901091973737\,x^{27} \\
& +42271202746576508837242051054585488179771161211530729060009727\,x^{26} \\
& -167593661120219565661536403962471583120422676161951086004048721\,x^{25} \\
& -286368937487543599711899983016552475758462484909274064469481002\,x^{24} \\
& +230382055771017547055677721234005290186180568652972820922049224\,x^{23} \\
& +928283302209877157721534651901436783095651772196213609374878685\,x^{22} \\
& +175585932223464736559299592405845533688516285207784943808278420\,x^{21} \\
& -1758850016954365463305055994507463367031764582472365647306994534\,x^{20} \\
& -1465327287102397863683326389027330201118347359802335300172559328\,x^{19} \\
& +1773321220836307165702143644634692168610741013365613960356877087\,x^{18} \\
& +2904606733860530703041514422127534636066546248303444459223252869\,x^{17} \\
& -520308669130339394544399063835249522615387011157258025834606131\,x^{16} \\
& -2906947132318789204808524108533368321356173905644648961284835769\,x^{15} \\
& -393534993004425879883701416875089550520476893473247289746770881\,x^{14} \\
& +2113255440095432232134067491875625170919662276031515339003865608\,x^{13} \\
& +343521455053064377858576614861077606598382997902674984475727361\,x^{12} \\
& -1980733816420089301985076580314504281378403676364093859856750280\,x^{11} \\
& -841423938599508546949037276545037161554893873562770775547347936\,x^{10} \\
& +1511611164721597762311281100747394082476044535180259343320913007\,x^{9} \\
& +1865894071033615040665160647561792975872738246766682774064852296\,x^{8} \\
& +887398778985804089226899981553259732564931621689808536397397622\,x^{7} \\
& +327959598838061445269659568556871680486016836452609211222699063\,x^{6} \\
& +280807031529596339466111600718026859424625249954985059771350709\,x^{5} \\
& +234434262697623313809637590557065036950844063730534986852355367\,x^{4} \\
& +128418383859788691330267355023441549682203671844754849186711248\,x^{3} \\
& +47862235923713816575492173460515921299171434171423149409051143\,x^{2} \\
& +7941532444376844604785215172809295246343317508709928231445127\,x \\
& -8041391805699657770354078484264422229623003571080669280398 35
\end{aligned}$$

$$f_{12} = \Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n) q^n = q - 24q^2 + 252q^3 + O(q^4)$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau(p)$ mod 29
$10^{1000} + 453$	$x^2 + 8x + 24$	21
$10^{1000} + 1357$	$x^2 + 21x + 1$	8
$10^{1000} + 2713$	$x^2 + 18x + 20$	11
$10^{1000} + 4351$	$x^2 + 3$	0
$10^{1000} + 5733$	$(x - 20)(x - 2)$	22
$10^{1000} + 7383$	$(x - 19)(x - 10)$	0
$10^{1000} + 10401$	$(x - 7)(x - 2)$	9
$10^{1000} + 11979$	$x^2 + 22x + 22$	7
$10^{1000} + 17557$	$x^2 + 27$	0
$10^{1000} + 21567$	$(x - 23)(x - 3)$	26
$10^{1000} + 22273$	$x^2 + 15x + 3$	14
$10^{1000} + 24493$	$x^2 + 25x + 16$	4
$10^{1000} + 25947$	$(x - 27)(x - 15)$	13
$10^{1000} + 27057$	$x^2 + 22x + 23$	7
$10^{1000} + 29737$	$(x - 23)(x - 10)$	4
$10^{1000} + 41599$	$(x - 13)(x - 5)$	18
$10^{1000} + 43789$	$(x - 18)(x - 15)$	4
$10^{1000} + 46227$	$x^2 + 7x + 3$	22
$10^{1000} + 46339$	$(x - 26)(x - 8)$	5
$10^{1000} + 52423$	$(x - 17)(x - 16)$	4
$10^{1000} + 55831$	$x^2 + 21x + 4$	8
$10^{1000} + 57867$	$(x - 13)(x - 11)$	24
$10^{1000} + 59743$	$x^2 + 24x + 2$	5
$10^{1000} + 61053$	$x^2 + 18x + 21$	11
$10^{1000} + 61353$	$(x - 24)(x - 1)$	25
$10^{1000} + 63729$	$(x - 20)(x - 1)$	21
$10^{1000} + 64047$	$x^2 + 14x + 6$	15
$10^{1000} + 64749$	$x^2 + 14x + 28$	15
$10^{1000} + 68139$	$(x - 12)(x - 2)$	14
$10^{1000} + 68367$	$x^2 + 26x + 26$	3
$10^{1000} + 70897$	$x^2 + 12x + 28$	17
$10^{1000} + 72237$	$x^2 + 27x + 13$	2
$10^{1000} + 77611$	$(x - 14)(x - 13)$	27
$10^{1000} + 78199$	$(x - 17)(x - 14)$	2
$10^{1000} + 79237$	$x^2 + 28x + 25$	1
$10^{1000} + 79767$	$x^2 + 13x + 16$	16
$10^{1000} + 82767$	$(x - 27)(x - 13)$	11
$10^{1000} + 93559$	$x^2 + 13x + 17$	16
$10^{1000} + 95107$	$(x - 25)(x - 24)$	20
$10^{1000} + 100003$	$(x - 26)(x - 13)$	10

$$f_{16} = E_4\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{16}(n) q^n = q + 216q^2 - 3348q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned}
F_2(x) = {} & x^{120} - 51\,x^{119} + 1211\,x^{118} - 16021\,x^{117} + 87384\,x^{116} + 1010070\,x^{115} - 29296844\,x^{114} + 347069680\,x^{113} - 2163789383\,x^{112} - 1585155080\,x^{111} \\
& +208167238676\,x^{110} - 2631658007911\,x^{109} + 18232312452484\,x^{108} - 46571249240148\,x^{107} - 528446420597441\,x^{106} + 7693187824802642\,x^{105} \\
& -48292517470143397\,x^{104} + 119689329097761020\,x^{103} + 586500330244207243\,x^{102} - 6655451453640401595\,x^{101} + 25682845442665489470\,x^{100} \\
& -63608948081040494751\,x^{99} + 70299301934741087852 2\,x^{98} - 7625580581772577490963\,x^{97} + 30495276083007623191145\,x^{96} \\
& +126050539227166266891336\,x^{95} - 2098559060727868065932429\,x^{94} + 9395942945251476018792763\,x^{93} + 21888763741668108996 38270\,x^{92} \\
& -206428030151460360434053768\,x^{91} + 606381352414272779956672926\,x^{90} + 3273014033404031368450256532\,x^{89} - 28178542685771210764597204272\,x^{88} \\
& +257664673085972847692212575 05\,x^{87} + 613299636565172519792439159866\,x^{86} - 3538342027575222156701146236511\,x^{85} \\
& +6546992653038997976820267664636\,x^{84} - 69457031553075774985906796061 04\,x^{83} + 29358813592178108089252344086936 2\,x^{82} \\
& -327347813117990254464841873384453 9\,x^{81} + 177647891826289798987601984012084 70\,x^{80} - 52241879096521643407114853912923491\,x^{79} \\
& +568149953970681250677103029985197 11\,x^{78} - 388480886680499459762814507347724 99\,x^{77} + 2613933535478796698303816816333450787\,x^{76} \\
& -26253868960097256433310155855636008256\,x^{75} + 137102995948931518977034251179929443649\,x^{74} - 436946999139120037139022930885102381264\,x^{73} \\
& +727937348143151872143734612056530324248\,x^{72} + 6538829287675238499148284598576676 0966\,x^{71} + 11763627298857461234410648380637303227 89\,x^{70} \\
& -54434185251564206301800385332365669501819\,x^{69} + 43057390766274226419936111064885521437055 3\,x^{68} \\
& -2038260611694595759556390199899497651603000\,x^{67} + 6712960901619281880501410993173587663955935\,x^{66} \\
& -15098641593712888631233448779805265826679493\,x^{65} + 18312849108319024236413623659762540775388457\,x^{64} \\
& -17523244039736343205240701652911395332268 91\,x^{63} + 12244735131879503061649780198953902472785703 3\,x^{62} \\
& -171655235850161117892804216519895511678880231 9\,x^{61} + 1067174101699306864321263271265834912896408115 2\,x^{60} \\
& -4390769284648287322113609721218140710891386502 1\,x^{59} + 1286076121457176766629567499495394432342785128 21\,x^{58} \\
& -240181267239924179654735082645371545953227059947\,x^{57} + 384069570449424419257795371580173487233633916 92\,x^{56} \\
& +18292380688396317964280403147764946155913224521 59\,x^{55} - 8854206689897840288297862446223273217605288300293\,x^{54} \\
& +25453320374216220415861013333189087411777775512272\,x^{53} - 39085437805116855253257084432562134370224799398167\,x^{52} \\
& -802983893109349584738950055433388427349212930573 27\,x^{51} + 940355705917856255113825869017577016619172995395113\,x^{50} \\
& -4394797550649868669084914405078555962931212172126519\,x^{49} + 13955584419125947105807895775411331138359448821735873\,x^{48} \\
& -28621672540280521890711903841838731693619034491178701\,x^{47} + 147210210597364576583711598157041713431774722673261 73\,x^{46} \\
& +158497374100160324420388670129018575444201856820664386\,x^{45} - 785460684062751951842424688289275165931068512165094399\,x^{44} \\
& +211471603509888340944868375938562758064803169865804427 4\,x^{43} - 3375608305718469452745114786151484626420673529599744346\,x^{42} \\
& +1090988638665830967276229541560808209842107775646464734\,x^{41} + 1218249590402581765096268587411905658164168717363337144 4\,x^{40} \\
& -42636913602131739221041303903986367906701320249850627271\,x^{39} + 78702759159594690327882285599671613170092865917616829881\,x^{38} \\
& -83971636048717962935950832203025123587625461030707309012\,x^{37} - 366574709348682717959402030798997919796378856298938237 4\,x^{36} \\
& +220018142116515819036061657176153376209222436980420318371\,x^{35} - 436412062067080865313807411509938979875318443765172992713\,x^{34} \\
& +743287049312189421585813953574810594692946187354081050310\,x^{33} - 1532769595289454256020998689935602147954463142982139918322\,x^{32} \\
& +2866465263242964649914119799281320173985329779578266300211\,x^{31} - 4297116190505735790547019457016074644852913793153027561626\,x^{30} \\
& -3892706769776942321695332954123030589316171469421866509283\,x^{29} + 41745674974839836796540479618018774299276237808150063919176\,x^{28} \\
& -98702692389747417610503950570376551697052285021921004759322\,x^{27} + 117003146786845463877416199180053066343205902147498254971952\,x^{26} \\
& +26055823131524461294252926114980865319304479501403154271435\,x^{25} - 640734836278643456275487022019311861064833606288769640258606\,x^{24} \\
& +1516234145236800684015054276615328165400108315506370787448661\,x^{23} - 1548295499519826206758933734131770237821341607802871043108431\,x^{22} \\
& +1249226568049610449096188526958348031466670239164097933239 25\,x^{21} + 3538007960333864532507565146876234861871239331536478323704666\,x^{20} \\
& -7372601228860582685464423076046561913887115525353094445988417\,x^{19} + 7486747425514637673261013525216967100076179610821978513921871\,x^{18} \\
& +2825988970263988103294577994498009551816557776002318873110842\,x^{17} - 16576181636562995930926842733529587178791933162710746376671735\,x^{16} \\
& +14326964043615039589110365167205294808102067637713645412093352\,x^{15} - 17239081189744307700687781417233864752312438921259672514614012\,x^{14} \\
& -25918025892046990592879938111452530637536733279141137543554689\,x^{13} + 36292355803377427544432358464762157857344979701924758130001681\,x^{12} \\
& -16171085903510759733471067377934650838043855344181557154203572\,x^{11} - 40094443868049567068570761610471174071861944367646304519845 8\,x^{10} \\
& +92957846054282614649533286840643699201963515579962402874636606\,x^{9} + 28404670077008639199489980786291190940068287775825662905917937\,x^{8} \\
& +114040304674102905808709734208347643485701284588540736828726380\,x^{7} + 243633619223957299654677593302836332915881588340305782517066445\,x^{6} \\
& +160369075954401713812878987784703461682843983203793311399698879\,x^{5} + 215283713965631244722863422821061959116454777401922937944413575\,x^{4} \\
& +205076068809550376449541580707091082185505751490996863781389717\,x^{3} + 405050186777855293031006080203331668562162988350009445553639 52\,x^{2} \\
& -361723581762210018911794013838495407076346702569371398933228 7\,x - 259893311321718685373192768962358249444900840355348706730510 9
\end{aligned}$$

$$f_{16} = E_4\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{16}(n)q^n = q + 216q^2 - 3348q^3 + O(q^4)$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau_{16}(p)$ mod 29
$10^{1000} + 453$	$x^2 + 16x + 25$	13
$10^{1000} + 1357$	$x^2 + 9x + 1$	20
$10^{1000} + 2713$	$(x - 23)(x - 1)$	24
$10^{1000} + 4351$	$x^2 + 18x + 21$	11
$10^{1000} + 5733$	$(x - 22)(x - 8)$	1
$10^{1000} + 7383$	$x^2 + x + 24$	28
$10^{1000} + 10401$	$(x - 17)(x - 7)$	24
$10^{1000} + 11979$	$x^2 + 26x + 9$	3
$10^{1000} + 17557$	$(x - 27)(x - 24)$	22
$10^{1000} + 21567$	$(x - 16)(x - 11)$	27
$10^{1000} + 22273$	$(x - 27)(x - 4)$	2
$10^{1000} + 24493$	$(x - 25)(x - 23)$	19
$10^{1000} + 25947$	$(x - 17)^2$	5
$10^{1000} + 27057$	$x^2 + 22x + 7$	7
$10^{1000} + 29737$	$x^2 + 10$	0
$10^{1000} + 41599$	$x^2 + 2x + 20$	27
$10^{1000} + 43789$	$x^2 + 19x + 6$	10
$10^{1000} + 46227$	$(x - 24)(x - 19)$	14
$10^{1000} + 46339$	$x^2 + 17x + 4$	12
$10^{1000} + 52423$	$(x - 26)(x - 9)$	6
$10^{1000} + 55831$	$(x - 17)(x - 11)$	28
$10^{1000} + 57867$	$(x - 27)(x - 24)$	22
$10^{1000} + 59743$	$x^2 + 28x + 19$	1
$10^{1000} + 61053$	$(x - 21)(x - 20)$	12
$10^{1000} + 61353$	$x^2 + 13x + 25$	16
$10^{1000} + 63729$	$(x - 28)(x - 6)$	5
$10^{1000} + 64047$	$(x - 23)(x - 6)$	0
$10^{1000} + 64749$	$(x - 24)(x - 6)$	1
$10^{1000} + 68139$	$(x - 24)^2$	19
$10^{1000} + 68367$	$(x - 26)(x - 7)$	4
$10^{1000} + 70897$	$x^2 + 15x + 28$	14
$10^{1000} + 72237$	$(x - 28)(x - 24)$	23
$10^{1000} + 77611$	$x^2 + 19x + 15$	10
$10^{1000} + 78199$	$(x - 10)(x - 8)$	18
$10^{1000} + 79237$	$(x - 25)^2$	21
$10^{1000} + 79767$	$x^2 + 17x + 24$	12
$10^{1000} + 82767$	$x^2 + 6x + 21$	23
$10^{1000} + 93559$	$(x - 24)(x - 14)$	9
$10^{1000} + 95107$	$x^2 + 6x + 23$	23
$10^{1000} + 100003$	$(x - 26)(x - 6)$	3

$$f_{18} = E_6\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{18}(n)q^n = q - 528q^2 - 4284q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned}
F_2(x) = {} & x^{120} - x^{119} + 4\,x^{118} - 1499\,x^{117} + 4924\,x^{116} - 38918\,x^{115} + 1434079\,x^{114} - 5191986\,x^{113} + 33414583\,x^{112} - 734646067\,x^{111} + 2749499048\,x^{110} \\
& -14612009368\,x^{109} + 248946429676\,x^{108} - 647245471034\,x^{107} + 2110942720004\,x^{106} - 54974708833202\,x^{105} + 57234838037895\,x^{104} \\
& +190655256962545\,x^{103} + 8347874368697299\,x^{102} + 23756897492097978\,x^{101} - 152789704810493082\,x^{100} - 2655603051050524032\,x^{99} \\
& -1114748594842422409\,x^{98} + 53301412365691525531\,x^{97} + 403741924952639681707\,x^{96} - 252423797009489792054\,x^{95} - 6354013570504705306072\,x^{94} \\
& -6792117972143704971240 1\,x^{93} - 290104037048698677139748\,x^{92} + 3247481343271081659738625\,x^{91} + 14418718710099981876286493\,x^{90} \\
& -108000216399911031457568 62\,x^{89} - 492484376022339273095051864\,x^{88} - 2106615734558201409264003317\,x^{87} + 7303039161170533137692529282\,x^{86} \\
& +32711719036725099901913706206\,x^{85} + 445763400979196780339110145270\,x^{84} + 636720755929898748799537702556\,x^{83} \\
& -2719528628815590517144972922629 9\,x^{82} - 29438299447512599772984818741360\,x^{81} + 66215501789260552744455496865240 2\,x^{80} \\
& -3172781361672215914647336052218 48\,x^{79} - 22580025610433908738435544694935 40\,x^{78} + 58227204153933176827522439461112327\,x^{77} \\
& -504550015600558362017375701371418771\,x^{76} - 1620357139431888051886641979009916939\,x^{75} + 1971295158066345478153001918836035865 5\,x^{74} \\
& +5494184532320491302615179629662024443\,x^{73} - 330889401053819236610759033326852965379\,x^{72} + 1039388519968929649097245925023411775544\,x^{71} \\
& -1837898184562825626498967597424713355496\,x^{70} - 32549114163228273581507043923947495027261\,x^{69} \\
& +22507766929366320951697818802207952103639 8\,x^{68} + 440410563417088515955889096433371576936764\,x^{67} \\
& -510403865420375679726950200544706465649487 7\,x^{66} - 5878451420676019140333960058348622767384763\,x^{65} \\
& +68943984699679082001861609160758809760940557\,x^{64} + 145075505858168893811894264758143487070892180\,x^{63} \\
& -768510377940414611620875207532469402592345246\,x^{62} - 3087621284969871066257373670102858583461312952\,x^{61} \\
& +10742983457013247667062348056127485404503956848\,x^{60} + 27484069337891959190757370311607189170119758721\,x^{59} \\
& -131658065185696711269987234133888574485849237032\,x^{58} + 300060481574028106640552308125061780001056137392\,x^{57} \\
& -4438279614078664311624404217125319522298881060 30\,x^{56} - 6456217420681497446171830415846321297339855472972\,x^{55} \\
& +23761341892767476671833555076400667609035806786794\,x^{54} + 53581679773053283946435983601750441695753147325821\,x^{53} \\
& -171780829177366452578825872066632972513739965874517\,x^{52} - 928345054172270531526238054817608864518626578324795\,x^{51} \\
& +1771449779837367340010453556579067147021048337196114\,x^{50} + 7809674689986837756481185405470679667201826821102122\,x^{49} \\
& -32897707695058429242195822115053364599141429034998 41\,x^{48} - 74045799328905304381462383910985433886271880232847880\,x^{47} \\
& -877385787395747054811439137775887312487077410494611 3\,x^{46} + 394890924772878649920169112792691366994530510717950731\,x^{45} \\
& -1125792009284281478022298876826107192423420415274883160\,x^{44} + 10583355245086411815807906607437011143598040554124503519\,x^{43} \\
& -22328615602091178780699817391972014194998932443290813541\,x^{42} - 481023787942841602728868450947917990892569537201438343 06\,x^{41} \\
& -1678553974193256627572124128862985611140144796973077948 4\,x^{40} + 5974187366455324671413887525207246843023761938496085876 44\,x^{39} \\
& +2674569422437085760074615836329356139988592088328635865523\,x^{38} - 11900652591114289390794442413206214626981762819757217198874\,x^{37} \\
& -15262051699976676476581478627382193938897075180946785881541\,x^{36} + 575191501755003067900602007344280479701887214918970933687 06\,x^{35} \\
& +23056996073489603276897557085134476762325798659551442123967 0\,x^{34} - 339938020469909088199391168949511179122179224965698118921024\,x^{33} \\
& -2209362687819255331917932270084876413924567924844440895100120\,x^{32} + 12744145936746279864980322987604660559039058789225690459748 34\,x^{31} \\
& +2068944902220650790502732461552245860022527092265340269487687 4\,x^{30} \\
& -1363406360696833438100388126075364810490370521467352318099527 7\,x^{29} \\
& -14531217929137378707671525786995544492733309359299974592088575 2\,x^{28} \\
& +17939020561814987623224061707663455247405236628474652162394848 7\,x^{27} \\
& +51902858835655774413005684810645227973750818066768057072268085 2\,x^{26} \\
& -27700143771347409233163715244591041064782531471309955216391177 0\,x^{25} \\
& -46055930281794750234236025480674895093521854069924292302114645 02\,x^{24} \\
& +76007087009206000168595711469163610572287027674892908392478000 75\,x^{23} \\
& +90829391977742982892333156226012841021151666865186126250401374 16\,x^{22} \\
& -32453842192120211128664078300366006851919879441238767873358717 112\,x^{21} \\
& +85057863487649884008365953333305649150212738332060866438680473 36\,x^{20} \\
& +35870829106484700953957341898120787715891770018348443016730431 929\,x^{19} \\
& -10953735799129175103682107771613348576862193309583605927765004 34\,x^{18} \\
& +83553099415330878759863055214865118127462131513800264513780964 670\,x^{17} \\
& -49950195755315393013094552454807549897287487454218636454241624 6815\,x^{16} \\
& v + 12812123963628360491332513756075185155573314785162894914008251 9090\,x^{15} \\
& +15718120266092214187448044026714787306799904575186161979373687 22157\,x^{14} \\
& -15904914921664791614546364010311557965410082144523640925792056 04632\,x^{13} \\
& -19807354309828179920974537905273069642492594883397135278104968 93159\,x^{12} \\
& +13502676435116911122991549042961627296858752542655643667323884 31190\,x^{11} \\
& +13408821424355227313140540900355525330480750586646971208581447 50458\,x^{10} \\
& +65201285601489685652812958112225339642120475291218615912560842 78704\,x^{9} \\
& -15094375479514581773926617628726208341732073669108952643675965 71376\,x^{8} \\
& -19532757246955976278821773521475675420293154254320395339200386 979795\,x^{7} \\
& -31997347205004309951466425971633764781915075292151969008441197 435488\,x^{6} \\
& -54682611484008622991232414796042778726459158502431411301012398 207115\,x^{5} \\
& -70098145840675670855138881281841657102807035640155215457303005 593425\,x^{4} \\
& -59104312324232146792488419514662272652494006480546279737969925 015530\,x^{3} \\
& -38817818756538214536231427033857409220638408277274698786637046 615521\,x^{2} \\
& -24123917282373356583467326376106539805835011029691766766603939 659781\,x \\
& -13205581605232879128815652278780964587331701913067350107476168 281149
\end{aligned}$$

$$f_{18} = E_6\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{18}(n)q^n = q - 528q^2 - 4284q^3 + O(q^4)$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau_{18}(p)$ mod 29
$10^{1000} + 453$	$x^2 + 13x + 23$	16
$10^{1000} + 1357$	$(x-22)(x-4)$	26
$10^{1000} + 2713$	$x^2 + 16x + 16$	13
$10^{1000} + 4351$	$(x-23)(x-8)$	2
$10^{1000} + 5733$	$(x-16)(x-15)$	2
$10^{1000} + 7383$	$(x-13)(x-6)$	19
$10^{1000} + 10401$	$x^2 + 27x + 27$	2
$10^{1000} + 11979$	$x^2 + 10x + 4$	19
$10^{1000} + 17557$	$x^2 + 19x + 14$	10
$10^{1000} + 21567$	$(x-27)(x-25)$	23
$10^{1000} + 22273$	$(x-27)(x-24)$	22
$10^{1000} + 24493$	$x^2 + 6x + 20$	23
$10^{1000} + 25947$	$(x-21)(x-11)$	3
$10^{1000} + 27057$	$x^2 + 23x + 24$	6
$10^{1000} + 29737$	$(x-23)(x-17)$	11
$10^{1000} + 41599$	$(x-18)(x-3)$	21
$10^{1000} + 43789$	$x^2 + 8x + 13$	21
$10^{1000} + 46227$	$(x-14)(x-9)$	23
$10^{1000} + 46339$	$(x-18)(x-10)$	28
$10^{1000} + 52423$	$(x-16)(x-15)$	2
$10^{1000} + 55831$	$x^2 + 22x + 22$	7
$10^{1000} + 57867$	$x^2 + 13x + 14$	16
$10^{1000} + 59743$	$(x-22)(x-2)$	24
$10^{1000} + 61053$	$x^2 + 8x + 18$	21
$10^{1000} + 61353$	$(x-11)(x-10)$	21
$10^{1000} + 63729$	$(x-12)(x-11)$	23
$10^{1000} + 64047$	$(x-23)(x-4)$	27
$10^{1000} + 64749$	$(x-19)(x-3)$	22
$10^{1000} + 68139$	$x^2 + 4x + 23$	25
$10^{1000} + 68367$	$(x-15)(x-9)$	24
$10^{1000} + 70897$	$(x-25)(x-22)$	18
$10^{1000} + 72237$	$(x-18)(x-15)$	4
$10^{1000} + 77611$	$(x-25)(x-19)$	15
$10^{1000} + 78199$	$(x-19)(x-14)$	4
$10^{1000} + 79237$	$(x-19)(x-8)$	27
$10^{1000} + 79767$	$(x-17)(x-8)$	25
$10^{1000} + 82767$	$(x-27)(x-24)$	22
$10^{1000} + 93559$	$(x-11)(x-9)$	20
$10^{1000} + 95107$	$x^2 + 24x + 16$	5
$10^{1000} + 100003$	$x^2 + 7x + 26$	22

$$f_{20} = E_8\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{20}(n) q^n = q + 456q^2 + 50652q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned}
F_2(x) = {} & x^{120} - x^{119} - 605\,x^{118} + 1343\,x^{117} + 170804\,x^{116} - 348696\,x^{115} - 26910405\,x^{114} - 22369092\,x^{113} + 2053741024\,x^{112} + 31748444057\,x^{111} \\
& +95961974255\,x^{110} - 8955896857588\,x^{109} - 53232225792099\,x^{108} + 1534908591099155\,x^{107} + 9304481122383593\,x^{106} - 190344445137535779\,x^{105} \\
& -1181126540089164159\,x^{104} + 18566374170684501402\,x^{103} + 124122109078447829139\,x^{102} - 1498937187542194196541\,x^{101} \\
& -11199587939043909052655\,x^{100} + 103472716462299915426577\,x^{99} + 879876698970311006559363\,x^{98} - 6209131815520194864539624\,x^{97} \\
& -61100674803622627341821341\,x^{96} + 323806013342979901919570471\,x^{95} + 3846355533335734523968677593\,x^{94} - 14531557536025180747042353437\,x^{93} \\
& -226180582935668149830773190119\,x^{92} + 559521796590988616443105600941\,x^{91} + 12669202222726513276073809635584\,x^{90} \\
& -19292100297973296193408663779841\,x^{89} - 671970617415962491995924070479295\,x^{88} + 660325849328885922272514117114823\,x^{87} \\
& +33032500612312994931119406870236696\,x^{86} - 22441137478559927062460915989139947\,x^{85} - 1486678883978175821793127931485643343\,x^{84} \\
& +448315830916238015490666491751882527\,x^{83} + 62385559767733354983230426079156794723\,x^{82} + 23297301611053920569514285732615652444\,x^{81} \\
& -2552080608116064242065381985178696631007\,x^{80} - 3090473489838627736241254261785398896502\,x^{79} \\
& +104515961241444781312378513649027327198116\,x^{78} + 180896743981385972713421195464909033441151\,x^{77} \\
& -4141388021407126444494153621191284713000173\,x^{76} - 7070639496155368650782436729822982320550829\,x^{75} \\
& +148191996300580123951123907683865052300881844\,x^{74} + 211718255847403306815663639897061461170848749\,x^{73} \\
& -4564411926392731359867427522480905911874101772\,x^{72} - 5896875910418637928685885009441498056975244493\,x^{71} \\
& +121184633090319628008303318306749106646673546278\,x^{70} + 183818053131936430769986694787192021176901907832\,x^{69} \\
& -2929409181534370412537669732478795142637177650546\,x^{68} - 5695217387347586645001077050639026082569509861249\,x^{67} \\
& +68306771453230428937120942974896444725330425636118\,x^{66} + 136876019089725645554108928492391294183549486551750\,x^{65} \\
& -1473017029022839758306045859291246845432868484734609\,x^{64} - 2297002605561557126161956441547511618574379460675976\,x^{63} \\
& +26071171419390211897994806663750121573405168420362598\,x^{62} + 32331627225919312451855255385416484019617250941486789\,x^{61} \\
& -362216826208543705788340029049974819008175868941272306\,x^{60} - 602582826336032624272355878714506588703775650491310363\,x^{59} \\
& +4593236133372342032939139144706695802272215432115606082\,x^{58} + 11592110031048116665445123040318249266632718913939215946\,x^{57} \\
& -60603381610084652511708516409201204992388933815127239016\,x^{56} - 160429210013477717743206803377462959115811598725690796822\,x^{55} \\
& +648752355656933512138116785731747272923672849412018985238\,x^{54} + 2237925143069152422188177331280411360650208571349970752261\,x^{53} \\
& -6008305453588440335073094049662604030627400743473888475332\,x^{52} - 36790210295510448025884600050867578024413858615650052913908\,x^{51} \\
& +109095863975048561917099306588479869507562563175825879052614\,x^{50} \\
& +318429015421059226994380842773756164093929862686508784296710\,x^{49} \\
& -1755043858318778158818458687332022025134302340785784985641193\,x^{48} \\
& +1615126557223347052002749931325064197362159770965507306010932\,x^{47} \\
& +8432357046714321217934465816425054559041845518443882632583393\,x^{46} \\
& -51389725949811539575658600590898095978355137007795658102460415\,x^{45} \\
& +130819739472289602163786884128750942354524220333850129312512320\,x^{44} \\
& +201613183918375375416712787125243137667829260572378680129256034\,x^{43} \\
& -2142380860052669224849553559574674668706238986389487338463985298\,x^{42} \\
& +3009396896936127696704181549961954257231664094033518943533524087\,x^{41} \\
& +11578950609647479862927688415247220062154921726689515778848083436\,x^{40} \\
& -40291758225409570490437555998966327169756700849524782448082487395\,x^{39} \\
& -49838890276067131258220473246835491963841721811716568377627 98852\,x^{38} \\
& +217069871020137545002290112986071173733406213819434099246893284658\,x^{37} \\
& -352875632554026125892696564488177514248803282518335276360718481717\,x^{36} \\
& -363335815933670626211562116544654416212495531676478451401275570256\,x^{35} \\
& +3362373248073944402938627382486582000952636128643659554693702434523\,x^{34} \\
& -6618070845856274262604362697956438016046703258138540734172570437571\,x^{33} \\
& -14943264463972653266427599143152081273325306942482894250199213371631\,x^{32} \\
& +91107082376136022332238571309037879800844730297196147291652977363624\,x^{31} \\
& -451934214268812179324205370575329078324867360204899117444139809751 28\,x^{30} \\
& -545472460725858386411899702727988113007552093338379395893445283383771\,x^{29} \\
& +1026682063735656059272352179903514016394782209138429872147381589111554\,x^{28} \\
& +1340798287762944440014450955841508813736931039766409639281742146436073\,x^{27} \\
& -6141912352810391529677714752212660930229234200241269132494420541322985\,x^{26} \\
& +19181061425657846532315758271763288813352285476039430745285030244 03256\,x^{25} \\
& +19343644033624473246033938700368671773068872968524778711416159242025678\,x^{24} \\
& -37325115050720213714370150064840878649483887351404654900424813321356330\,x^{23} \\
& +179039920798654800452419201250177808133303160360106367163268158996 17276\,x^{22} \\
& +154934616055487761084047013418430686449911357738470790154642000547872396\,x^{21} \\
& -674993470966782025647504690241735129863623677050376670454475251024126822\,x^{20} \\
& +877283597582530172167092313014273038383188555958226175407840909669679915\,x^{19} \\
& +1865503286787627705708326340001699095019204852682867505209394205149372106\,x^{18} \\
& -8201154839323849678610643443492307899432617777501299606610678551669558332\,x^{17} \\
& +9639386716374912713582718291045420212110966417973282621720506300091528108\,x^{16} \\
& +15307695983672355674819326428014197037389575069677902515836858029464 20130\,x^{15} \\
& -360192718516317706983463663822722219372394938070272900812360640867918 87575\,x^{14} \\
& +99720375300269974443721747513577082786414812311009618002559210706146495301\,x^{13} \\
& -1034958817822161091202234819926121822503514721896445854318841902232714723 82\,x^{12} \\
& -1181946620513461790083978022219077645395174730498464908258957394668294343 95\,x^{11} \\
& +5362611725299697082757395988962801266355398643126159275839270660120663041 26\,x^{10} \\
& -3807904831907571634740397549335850610547426147864698532101781045941626316 40\,x^{9} \\
& -4818976708568547023812437278300095508145768414011604393956669056113604472 60\,x^{8} \\
& +1839852825970295340814296311745486480431880853148229653368356297823253742 46\,x^{7} \\
& +4002127419622444671009895412715752961380545275544399413427900353916919157 90\,x^{6} \\
& -6745129971611343410317362136356763939230518782578043814890127027747832022 91\,x^{5} \\
& -25494984519918407744022708055780539267838121937267643488136527640562940171 24\,x^{4} \\
& +14341227764048022563550326302520956160682383458720593280501267363355740825 93\,x^{3} \\
& +61367544340747732620781358089456950976827020947366546131439348821518173043 28\,x^{2} \\
& -3212509352951581793071542381381793609881761033172155516643117336918228809 89\,x \\
& -4495635650218795348014355834510351115759777101834656581973480276130884026379
\end{aligned}$$

$$f_{20} = E_8\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{20}(n)q^n = q + 456q^2 + 50652q^3 + O(q^4)$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau_{20}(p)$ mod 29
$10^{1000} + 453$	$x^2 + 23x + 20$	6
$10^{1000} + 1357$	$x^2 + 25x + 1$	4
$10^{1000} + 2713$	$x^2 + 25x + 25$	4
$10^{1000} + 4351$	$(x - 25)(x - 14)$	10
$10^{1000} + 5733$	$x^2 + 27x + 3$	2
$10^{1000} + 7383$	$x^2 + 28x + 7$	1
$10^{1000} + 10401$	$(x - 22)(x - 15)$	8
$10^{1000} + 11979$	$(x - 9)(x - 7)$	16
$10^{1000} + 17557$	$x^2 + 28x + 8$	1
$10^{1000} + 21567$	$(x - 17)(x - 7)$	24
$10^{1000} + 22273$	$x^2 + 14x + 2$	15
$10^{1000} + 24493$	$(x - 18)(x - 2)$	20
$10^{1000} + 25947$	$x^2 + 2x + 28$	27
$10^{1000} + 27057$	$(x - 19)(x - 10)$	0
$10^{1000} + 29737$	$x^2 + 8x + 8$	21
$10^{1000} + 41599$	$x^2 + x + 24$	28
$10^{1000} + 43789$	$(x - 13)(x - 7)$	20
$10^{1000} + 46227$	$(x - 10)(x - 6)$	16
$10^{1000} + 46339$	$(x - 22)(x - 7)$	0
$10^{1000} + 52423$	$x^2 + 15x + 3$	14
$10^{1000} + 55831$	$(x - 19)(x - 11)$	1
$10^{1000} + 57867$	$(x - 11)(x - 6)$	17
$10^{1000} + 59743$	$(x - 18)(x - 6)$	24
$10^{1000} + 61053$	$x^2 + 2x + 19$	27
$10^{1000} + 61353$	$(x - 28)(x - 9)$	8
$10^{1000} + 63729$	$x^2 + 16x + 25$	13
$10^{1000} + 64047$	$x^2 + 5x + 13$	24
$10^{1000} + 64749$	$x^2 + 15x + 28$	14
$10^{1000} + 68139$	$(x - 25)(x - 24)$	20
$10^{1000} + 68367$	$(x - 22)(x - 21)$	14
$10^{1000} + 70897$	$(x - 7)(x - 4)$	11
$10^{1000} + 72237$	$(x - 27)(x - 18)$	16
$10^{1000} + 77611$	$(x - 17)(x - 4)$	21
$10^{1000} + 78199$	$x^2 + 8x + 13$	21
$10^{1000} + 79237$	$(x - 17)(x - 15)$	3
$10^{1000} + 79767$	$(x - 24)(x - 16)$	11
$10^{1000} + 82767$	$x^2 + 15x + 2$	14
$10^{1000} + 93559$	$(x - 23)(x - 2)$	25
$10^{1000} + 95107$	$x^2 + 5x + 25$	24
$10^{1000} + 100003$	$x^2 + 13x + 14$	16

$$f_{22} = E_{10}\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{22}(n)q^n = q - 288q^2 - 128844q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned}
F_2(x) = {} & x^{120} - 58\,x^{119} + 1479\,x^{118} - 20271\,x^{117} + 64235\,x^{116} + 4341648\,x^{115} - 125896830\,x^{114} + 1932522126\,x^{113} - 16783823660\,x^{112} + 12553480908\,x^{111} \\
& +1945380181148\,x^{110} - 28385744929082\,x^{109} + 153296527564542\,x^{108} + 655937560360321\,x^{107} + 1626062741015921\,x^{106} - 848929144961028690\,x^{105} \\
& +2534495329665231180 0\,x^{104} - 459053048364384776527\,x^{103} + 6353386378748924860686\,x^{102} - 76014470369068470396197\,x^{101} \\
& +850964311263614902431913\,x^{100} - 9111282322530681923373750\,x^{99} + 92539303250600130876329032\,x^{98} - 912119245139858404710559875\,x^{97} \\
& +9386288818474011675295234547\,x^{96} - 106490130516425048783501628605\,x^{95} + 1287426151824994867680666647105\,x^{94} \\
& -15456803747066011377485731165879\,x^{93} + 177082362929298141514213006894466\,x^{92} - 1924571987449638207026158652867422\,x^{91} \\
& +20066637270987544685157074226643226\,x^{90} - 204030656332941972779274914496364391\,x^{89} + 2052229859155051214406163846905166530\,x^{88} \\
& -20592324048514747493803578848802229274\,x^{87} + 206520822561863688867986775458178777114\,x^{86} - 2065465648194910993955600719802186677146\,x^{85} \\
& +20528077582633467948784642491047586642699\,x^{84} - 202168947139703831348209357699842918533422\,x^{83} \\
& +1969405323219392207882540973994072055074402\,x^{82} - 18952546458713946427017570659537547196270894\,x^{81} \\
& +179946538934037227742073466303595521151366693\,x^{80} - 1682948823620578978868862976569749398008968078\,x^{79} \\
& +15477252032365184937917749406594239534812445352\,x^{78} - 139735038058873633024616848406866090605376607292\,x^{77} \\
& +1236902384838988188106404971557287996954679728065\,x^{76} - 10724728066844792614146472240426175611230321920861\,x^{75} \\
& +91036750884631388366326651034630879118807997347217\,x^{74} - 756309549054932286264355067743446546483466806326554\,x^{73} \\
& +6148596739273121501253270757576336024571363779062671\,x^{72} - 48912687838748379147231664913587595054057697405821772\,x^{71} \\
& +380736783743640901530787919724589355481217808781012904\,x^{70} - 2899858188604160929934193501600419988569331803605951517\,x^{69} \\
& +21610556233906373192673614625196284310014353849720133911\,x^{68} - 157571628853516962691999133493657727750779173372857678180\,x^{67} \\
& +1124074977507034653483761328119998022141735659501760178989\,x^{66} - 7845042345313206527339293800163270628566624422657902802718\,x^{65} \\
& +53560973615531452972815784499187545894076482200236041160104\,x^{64} - 357696581878968937163705463337744606718423773121686048679664\,x^{63} \\
& +2336362257650475380392196781365884604915456166911362657777766\,x^{62} - 14922881570523724181048995926099338531327522222464678174826465\,x^{61} \\
& +93187821411704267659833823878849649895244549974827271715932064\,x^{60} \\
& -568777786138449080399120645102338660256401374211636688064442818\,x^{59} \\
& +3392038055444951811892488588358589994474807483291285313705857772\,x^{58} \\
& -19758087188900504834139708724578214328342557597415851479821884434\,x^{57} \\
& +112357112460244099864527100792795010674641165872288863446842857928\,x^{56} \\
& -623458834184193289158606847471008147844537287583197395399631247150\,x^{55} \\
& +3373823921484718286037835043329386862111899376118444553144411582197\,x^{54} \\
& -17794162883753098513309562063429884601858735612764777387975165482761\,x^{53} \\
& +91408174999180196731668044555640429324586033435510417185860382024104\,x^{52} \\
& -457021714035109964542504263313270647963728124014784716456497836493778\,x^{51} \\
& +2222319822845343019776565765164545188006206748725864496977947436958893\,x^{50} \\
& -10501486641030450285605651601849491158782542538972272633556525552293690\,x^{49} \\
& +48184814890603007087246351732262501655749315795359737619717522279793862\,x^{48} \\
& -214491658352944298743858018040600877811300081701903007641287261742316246\,x^{47} \\
& +925469752625785347496580943687329919984642866094177886497953984550437431\,x^{46} \\
& -3866884504565425789373428051785362662985855518875305151452463764407310840\,x^{45} \\
& +15630982110100905968073457921913886283464030500469158276034572452535268736\,x^{44} \\
& -61065728167766918692802819803593284400390969908142102800502801077695145902\,x^{43} \\
& +230320837603966670762521170098097080702319578319807815777146149496333837046\,x^{42} \\
& -837733501579720593234129026205361046808796013304483551057050289980819829924\,x^{41} \\
& +2934933166188185830788410415713155924228780546333895093153330086612458908339\,x^{40} \\
& -9891426891630868417209966295784263714852418380400155076455457750653900786333\,x^{39} \\
& +32025736022886108231759798046311192873252978984970284139217707217914308588379\,x^{38} \\
& -99469437515567849998796007654071130375615926561084057207707958832594169801198\,x^{37} \\
& +295910957356499245501065929753410483506731468766278841156915977302512645274885\,x^{36} \\
& -841794841030416471294382796480619639165517544970948134171432027695988057973506\,x^{35} \\
& +2286063828078189369454778863684022561519209274128760928916309701986538839669354\,x^{34} \\
& -5916347231931972489423584694809469912409744902223494493168496620293351079346 65\,x^{33} \\
& +14566335115345994045678508130620002676585099508624966084138536183572647158670955\,x^{32} \\
& -34060206888403045341526984429151447523443662865199957902332906729550233908834956\,x^{31} \\
& +75515853117378599058055183182870674372220028887972765383791399076773812232945767\,x^{30} \\
& -158484558591725855854863477416947953834420088891592702218519195338337399792755468\,x^{29} \\
& +314135641873518036472225454019443447429982574708828944181052426245277218660511354\,x^{28} \\
& -585622398353403183441981296012259746120459383165387320748399999704472931139216911\,x^{27} \\
& +1017026672372209498959728295414214341476233566880396320442770916847358661450937790\,x^{26} \\
& -1606215935172088387390300164309437911963491806312303866427487744296597795862193233\,x^{25} \\
& +2154979311646221016474567205722723030470659052859723891989380050644984528525759820\,x^{24} \\
& -1852538229860116157734586740672388015812271170805916068589499160160751249907823064\,x^{23} \\
& -1768894130412115169171626339290330317293387974282851629372372443156878214613772388\,x^{22} \\
& +15223056483353138999310274755631661760721572161686340268358511987017072341805285644\,x^{21} \\
& -54098220800599917136447111465759821535897591050313281213774716326699547629062053489\,x^{20} \\
& +152861203060056110575026501013363776764817962736589589781239743760962013317181281062\,x^{19} \\
& -382502173042031141759703807584641510644717000182520102282667762967065259513080430338\,x^{18} \\
& +879254682318451488400395175886969764779941161453283949408135514736575550368415472717\,x^{17} \\
& -1885159552141183010054685892026172109745084047002665877809898857041639497610172265888\,x^{16} \\
& +3794465059414556152295805337326359160101408456996234106898460466246366462925559891467\,x^{15} \\
& -7190969982602533076602187173150119325319278096395476730131956445373922818812731810111\,x^{14} \\
& +12858105688513946123653076251527757946740587419936854145440363474813938553846097580143\,x^{13} \\
& -21748439203158069067268078956831551784703304325527751161166050672532811560855017260942\,x^{12} \\
& +34889174178606501598302553593603039809480521985334032114589555789681068722278010410579\,x^{11} \\
& -53131793355386023479877471874101160900599451103616007355370046195549161849817584066897\,x^{10} \\
& +76543390271977922720511547621076911816483158984194081624193948381876627598621702506584\,x^{9} \\
& -103280702119364144949350214960169918602333943388266954109267604146106665314720419994 58\,x^{8} \\
& +128321697947676998149518788656541626878490680488697206018038220297054876952014745550960\,x^{7} \\
& -143443341961825669972276336451401295642414209272501672931609001606954653045360382769384\,x^{6} \\
& +140225337177118730611521713809297520076939300353821169656179647736321492043834818909960\,x^{5} \\
& -115843376799577454369399811237908892821578123350118896857989186581974229175612571802198\,x^{4} \\
& +77386432820065756555922573949774153814968001625055333519229521181034033937892733908528\,x^{3} \\
& -39173035622146399097113765826493976173697911575343175812463856659082451504131566689555\,x^{2} \\
& +13373222432986056777488077599275107140926735129331616130632796697036621120282392919630\,x \\
& -2310101682358584204951023028379936356770032152408755571440559963248074651976452021448
\end{aligned}$$

$$f_{22} = E_{10}\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{22}(n)q^n = q - 288q^2 - 128844q^3 + O(q^4)$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau_{22}(p)$ mod 29
$10^{1000} + 453$	$(x-17)(x-12)$	0
$10^{1000} + 1357$	$x^2 + 8x + 1$	21
$10^{1000} + 2713$	$(x-6)(x-5)$	11
$10^{1000} + 4351$	$(x-20)(x-18)$	9
$10^{1000} + 5733$	$(x-4)(x-3)$	7
$10^{1000} + 7383$	$(x-17)(x-12)$	0
$10^{1000} + 10401$	$x^2 + 4x + 12$	25
$10^{1000} + 11979$	$(x-19)(x-3)$	22
$10^{1000} + 17557$	$x^2 + 15x + 17$	14
$10^{1000} + 21567$	$x^2 + x + 12$	28
$10^{1000} + 22273$	$(x-28)(x-17)$	16
$10^{1000} + 24493$	$(x-27)(x-14)$	12
$10^{1000} + 25947$	$(x-18)(x-8)$	26
$10^{1000} + 27057$	$x^2 + 9x + 1$	20
$10^{1000} + 29737$	$(x-13)(x-8)$	21
$10^{1000} + 41599$	$(x-10)(x-3)$	13
$10^{1000} + 43789$	$(x-21)(x-11)$	3
$10^{1000} + 46227$	$(x-20)(x-18)$	9
$10^{1000} + 46339$	$(x-24)(x-6)$	1
$10^{1000} + 52423$	$x^2 + 14x + 12$	15
$10^{1000} + 55831$	$(x-16)(x-9)$	25
$10^{1000} + 57867$	$(x-20)(x-11)$	2
$10^{1000} + 59743$	$(x-4)(x-3)$	7
$10^{1000} + 61053$	$x^2 + 11x + 12$	18
$10^{1000} + 61353$	$(x-22)(x-4)$	26
$10^{1000} + 63729$	$(x-1)^2$	2
$10^{1000} + 64047$	$(x-21)(x-11)$	3
$10^{1000} + 64749$	$(x-19)(x-3)$	22
$10^{1000} + 68139$	$x^2 + 20x + 1$	9
$10^{1000} + 68367$	$(x-18)(x-9)$	27
$10^{1000} + 70897$	$(x-7)(x-4)$	11
$10^{1000} + 72237$	$x^2 + 2x + 28$	27
$10^{1000} + 77611$	$(x-15)(x-5)$	20
$10^{1000} + 78199$	$(x-12)^2$	24
$10^{1000} + 79237$	$x^2 + 24x + 1$	5
$10^{1000} + 79767$	$(x-11)(x-8)$	19
$10^{1000} + 82767$	$x^2 + 26x + 12$	3
$10^{1000} + 93559$	$(x-20)(x-18)$	9
$10^{1000} + 95107$	$x^2 + 8x + 1$	21
$10^{1000} + 100003$	$(x-10)(x-7)$	17

$$f_{26} = E_{14}\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{26}(n)q^n = q - 48q^2 - 195804q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned}
F_2(x) = {} & x^{120} - 25\,x^{119} + 151\,x^{118} - 8261\,x^{117} + 246211\,x^{116} - 302731\,x^{115} - 38453565\,x^{114} - 587158360\,x^{113} + 19607987355\,x^{112} + 120146816082\,x^{111} \\
& -5728792977934\,x^{110} - 30959101557828\,x^{109} + 2169026728656494\,x^{108} - 14880525279176332\,x^{107} - 304029895571860985\,x^{106} \\
& +6327232935220825673\,x^{105} - 25892493940656508375\,x^{104} - 717122613641339972041\,x^{103} + 14222190770994521381617\,x^{102} \\
& -504527141169782010692 54\,x^{101} - 219065565660986425098 2176\,x^{100} + 29387694691532081383549485\,x^{99} + 277870850419753666900461587\,x^{98} \\
& -9481980465415299669486037145\,x^{97} + 16755407328649575844904490018\,x^{96} + 205647826642025636973439682 3963\,x^{95} \\
& -2408165255654887263045753895 0493\,x^{94} - 1654493657637513650241548796 05804\,x^{93} + 5831486352823782347641221807818858\,x^{92} \\
& -25278891877996300620101764945058468\,x^{91} - 652284870374420321646449580537445313\,x^{90} + 852007153567429635473189138588 1580245\,x^{89} \\
& +20965610004414533897551202614212188908\,x^{88} - 113785001895984096544778332524341 4227901\,x^{87} \\
& +457932432952451969766127775801701262 5548\,x^{86} + 926535905453816219423369951626156842 38286\,x^{85} \\
& -919761998394878291914345532460011919818367\,x^{84} - 447299356746112457218713646763780378 1455358\,x^{83} \\
& +10315740706106634628991867175545829829835 3114\,x^{82} - 317080792018948782957318861442020162040 22288\,x^{81} \\
& -860862971498149776816016413428039823638588 8291\,x^{80} + 358971587956529202535981048760500816690801 97468\,x^{79} \\
& +528256575168012035600462152318390625128822250834\,x^{78} - 4573146285728797710109063596857211551731924323749\,x^{77} \\
& -19541640587593740605059303300042040720180522645492\,x^{76} + 358063931487963858533211325864832014887815269768539\,x^{75} \\
& -447336526922329267697515265302858679868015242126 22\,x^{74} - 19188977943455259701698451741633148446137113848634077\,x^{73} \\
& +598841029096928349709476928782533482217910009066724 75\,x^{72} + 6920857880546558899006238468897813510980942403130510 24\,x^{71} \\
& -4368164294005178982893433768855614402569527440534308155\,x^{70} - 132312268466834690697988687673844433212395012033097907 90\,x^{69} \\
& +1834803703401111131202901248654839099085830573296282913 87\,x^{68} - 2390859609807220650654791724374605344168799084612634691 22\,x^{67} \\
& -42908976926140343937853302368994051775729228708301271447 86\,x^{66} + 34959874621668732669470586802833942928392494021145964254509\,x^{65} \\
& -4225944679729012221003847533990421100704190168111716327 3571\,x^{64} \\
& -1873950643616571557733878268600946111163796604053452742198822\,x^{63} \\
& +10597424043958741161570236547193722881014970584730549742977963\,x^{62} \\
& +716105595108383994992944777076691745553343041521704639412141 38\,x^{61} \\
& -654821183579109335229854307074867205952182683450225670243167190\,x^{60} \\
& -2265745542357788854219543675272277860276342490248584747856096486\,x^{59} \\
& +27261945097520516866841969235393858032948590816678960948007032893\,x^{58} \\
& +676802447062936684944328006110247064924330262357396988218873297 04\,x^{57} \\
& -820793580303434502044353786037896858198589816135619744972314593630\,x^{56} \\
& -2073544133306166555401323881716901817534427165632883365417754004540\,x^{55} \\
& +14667912496235456899558455299063646354375656666791785542992092158079\,x^{54} \\
& +59017091753178433281663305025838170508086429227390789774197272611196\,x^{53} \\
& +1365045663791950349783020916449244196262990530639949058320540588502 49\,x^{52} \\
& -1114647986597176316250347689664535352159302488654086539618220442315709\,x^{51} \\
& -24468155691208215423069265620947390635552360951552113757846657280404073\,x^{50} \\
& -6664881867056142978631093909775299841465275612816566881053962486370782\,x^{49} \\
& +1232843030322654927389058128336133744989485361499740841854254485904370851\,x^{48} \\
& +1539334860840890224650727992226150607567026538513152580492355064673541154\,x^{47} \\
& -4527748531177015147692790397148491518080308383354002771509139602625040877 2\,x^{46} \\
& -6958012384761081241818654137866417676527277250466583354341975686386679252 8\,x^{45} \\
& +1440543055279547449686763038259702456336851831247413367583179752760449394803\,x^{44} \\
& +2029172788026139769820716144296578285761283161063501540724423563616938039917\,x^{43} \\
& -43115234097112802988680970257810497047203479631571761269241854025729978579935\,x^{42} \\
& -45007833920257324138129075478490473755006694361009165485337988801466023989610\,x^{41} \\
& +1238677601466740522252686439722591593630241451984725929561056572729090475166260\,x^{40} \\
& +881472606083510851718524117985187825135877981110845479566778172881605560130173\,x^{39} \\
& -33449932264081935042819369042573433337749750294301788291046910706928884231244943\,x^{38} \\
& -19214395077433483640273823294956507763320707114280497231335192530603079228009957\,x^{37} \\
& +824475848089570524845447691877965916931698204163865060448141659668718043398892208\,x^{36} \\
& +539365229624033570208537203297750284976438384782997940524038077815045694751233077\,x^{35} \\
& -18042805717126410351740790922846174897872952809362274380087359480886231867027609198\,x^{34} \\
& -16789596083548131844460261196141564337699562326714086220313246783147362428196857425\,x^{33} \\
& +338207012016871524442413202788450897291723869780952315143115329098630504579408333817\,x^{32} \\
& +454480487012842534850757899437977154659126366466042814334895860818004248518468182276\,x^{31} \\
& -5141793485207545524227552685174420544056016685917573888956113573086467155388463258418\,x^{30} \\
& -8921875776118656100963239151447563242443892318107891765258849392980525776493215333683\,x^{29} \\
& +59964323815328887697463711530730030662039916021621418939126713236639483951996618804828\,x^{28} \\
& +103861989250626091545430503104028589374640386023843384892777095678793049625650084223327\,x^{27} \\
& -555297323545985222188907791859126075392282532669494419854035038722389472196080022382620\,x^{26} \\
& -2358061061088021923481837821812442915627476125899169276494474863294944204884588804000 73\,x^{25} \\
& +54272972417193833895189056640842341237900703159937008294908561142470073032914383359310 17\,x^{24} \\
& -1475111270023680046208827479564039517394007026005311449185580780710504837944898740916 3333\,x^{23} \\
& -7195684229624180930899287856555548879733829180472893459984628276062608830583070424932 3781\,x^{22} \\
& +322780514367051743329795144700089778254481627521949211206510158700929481191633822937982959\,x^{21} \\
& +1055894139151529544716826234487938162782926447468891702693546128510006204624718363041196130\,x^{20} \\
& -3826867372491260646534157019136718908368380226102458405817628178105236325120350513386356064\,x^{19} \\
& -12371908651679295577579302804571966543549164212840214516834868062927766123120979054010307972\,x^{18} \\
& +30483959335423743480973818408619517837657782637351941542637736641210064502361308030768055176\,x^{17} \\
& +106198924040925235119791779592370372715115680933383122780962352002436696609045678490869476329\,x^{16} \\
& -1655492759277514035449305222297733607322389609315558387174304362423343736171283811497997910 43\,x^{15} \\
& -6465147477016072623061631359870406025308777770845389333236946787726367742202648099980915771 62\,x^{14} \\
& +5014941073556248781804437217205188374557629163043304332146102956808118344323540052462511192 96\,x^{13} \\
& +2555206546512583360855174064362275110306962086649496378862164174557520188406072487648534403192\,x^{12} \\
& +579165881047594067116661041893820111090232884972758398991562220212878309236264357567988041 10\,x^{11} \\
& -6101257854752920758502277218189485217628386562875921578077411124863399361709856036082546085686\,x^{10} \\
& -456452838165227467853110365845278105468609266441645228992137469196401105669385269888777987938 9\,x^{9} \\
& +627407501214174055608844302175981228497006834411940580463857721770519872297066372688990681894 3\,x^{8} \\
& +11057425747675017262671450722927229946412536485877649115100399466124896797621532632186512550540\,x^{7} \\
& +20500524047496179837515580022667448164451039195376521981954189244809830867997921844740977338 65\,x^{6} \\
& -78148508768299269347648197608356854832871066587698559905144473989507783421319294435352280579 02\,x^{5} \\
& -78644456507804692641278277161533840949981065005923235670223366180169412247462039384656795752 99\,x^{4} \\
& -2774300960412494800596110836510474717616716787202832205823905586879417447908900890608131941328\,x^{3} \\
& -1404774094331732828895113826278036638846814408414768233525784811274083383354130047271596661 63\,x^{2} \\
& +431240324053831513537116169148570182910478740810711602936711191987776586160027802776114661 47\,x \\
& -757982932375316913539647599034403554012344624298275680516864543463040777186423561294915858 93
\end{aligned}$$

$$f_{26} = E_{14}\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{26}(n)q^n = q - 48q^2 - 195804q^3 + O(q^4)$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau_{26}(p)$ mod 29
$10^{1000} + 453$	$(x-16)^2$	3
$10^{1000} + 1357$	$x^2 + 24x + 1$	5
$10^{1000} + 2713$	$x^2 + 27x + 20$	2
$10^{1000} + 4351$	$x^2 + 8x + 26$	21
$10^{1000} + 5733$	$x^2 + 14x + 18$	15
$10^{1000} + 7383$	$(x-9)(x-5)$	14
$10^{1000} + 10401$	$x^2 + 4x + 15$	25
$10^{1000} + 11979$	$(x-15)^2$	1
$10^{1000} + 17557$	$(x-16)(x-11)$	27
$10^{1000} + 21567$	$(x-27)(x-20)$	18
$10^{1000} + 22273$	$(x-27)(x-16)$	14
$10^{1000} + 24493$	$x^2 + 9x + 16$	20
$10^{1000} + 25947$	$x^2 + 20x + 28$	9
$10^{1000} + 27057$	$(x-9)^2$	18
$10^{1000} + 29737$	$(x-2)(x-1)$	3
$10^{1000} + 41599$	$(x-25)(x-20)$	16
$10^{1000} + 43789$	$(x-9)(x-1)$	10
$10^{1000} + 46227$	$(x-21)(x-4)$	25
$10^{1000} + 46339$	$(x-28)(x-24)$	23
$10^{1000} + 52423$	$x^2 + 27x + 18$	2
$10^{1000} + 55831$	$x^2 + 11x + 4$	18
$10^{1000} + 57867$	$(x-23)(x-19)$	13
$10^{1000} + 59743$	$x^2 + 16x + 27$	13
$10^{1000} + 61053$	$x^2 + 8x + 8$	21
$10^{1000} + 61353$	$(x-24)(x-1)$	25
$10^{1000} + 63729$	$x^2 + 27x + 20$	2
$10^{1000} + 64047$	$(x-25)(x-13)$	9
$10^{1000} + 64749$	$(x-23)(x-5)$	28
$10^{1000} + 68139$	$(x-18)(x-11)$	0
$10^{1000} + 68367$	$(x-24)(x-11)$	6
$10^{1000} + 70897$	$x^2 + 27x + 28$	2
$10^{1000} + 72237$	$(x-28)(x-16)$	15
$10^{1000} + 77611$	$x^2 + 4x + 21$	25
$10^{1000} + 78199$	$(x-21)^2$	13
$10^{1000} + 79237$	$(x-27)(x-2)$	0
$10^{1000} + 79767$	$x^2 + 24x + 16$	5
$10^{1000} + 82767$	$(x-13)(x-2)$	15
$10^{1000} + 93559$	$(x-16)(x-8)$	24
$10^{1000} + 95107$	$x^2 + 7x + 20$	22
$10^{1000} + 100003$	$(x-26)(x-16)$	13

$\underline{\ell = 31}$

$$f_{12} = \Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n) q^n = q - 24q^2 + 252q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned}
F_1(x) = {} & x^{64} - 21\,x^{63} + 118\,x^{62} + 527\,x^{61} - 8587\,x^{60} + 18383\,x^{59} + 263035\,x^{58} - 2095879\,x^{57} + 2416016\,x^{56} + 44283128\,x^{55} - 240474192\,x^{54} \\
& + 84687350\,x^{53} + 3638349286\,x^{52} - 12617823980\,x^{51} - 10297265505\,x^{50} + 155175311479\,x^{49} - 196432825560\,x^{48} - 771645455342\,x^{47} \\
& + 1482783472303\,x^{46} + 2641351695834\,x^{45} + 4650870173875\,x^{44} - 45480241563019\,x^{43} - 54597672402738\,x^{42} + 501026042999912\,x^{41} \\
& - 496541492329624\,x^{40} - 712343608491160\,x^{39} + 5302741451178477\,x^{38} - 30548025690548139\,x^{37} + 34878663423629056\,x^{36} \\
& + 288784532405339724\,x^{35} - 874206875792459963\,x^{34} - 825384106177640249\,x^{33} + 6958723996166230970\,x^{32} \\
& - 4535708640900181166\,x^{31} - 30017821501048367756\,x^{30} + 56583574288118086410\,x^{29} + 60507682456797414358\,x^{28} \\
& - 278043951776326798765\,x^{27} + 87013091280485835964\,x^{26} + 765685764124853689529\,x^{25} - 1039521490897195574873\,x^{24} \\
& - 857609563094973739451\,x^{23} + 3508677503532089909529\,x^{22} - 2261986657658172377618\,x^{21} - 5701736296366236274465\,x^{20} \\
& + 13022859322612898456054\,x^{19} - 6410034736367305328862\,x^{18} - 29939230256003209147601\,x^{17} + 25447129369769267020402\,x^{16} \\
& + 36125137963345226955671\,x^{15} - 55314588133331740131989\,x^{14} - 18703775559594899286772\,x^{13} + 43941206930666596631797\,x^{12} \\
& + 17651378415866112635127\,x^{11} + 10928239966752626190216\,x^{10} - 81873964056071560411072\,x^{9} - 14246438965830190561265\,x^{8} \\
& + 128298548281018972743749\,x^{7} - 50060167623901195766317\,x^{6} - 45764538130200829948820\,x^{5} + 18800719945150143916844\,x^{4} \\
& - 8179472634137717244072\,x^{3} + 62290435026572905701979\,x^{2} - 71710139962834196823306\,x + 25842211492123062583556
\end{aligned}$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau(p)$ mod 31
$10^{1000} + 453$	$(x-30)(x-20)$	19
$10^{1000} + 1357$	$x^2 + 18x + 29$	13
$10^{1000} + 2713$	$x^2 + 27x + 12$	4
$10^{1000} + 4351$	$(x-4)^2$	8
$10^{1000} + 5733$	$(x-21)(x-8)$	29
$10^{1000} + 7383$	$(x-13)(x-11)$	24
$10^{1000} + 10401$	$(x-22)(x-9)$	0
$10^{1000} + 11979$	$(x-7)(x-4)$	11
$10^{1000} + 17557$	$(x-27)^2$	23
$10^{1000} + 21567$	$x^2 + 20x + 27$	11
$10^{1000} + 22273$	$x^2 + 9x + 7$	22
$10^{1000} + 24493$	$x^2 + 27x + 8$	4
$10^{1000} + 25947$	$x^2 + 19x + 25$	12
$10^{1000} + 27057$	$x^2 + 8x + 30$	23
$10^{1000} + 29737$	$(x-17)(x-2)$	19
$10^{1000} + 41599$	$x^2 + x + 2$	30
$10^{1000} + 43789$	$(x-12)(x-4)$	16
$10^{1000} + 46227$	$(x-13)(x-9)$	22
$10^{1000} + 46339$	$x^2 + 28x + 30$	3
$10^{1000} + 52423$	$(x-24)(x-6)$	30
$10^{1000} + 55831$	$(x-30)(x-6)$	5
$10^{1000} + 57867$	$(x-23)(x-7)$	30
$10^{1000} + 59743$	$(x-26)(x-20)$	15
$10^{1000} + 61053$	$x^2 + 10x + 10$	21
$10^{1000} + 61353$	$(x-30)(x-17)$	16
$10^{1000} + 63729$	$(x-20)(x-3)$	23
$10^{1000} + 64047$	$x^2 + 2x + 26$	29
$10^{1000} + 64749$	$x^2 + 13x + 6$	18
$10^{1000} + 68139$	$x^2 + 21x + 26$	10
$10^{1000} + 68367$	$x^2 + 22x + 22$	9
$10^{1000} + 70897$	$x^2 + 8x + 25$	23
$10^{1000} + 72237$	$(x-29)(x-5)$	3
$10^{1000} + 77611$	$x^2 + 20x + 23$	11
$10^{1000} + 78199$	$x^2 + 24x + 17$	7
$10^{1000} + 79237$	$(x-21)(x-16)$	6
$10^{1000} + 79767$	$(x-21)(x-11)$	1
$10^{1000} + 82767$	$(x-8)^2$	16
$10^{1000} + 93559$	$x^2 + 8x + 26$	23
$10^{1000} + 95107$	$x^2 + 9x + 4$	22
$10^{1000} + 100003$	$x^2 + 30x + 2$	1

$$f_{18} = E_6\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{18}(n)q^n = q - 528q^2 - 4284q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned}
F_1(x) \;=\; & x^{64} - 4\,x^{63} + 159\,x^{62} + 62\,x^{61} + 1891\,x^{60} + 107477\,x^{59} - 902596\,x^{58} + 8335714\,x^{57} - 45663527\,x^{56} + 173054772\,x^{55} - 413532777\,x^{54} \\
& -17004275\,x^{53} + 18400875468\,x^{52} - 172586145868\,x^{51} + 1097837823943\,x^{50} - 3802398503905\,x^{49} + 9024148907367\,x^{48} + 29797782924744\,x^{47} \\
& -332499749853067\,x^{46} + 1540295105328639\,x^{45} - 2946829421651553\,x^{44} + 158628048537397\,x^{43} + 7734229924675250\,x^{42} \\
& -95191685814642885\,x^{41} + 800575940821645788\,x^{40} - 3161803807222822789\,x^{39} + 1839463842843085373\,x^{38} + 23298537211098549845\,x^{37} \\
& -392085726015026014 26\,x^{36} - 205724269934673732485\,x^{35} + 1508490032934689989 47\,x^{34} + 633946030964992662 7406\,x^{33} \\
& -2562033785986457786 0848\,x^{32} - 32789950361053373668357\,x^{31} + 65161027390058331202 4819\,x^{30} - 26119317103653013211 46327\,x^{29} \\
& +337086870013463622651 0039\,x^{28} + 1578187636111112341088 7744\,x^{27} - 1047716771060447680591 06658\,x^{26} \\
& +297140560845114188571449200\,x^{25} - 329718230827830681540707092\,x^{24} - 1033953956857360280772973748\,x^{23} \\
& +677873687142700523038680 0029\,x^{22} - 2107760455100858279206425 2065\,x^{21} + 451264056922183954346972 38343\,x^{20} \\
& -686887525884039666549609 83932\,x^{19} + 626737994538872778479297 56392\,x^{18} + 157911159907630781189541 68540\,x^{17} \\
& -195435810601661911539997022958\,x^{16} + 448545577848167667191762816808\,x^{15} - 662817184117423309908031527951\,x^{14} \\
& +669737606656070443817004066202\,x^{13} - 329706949671067860697218694705\,x^{12} - 348156579868462249863291513856\,x^{11} \\
& +117197827998623588129147599986 1\,x^{10} - 181318667142896979520285989 6638\,x^{9} + 203866211113779125223435 5353001\,x^{8} \\
& -177635581188314982690469454419 5\,x^{7} + 125828139562052827447535405179 4\,x^{6} - 658847981602834715012703036939\,x^{5} \\
& +316201779223627218637907613770\,x^{4} - 634307297280963897134178093 43\,x^{3} + 109934519213262506857073701595\,x^{2} \\
& +59433030795495156859437691776\,x + 37033659834996176250988978256
\end{aligned}$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau_{18}(p)$ mod 31
$10^{1000} + 453$	$x^2 + 10x + 13$	21
$10^{1000} + 1357$	$(x-25)(x-11)$	5
$10^{1000} + 2713$	$x^2 + x + 24$	30
$10^{1000} + 4351$	$(x-20)(x-19)$	8
$10^{1000} + 5733$	$x^2 + 17x + 22$	14
$10^{1000} + 7383$	$x^2 + 24x + 7$	7
$10^{1000} + 10401$	$x^2 + 24x + 24$	7
$10^{1000} + 11979$	$(x-13)^2$	26
$10^{1000} + 17557$	$(x-22)(x-6)$	28
$10^{1000} + 21567$	$(x-5)(x-3)$	8
$10^{1000} + 22273$	$x^2 + 5x + 28$	26
$10^{1000} + 24493$	$(x-22)(x-17)$	8
$10^{1000} + 25947$	$x^2 + 25x + 25$	6
$10^{1000} + 27057$	$(x-19)(x-13)$	1
$10^{1000} + 29737$	$x^2 + 29x + 17$	2
$10^{1000} + 41599$	$(x-7)(x-5)$	12
$10^{1000} + 43789$	$x^2 + 10x + 12$	21
$10^{1000} + 46227$	$(x-22)(x-10)$	1
$10^{1000} + 46339$	$x^2 + 8x + 30$	23
$10^{1000} + 52423$	$(x-17)(x-12)$	29
$10^{1000} + 55831$	$x^2 + 9x + 25$	22
$10^{1000} + 57867$	$x^2 + 25x + 6$	6
$10^{1000} + 59743$	$(x-26)(x-18)$	13
$10^{1000} + 61053$	$x^2 + 23x + 20$	8
$10^{1000} + 61353$	$(x-16)(x-7)$	23
$10^{1000} + 63729$	$x^2 + 21x + 27$	10
$10^{1000} + 64047$	$x^2 + 20x + 26$	11
$10^{1000} + 64749$	$(x-11)(x-9)$	20
$10^{1000} + 68139$	$(x-30)(x-5)$	4
$10^{1000} + 68367$	$(x-20)(x-15)$	4
$10^{1000} + 70897$	$(x-30)(x-6)$	5
$10^{1000} + 72237$	$(x-15)(x-9)$	24
$10^{1000} + 77611$	$(x-17)(x-9)$	26
$10^{1000} + 78199$	$(x-17)(x-8)$	25
$10^{1000} + 79237$	$(x-27)(x-9)$	5
$10^{1000} + 79767$	$x^2 + 2x + 19$	29
$10^{1000} + 82767$	$(x-18)(x-14)$	1
$10^{1000} + 93559$	$(x-15)(x-10)$	25
$10^{1000} + 95107$	$(x-8)(x-2)$	10
$10^{1000} + 100003$	$(x-2)^2$	4

$$f_{20} = E_8\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{20}(n)q^n = q + 456q^2 + 50652q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned}
F_1(x) = {} & x^{64} - 7\,x^{63} - 73\,x^{62} + 589\,x^{61} + 4588\,x^{60} - 28861\,x^{59} - 83018\,x^{58} + 936975\,x^{57} - 8836860\,x^{56} - 18578796\,x^{55} + 503080741\,x^{54} \\
& -267479284\,x^{53} - 7467960543\,x^{52} + 43411541362\,x^{51} - 85880680678\,x^{50} - 1606671620924\,x^{49} + 3502653386892\,x^{48} + 20043723519826\,x^{47} \\
& -22050643125887\,x^{46} + 262925742831262\,x^{45} + 148280480439841\,x^{44} - 10362090580231573\,x^{43} - 10597803860560502\,x^{42} \\
& +17535173752329084\,x^{41} + 286984156189928639\,x^{40} + 1699269468449679984\,x^{39} + 220317712012062922\,x^{38} - 13526054495443383831\,x^{37} \\
& -19079067053935972601\,x^{36} - 330623844278405362614\,x^{35} + 207166408415304954328\,x^{34} + 4354538199333763787280\,x^{33} \\
& -7038727764673551008987\,x^{32} + 29963257250685243837287\,x^{31} - 4250299218892634464044\,x^{30} - 315346465631605531943592\,x^{29} \\
& +1022598010196162403138121\,x^{28} - 2307135958674796139495214\,x^{27} - 16998843587906579025225417\,x^{26} \\
& +94597435415714641008328967\,x^{25} - 318762099244950142410791956\,x^{24} + 857893940412037100720910109\,x^{23} \\
& -793154316973078546845878988\,x^{22} + 1715837765760361885970107476\,x^{21} - 1344990498219562763356908442\,x^{20} \\
& -22870309111418517155300013454\,x^{19} - 8809081051475948580652080444\,x^{18} - 24699026008278506650231237390\,x^{17} \\
& +233133524866915720177151199531\,x^{16} + 689025137631888984540145359471\,x^{15} + 1684543540290593578799093022837\,x^{14} \\
& +4441558472152705798316527597881\,x^{13} + 12235873927228766226033691811784\,x^{12} + 34701853135612458268155525765710\,x^{11} \\
& +80176652084130194349160058603651\,x^{10} + 154444715784602973107484409572241\,x^{9} + 244585931096060511799398193179893\,x^{8} \\
& +317787584545911887587933469843522\,x^{7} + 337376748813913101617615075047999\,x^{6} + 261256082187412354681312750754420\,x^{5} \\
& +123887489919306701494558646028083\,x^{4} + 28830370717608605343576485805334\,x^{3} + 13779947946016637048587488355235\,x^{2} \\
& +11819820044558176128803736119628\,x + 2987050861242482512754246479703
\end{aligned}$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau_{20}(p)$ mod 31
$10^{1000} + 453$	$(x-21)(x-20)$	10
$10^{1000} + 1357$	$x^2 + 29x + 15$	2
$10^{1000} + 2713$	$(x-25)(x-3)$	28
$10^{1000} + 4351$	$x^2 + x + 2$	30
$10^{1000} + 5733$	$x^2 + 21x + 12$	10
$10^{1000} + 7383$	$x^2 + 30x + 18$	1
$10^{1000} + 10401$	$x^2 + 10x + 13$	21
$10^{1000} + 11979$	$(x-5)(x-2)$	7
$10^{1000} + 17557$	$(x-23)^2$	15
$10^{1000} + 21567$	$(x-16)(x-15)$	0
$10^{1000} + 22273$	$(x-8)(x-5)$	13
$10^{1000} + 24493$	$(x-28)(x-9)$	6
$10^{1000} + 25947$	$(x-9)(x-4)$	13
$10^{1000} + 27057$	$(x-6)(x-5)$	11
$10^{1000} + 29737$	$x^2 + 16x + 21$	15
$10^{1000} + 41599$	$(x-27)^2$	23
$10^{1000} + 43789$	$x^2 + 6x + 11$	25
$10^{1000} + 46227$	$x^2 + 21x + 22$	10
$10^{1000} + 46339$	$x^2 + 24x + 30$	7
$10^{1000} + 52423$	$x^2 + 12x + 14$	19
$10^{1000} + 55831$	$x^2 + 7x + 5$	24
$10^{1000} + 57867$	$(x-28)(x-12)$	9
$10^{1000} + 59743$	$(x-29)(x-20)$	18
$10^{1000} + 61053$	$x^2 + 26x + 28$	5
$10^{1000} + 61353$	$(x-29)(x-21)$	19
$10^{1000} + 63729$	$x^2 + 29x + 15$	2
$10^{1000} + 64047$	$x^2 + 16x + 6$	15
$10^{1000} + 64749$	$(x-23)(x-20)$	12
$10^{1000} + 68139$	$(x-11)(x-9)$	20
$10^{1000} + 68367$	$x^2 + 24x + 24$	7
$10^{1000} + 70897$	$x^2 + 7x + 5$	24
$10^{1000} + 72237$	$(x-16)(x-6)$	22
$10^{1000} + 77611$	$x^2 + x + 27$	30
$10^{1000} + 78199$	$x^2 + 16x + 11$	15
$10^{1000} + 79237$	$(x-17)(x-4)$	21
$10^{1000} + 79767$	$x^2 + 23x + 20$	8
$10^{1000} + 82767$	$(x-25)(x-18)$	12
$10^{1000} + 93559$	$x^2 + 18x + 6$	13
$10^{1000} + 95107$	$x^2 + 26x + 8$	5
$10^{1000} + 100003$	$x^2 + 9x + 16$	22

$$f_{22} = E_{10}\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{22}(n) q^n = q - 288q^2 - 128844q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned}
F_1(x) = {} & x^{64} - 12\,x^{63} + 222\,x^{62} - 1674\,x^{61} + 18662\,x^{60} - 101029\,x^{59} + 1024302\,x^{58} - 6861416\,x^{57} + 64500739\,x^{56} - 560401725\,x^{55} \\
& +4349536406\,x^{54} - 31268657222\,x^{53} + 202803856714\,x^{52} - 1154071624768\,x^{51} + 6493809424811\,x^{50} - 32798342570057\,x^{49} \\
& +168281588785768\,x^{48} - 829897481160147\,x^{47} + 3589460864518622\,x^{46} - 12446414261581980\,x^{45} + 12301717553022414\,x^{44} \\
& +247841367977212383\,x^{43} - 2549254592213831070\,x^{42} + 15892235263054907550\,x^{41} - 66904816366652234067\,x^{40} \\
& +166885587463470669494\,x^{39} + 185252109100705686494\,x^{38} - 4682791035352483131219\,x^{37} + 29333119653897534423884\,x^{36} \\
& -117031424300317724792848\,x^{35} + 291864292389362735811747\,x^{34} - 93357718898515891757029\,x^{33} \\
& -3382628946032939905507010\,x^{32} + 20619829328587555735326737\,x^{31} - 73832781436986625590864006\,x^{30} \\
& +163650023601014544720143765\,x^{29} - 57179017416348621121045694\,x^{28} - 1439977175929234297591494187\,x^{27} \\
& +7965288966487406799008691553\,x^{26} - 26007405463762871646351217353\,x^{25} + 52923617642306459385330033366\,x^{24} \\
& -16549569184508818633251097140\,x^{23} - 401325585483353659738879980409\,x^{22} + 2074559493973445101234677805911\,x^{21} \\
& -6413347295322096537060457710441\,x^{20} + 13144414240997598053083751853992\,x^{19} - 11556279033921291003681575001666\,x^{18} \\
& -39303091998385105640241890914722\,x^{17} + 235521727852037049042434718782196\,x^{16} - 724775414330841323801057868929425\,x^{15} \\
& +1615370648556772877533902591133668\,x^{14} - 2802889608268339400002503724808444\,x^{13} + 3909037122499973223469733414751382\,x^{12} \\
& -4697542851414806151279638496031572\,x^{11} + 5864379405012158576297655967098766\,x^{10} - 8931790179241715228690532419720022\,x^{9} \\
& +13836778544066446449787187944116520\,x^{8} - 15634068023097917671614351369316054\,x^{7} + 6988819621200662436154467067504784\,x^{6} \\
& +12165215634000017550809356286690987\,x^{5} - 26996939500339519246764552745884884\,x^{4} + 21537816968347934426920225545351639\,x^{3} \\
& +12232026466937241023101715709034 90\,x^{2} - 1610892751356964874162170865535228 7\,x + 1191971822143468290522506801543402 3
\end{aligned}$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau_{22}(p)$ mod 31
$10^{1000} + 453$	$(x-27)(x-1)$	28
$10^{1000} + 1357$	$(x-30)(x-2)$	1
$10^{1000} + 2713$	$x^2 + 4x + 29$	27
$10^{1000} + 4351$	$(x-22)(x-12)$	3
$10^{1000} + 5733$	$x^2 + 28x + 15$	3
$10^{1000} + 7383$	$x^2 + 12x + 2$	19
$10^{1000} + 10401$	$(x-22)(x-14)$	5
$10^{1000} + 11979$	$x^2 + 13x + 16$	18
$10^{1000} + 17557$	$x^2 + 6x + 16$	25
$10^{1000} + 21567$	$(x-27)(x-1)$	28
$10^{1000} + 22273$	$(x-21)(x-12)$	2
$10^{1000} + 24493$	$(x-22)(x-6)$	28
$10^{1000} + 25947$	$x^2 + 23x + 1$	8
$10^{1000} + 27057$	$(x-20)(x-17)$	6
$10^{1000} + 29737$	$(x-11)(x-7)$	18
$10^{1000} + 41599$	$(x-18)(x-7)$	25
$10^{1000} + 43789$	$(x-17)(x-5)$	22
$10^{1000} + 46227$	$x^2 + 16x + 27$	15
$10^{1000} + 46339$	$(x-14)(x-11)$	25
$10^{1000} + 52423$	$x^2 + 15x + 4$	16
$10^{1000} + 55831$	$x^2 + 22x + 1$	9
$10^{1000} + 57867$	$(x-20)(x-17)$	6
$10^{1000} + 59743$	$x^2 + 25x + 27$	6
$10^{1000} + 61053$	$(x-2)(x-1)$	3
$10^{1000} + 61353$	$(x-16)^2$	1
$10^{1000} + 63729$	$x^2 + 6x + 29$	25
$10^{1000} + 64047$	$(x-24)(x-9)$	2
$10^{1000} + 64749$	$x^2 + 5x + 30$	26
$10^{1000} + 68139$	$(x-29)(x-16)$	14
$10^{1000} + 68367$	$x^2 + 12x + 23$	19
$10^{1000} + 70897$	$(x-13)(x-12)$	25
$10^{1000} + 72237$	$(x-10)(x-6)$	16
$10^{1000} + 77611$	$(x-17)(x-5)$	22
$10^{1000} + 78199$	$x^2 + 17x + 23$	14
$10^{1000} + 79237$	$(x-18)(x-12)$	30
$10^{1000} + 79767$	$(x-25)(x-9)$	3
$10^{1000} + 82767$	$(x-18)(x-7)$	25
$10^{1000} + 93559$	$x^2 + 7x + 30$	24
$10^{1000} + 95107$	$x^2 + 3x + 4$	28

$$f_{24} = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{24}(n) q^n = q + 24(22+\alpha)q^2 + 36(4731 - 32\alpha)q^3 + O(q^4)$$

Here we use slightly different notations: amongst the forms of level 1, f_{24} is the one of lowest weight to have irrational coefficients, that is to say for which $K_f \neq \mathbb{Q}$. Indeed in this case $K_{f_{24}} = \mathbb{Q}(\sqrt{144169})$ is the quadratic field with integer ring $\mathbb{Z}_{K_{f_{24}}} = \mathbb{Z}[\alpha]$, $\alpha = \frac{1+\sqrt{144169}}{2}$, and (prime) discriminant 144169. The prime 29 is inert in this field, so the representation modulo 29 attached to this form is out of computational reach at present; on the contrary, the prime 31 splits into $(31) = \mathfrak{l}_5 \mathfrak{l}_{27}$, where $\mathfrak{l}_5 = (31, \alpha - 5)$ and $\mathfrak{l}_{27} = (31, \alpha - 27)$. Instead of presenting the results for the Galois representations attached to f_{24} modulo $\mathfrak{l}_5$ and $\mathfrak{l}_{27}$ separately, it is more interesting to present them together, since we can then compute the coefficients $\tau_{24}(p) \bmod 31\mathbb{Z}[\alpha]$ by putting together the information coming from both representations and using Chinese remainders. This is what we do in the table below, where we denote by L_5 (resp. L_{27}) the number field cut off by the representation modulo $\mathfrak{l}_5$ (resp. $\mathfrak{l}_{27}$) attached to f_{24}.

$$
\begin{aligned}
(\iota_5)\quad F_1(x) = {} & x^{64} - 26\,x^{63} + 138\,x^{62} + 2883\,x^{61} - 50530\,x^{60} + 284952\,x^{59} + 1532392\,x^{58} - 42378023\,x^{57} + 313778342\,x^{56} - 30967109\,x^{55} \\
& -15952723659\,x^{54} + 120293225685\,x^{53} - 294956419293\,x^{52} - 2450725406897\,x^{51} + 28694976228508\,x^{50} - 82028806284207\,x^{49} \\
& -33797566443141\,x^{48} + 30936396673955\,x^{47} - 25385922046683633\,x^{46} + 285017809626505879\,x^{45} - 101340567457478942\,x^{44} \\
& -5967948306452799555\,x^{43} + 18835587705819950118\,x^{42} - 144943245205521339710\,x^{41} + 602219044044458739742\,x^{40} \\
& +220053533029971370946 9\,x^{39} - 16686864181478594950667\,x^{38} + 10797734164264641586719 2\,x^{37} - 475668786864492416295472\,x^{36} \\
& -2252980376817951449925 86\,x^{35} + 13039469950621100673089867\,x^{34} - 37880916977102172639162818\,x^{33} \\
& +238779720006225785050001 83\,x^{32} - 3797163554099064745955928 83\,x^{31} - 3585618417459246614226837 47\,x^{30} \\
& +2146750265399336014323840 5812\,x^{29} - 6253195037405945176322303 1677\,x^{28} - 1413631721076401871362592 73515\,x^{27} \\
& +9208934727690886333472792 77260\,x^{26} - 7645135019345475214406430 50277\,x^{25} - 2227564891412996848197832 943852\,x^{24} \\
& +4718036148188216276068524 31704\,x^{23} - 6403474778189117882143498 765256\,x^{22} + 1289452879005866397659372 94055323\,x^{21} \\
& -2671301974688798236750693 43083282\,x^{20} - 6099423225377637747986372 52351357\,x^{19} + 2843848149794156824379251 546718928\,x^{18} \\
& -1449008974308249876681217 755422392\,x^{17} - 8609964732085444739115712 428740443\,x^{16} + 1146223379373181990860768 1612424601\,x^{15} \\
& +1672101027289339133493220 1233417682\,x^{14} - 2985025711649284502023643 8390839168\,x^{13} - 8552805308234851132254384 5120538291\,x^{12} \\
& +2885056357811098668188847 53868632113\,x^{11} - 3529322933398324079651864 7599225700\,x^{10} - 1277262158496478519737058 759156656914\,x^{9} \\
& +1834010042289159626253642 058051818796\,x^{8} + 1354316757902805387817418 179095807350\,x^{7} - 4163881920776421128809003 897947900249\,x^{6} \\
& +9886302838253109455208355 33908582035\,x^{5} + 2040826308855028479392640 356469898542\,x^{4} - 7810743205291575346085024 96794137429\,x^{3} \\
& +7095768494434166909787748 03765082127\,x^{2} - 1543465475906955668641522 308642611594\,x + 6884132598033583133481635 39065291572
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\iota_{27})\quad F_1(x) = {} & x^{64} - 13\,x^{63} - 12\,x^{62} + 1798\,x^{61} - 2480\,x^{60} - 301351\,x^{59} + 2427920\,x^{58} + 3549779\,x^{57} - 128622131\,x^{56} - 605195516\,x^{55} \\
& +18083445605\,x^{54} - 76623104240\,x^{53} - 136111338385\,x^{52} + 163365709662\,x^{51} + 36207027735933\,x^{50} - 333393729013025\,x^{49} \\
& +1353870749023624\,x^{48} - 4874235588482263\,x^{47} + 57952977575049072\,x^{46} - 607896973953769424\,x^{45} + 3885848486411353707\,x^{44} \\
& -19706433793139872315\,x^{43} + 120488579146025627521\,x^{42} - 883909787742651393957\,x^{41} + 5725316882860134327765\,x^{40} \\
& -30772173337138099500438\,x^{39} + 159943917207673058062651\,x^{38} - 902780142644635221738911\,x^{37} + 5191270923286965360402518\,x^{36} \\
& -27218300530032866515284399\,x^{35} + 131834043223355056977306359\,x^{34} - 634566137578102285193778876\,x^{33} \\
& +3121681910932332495500670500\,x^{32} - 14916061491879244185623832302\,x^{31} + 66502847707000774372555381722\,x^{30} \\
& -280063144491158854648848327512\,x^{29} + 1151797920191329188089219069705\,x^{28} - 4647562082419563017250271030629\,x^{27} \\
& +17964227685904653209413452332198\,x^{26} - 65006898495556449638155640530135\,x^{25} + 220529771543741523242617521771165\,x^{24} \\
& -708030865546251742399340304689884\,x^{23} + 2183095437906409520271539169052977\,x^{22} - 6466045440189753384271760806624755\,x^{21} \\
& +18519022770605982324844617113128582\,x^{20} - 50903095666736365236595239907177352\,x^{19} + 135712299725345417719982183578217245\,x^{18} \\
& -349024414927084414313298879270239332\,x^{17} + 879282617681138593506051646342160011\,x^{16} - 2128887636785999977543247137539912626\,x^{15} \\
& +4959567391946018954079733252123119870\,x^{14} - 10698310092805038208309504750205888318\,x^{13} + 21185126053660446928251211870565927064\,x^{12} \\
& -37034974052822943124568751376502208132\,x^{11} + 57682303937811470679764738932557333147\,x^{10} - 77659172323156765855997312303575730246\,x^{9} \\
& +91059874206416211006654087253008834453\,x^{8} - 92285656456264804316815032164880452414\,x^{7} + 79794573183910939847907389673931597531\,x^{6} \\
& -60780767548452665962995019987085052653\,x^{5} + 37996038264233396745310228794005562702\,x^{4} - 20277402785975735994777964167007154402\,x^{3} \\
& +7574966450629297705011250772005345004\,x^{2} - 1351637429742600734951332369647381173\,x + 193569924383211730931468549048466113
\end{aligned}
$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L_5/\mathbb{Q}}{p}\right)$	Minimal polynomial of $\left(\frac{L_{27}/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau_{24}(p) \bmod 31\mathbb{Z}[\alpha]$
$10^{1000}+453$	$x^2+26x+21$	$(x-20)(x-15)$	$1+7\alpha$
$10^{1000}+1357$	$(x-18)(x-3)$	$(x-25)(x-22)$	$1+4\alpha$
$10^{1000}+2713$	$(x-24)(x-2)$	$(x-29)(x-7)$	$4+23\alpha$
$10^{1000}+4351$	$(x-17)(x-13)$	$(x-11)(x-6)$	$9+29\alpha$
$10^{1000}+5733$	$(x-19)(x-12)$	$(x-15)(x-9)$	$3+18\alpha$
$10^{1000}+7383$	$x^2+4x+14$	$(x-7)(x-2)$	$17+2\alpha$
$10^{1000}+10401$	$(x-22)(x-5)$	$x^2+24x+17$	$9+16\alpha$
$10^{1000}+11979$	$x^2+17x+7$	$x^2+19x+7$	$6+14\alpha$
$10^{1000}+17557$	$(x-26)(x-24)$	$(x-17)(x-13)$	$1+16\alpha$
$10^{1000}+21567$	$x^2+6x+29$	$x^2+2x+29$	$10+3\alpha$
$10^{1000}+22273$	$x^2+10x+19$	$(x-16)(x-7)$	$29+17\alpha$
$10^{1000}+24493$	$(x-22)(x-12)$	$(x-25)(x-18)$	$8+30\alpha$
$10^{1000}+25947$	$(x-15)(x-12)$	$(x-24)(x-23)$	$14+15\alpha$
$10^{1000}+27057$	$x^2+10x+30$	$(x-26)(x-25)$	$17+7\alpha$
$10^{1000}+29737$	$x^2+3x+24$	$x^2+13x+24$	$19+8\alpha$
$10^{1000}+41599$	$x^2+11x+8$	$x^2+27x+8$	$18+19\alpha$
$10^{1000}+43789$	$x^2+14x+3$	x^2+7x+3	$14+13\alpha$
$10^{1000}+46227$	$x^2+15x+12$	$x^2+4x+12$	$29+16\alpha$
$10^{1000}+46339$	$(x-24)(x-9)$	$x^2+5x+30$	$5+18\alpha$
$10^{1000}+52423$	$(x-10)(x-1)$	$x^2+16x+10$	$27+3\alpha$
$10^{1000}+55831$	$x^2+7x+25$	$(x-28)(x-2)$	$17+20\alpha$
$10^{1000}+57867$	$x^2+12x+6$	x^2+6x+6	$12+20\alpha$
$10^{1000}+59743$	$x^2+16x+12$	$(x-21)(x-5)$	$28+16\alpha$
$10^{1000}+61053$	$(x-18)(x-16)$	$x^2+15x+9$	$24+2\alpha$
$10^{1000}+61353$	$(x-26)(x-13)$	$x^2+30x+28$	$11+18\alpha$
$10^{1000}+63729$	$x^2+4x+23$	$(x-18)(x-3)$	$3+11\alpha$
$10^{1000}+64047$	$(x-19)(x-3)$	$(x-13)(x-2)$	$25+18\alpha$
$10^{1000}+64749$	$(x-13)(x-10)$	$(x-17)(x-4)$	$15+14\alpha$
$10^{1000}+68139$	$x^2+2x+26$	$(x-19)(x-3)$	$1+18\alpha$
$10^{1000}+68367$	$(x-22)(x-2)$	$x^2+21x+13$	$30+5\alpha$
$10^{1000}+70897$	$x^2+8x+25$	$(x-26)^2$	$15+14\alpha$
$10^{1000}+72237$	$(x-11)(x-2)$	$(x-12)(x-7)$	$6+20\alpha$
$10^{1000}+77611$	$x^2+5x+15$	$x^2+28x+15$	$27+6\alpha$
$10^{1000}+78199$	$(x-30)(x-28)$	$(x-25)(x-15)$	$17+2\alpha$
$10^{1000}+79237$	$x^2+10x+26$	$(x-27)(x-9)$	$19+19\alpha$
$10^{1000}+79767$	$(x-15)(x-6)$	$(x-7)(x-4)$	$12+8\alpha$
$10^{1000}+82767$	$(x-13)(x-3)$	$(x-24)(x-21)$	$8+14\alpha$
$10^{1000}+93559$	$(x-15)(x-10)$	$x^2+8x+26$	$17+14\alpha$
$10^{1000}+95107$	$(x-28)(x-20)$	$(x-18)(x-7)$	$18+6\alpha$
$10^{1000}+100003$	$x^2+21x+8$	$(x-10)(x-7)$	$7+13\alpha$

$$f_{26} = E_{14}\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{26}(n) q^n = q - 48q^2 - 195804q^3 + O(q^4)$$

$$\begin{aligned}
F_1(x) = {} & x^{64} - 23\,x^{63} + 667\,x^{62} - 8773\,x^{61} + 87048\,x^{60} - 592193\,x^{59} + 2808042\,x^{58} + 15646940\,x^{57} - 216079486\,x^{56} + 1290278528\,x^{55} \\
& + 3195720374\,x^{54} - 10247877979\,x^{53} + 2060757705\,x^{52} - 268480076561\,x^{51} - 3134482374894\,x^{50} - 1493982645205\,x^{49} \\
& + 92617293252829\,x^{48} + 1012936321995150\,x^{47} + 1028397805803536\,x^{46} - 2242206480626833\,x^{45} + 87087032485115294\,x^{44} \\
& - 530889487189872267\,x^{43} + 1443589828450612438\,x^{42} + 2889684379709495045\,x^{41} - 40932265328941422419\,x^{40} \\
& + 206002924654703979713\,x^{39} + 100083244682158594110\,x^{38} - 4861584137029727679835\,x^{37} + 7197685968000753048364\,x^{36} \\
& + 39829740257833786328379\,x^{35} - 50372822721258337309111\,x^{34} - 164290521979659491773916\,x^{33} - 502659264214314106366191\,x^{32} \\
& + 1815162152232518649611997\,x^{31} + 1363904280008576741355713\,x^{30} + 1876590981620483432604125\,x^{29} \\
& - 1388450300176302407340 4143\,x^{28} - 14015761412766426247484576\,x^{27} - 29582233109478673504568301\,x^{26} \\
& + 112458265566308757051570904\,x^{25} + 232533972821475958736037644\,x^{24} + 364213205884575833871724862\,x^{23} \\
& - 997433633439565772382609211\,x^{22} - 1920299082055511830142861779\,x^{21} - 4015401173362120312354429480\,x^{20} \\
& + 4806816246655452446873333076\,x^{19} + 8363897432774836441360356983\,x^{18} + 24343525044738660012646209027\,x^{17} \\
& - 8878985358856264114358333692\,x^{16} - 125588808598808025949536582 56\,x^{15} - 47491563243960026749417428844\,x^{14} \\
& + 30265639092614575955885195560\,x^{13} - 86180727565370934601830926 81\,x^{12} + 149511097378167728747058575007\,x^{11} \\
& - 30544361745663293035675579 7248\,x^{10} + 536030663953180269213722444125\,x^{9} - 980416306689378243709663684140\,x^{8} \\
& + 1449840294649829757874629198615\,x^{7} - 1658726071389310126481089296488\,x^{6} + 1240883226672543907891946571882\,x^{5} \\
& - 594411135116253302960160398835\,x^{4} + 147638500395410947699856635473\,x^{3} - 49387371697769114079198512313\,x^{2} \\
& + 22072301871690216621708766481\,x - 1517335222638897812009085872 7
\end{aligned}$$

p	Minimal polynomial of $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)$	$\tau_{26}(p) \bmod 31$
$10^{1000} + 453$	$(x-3)(x-2)$	5
$10^{1000} + 1357$	$(x-23)(x-4)$	27
$10^{1000} + 2713$	$x^2 + 13x + 26$	18
$10^{1000} + 4351$	$(x-13)(x-12)$	25
$10^{1000} + 5733$	$(x-6)(x-1)$	7
$10^{1000} + 7383$	$x^2 + 27x + 5$	4
$10^{1000} + 10401$	$x^2 + 21x + 26$	10
$10^{1000} + 11979$	$(x-27)(x-22)$	18
$10^{1000} + 17557$	$(x-17)(x-11)$	28
$10^{1000} + 21567$	$(x-27)(x-8)$	4
$10^{1000} + 22273$	$x^2 + 2x + 5$	29
$10^{1000} + 24493$	$(x-9)(x-7)$	16
$10^{1000} + 25947$	$(x-20)(x-8)$	28
$10^{1000} + 27057$	$(x-18)(x-12)$	30
$10^{1000} + 29737$	$(x-25)(x-6)$	0
$10^{1000} + 41599$	$x^2 + 23x + 1$	8
$10^{1000} + 43789$	$x^2 + 8x + 26$	23
$10^{1000} + 46227$	$x^2 + 10x + 26$	21
$10^{1000} + 46339$	$x^2 + 22x + 30$	9
$10^{1000} + 52423$	$(x-22)(x-11)$	2
$10^{1000} + 55831$	$x^2 + 17x + 5$	14
$10^{1000} + 57867$	$(x-28)(x-12)$	9
$10^{1000} + 59743$	$x^2 + x + 26$	30
$10^{1000} + 61053$	$(x-5)^2$	10
$10^{1000} + 61353$	$x^2 + 2x + 5$	29
$10^{1000} + 63729$	$(x-29)(x-16)$	14
$10^{1000} + 64047$	$(x-3)(x-2)$	5
$10^{1000} + 64749$	$(x-29)(x-18)$	16
$10^{1000} + 68139$	$x^2 + 27x + 6$	4
$10^{1000} + 68367$	$(x-6)(x-1)$	7
$10^{1000} + 70897$	$x^2 + 24x + 5$	7
$10^{1000} + 72237$	$(x-23)(x-7)$	30
$10^{1000} + 77611$	$x^2 + 8x + 30$	23
$10^{1000} + 78199$	$(x-30)(x-5)$	4
$10^{1000} + 79237$	$(x-11)(x-9)$	20
$10^{1000} + 79767$	$x^2 + 24x + 5$	7
$10^{1000} + 82767$	$x^2 + 20x + 1$	11
$10^{1000} + 93559$	$x^2 + 19x + 6$	12
$10^{1000} + 95107$	$(x-29)(x-15)$	13
$10^{1000} + 100003$	$(x-19)(x-18)$	6