La jacobienne d'une surface de Riemann compacte

Nicolas Mascot

Séminaire λ

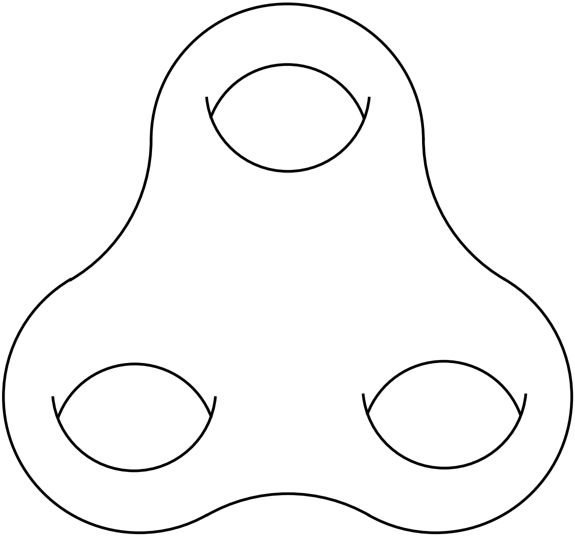
11 décembre 2012

Surfaces de Riemann compactes

Nous allons étudier quelques propriétés des surfaces de Riemann connexes compactes.

Soit X une telle surface, de *genre* g.

Une surface de Riemann compacte de genre 3

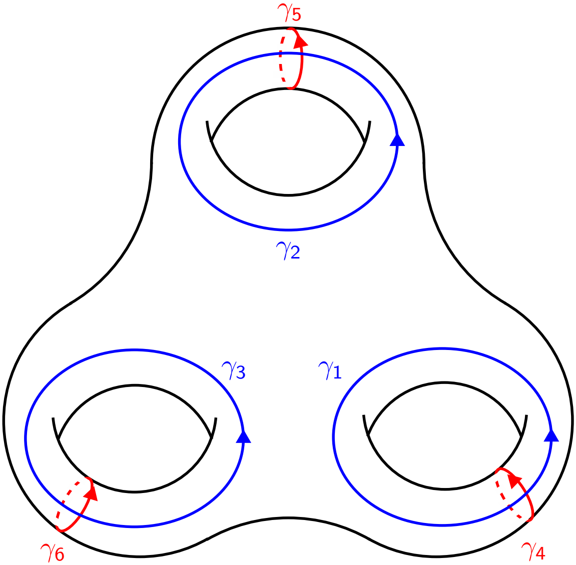


Formes différentielles

L'ensemble des 1-formes différentielles holomorphes sur X forme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension g.

Soit ω_1, ..., ω_g une base de cet espace.

Une base symplectique de l'homologie



Matrice des périodes

La *matrice des périodes* de X est

$$\begin{bmatrix} \displaystyle\int_{\gamma_1} \omega_1 & \cdots & \displaystyle\int_{\gamma_{2g}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \displaystyle\int_{\gamma_1} \omega_g & \cdots & \displaystyle\int_{\gamma_{2g}} \omega_g \end{bmatrix} \in M_{g \times 2g}(\mathbb{C}).$$

Matrice des périodes

La *matrice des périodes* de X est

$$\begin{bmatrix} \int_{\gamma_1} \omega_1 & \cdots & \int_{\gamma_{2g}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\gamma_1} \omega_g & \cdots & \int_{\gamma_{2g}} \omega_g \end{bmatrix} \in M_{g \times 2g}(\mathbb{C}).$$

Nous allons voir que ses colonnes engendrent un réseau dans $\mathbb{C}^g$, que nous noterons Λ.

Matrice des périodes

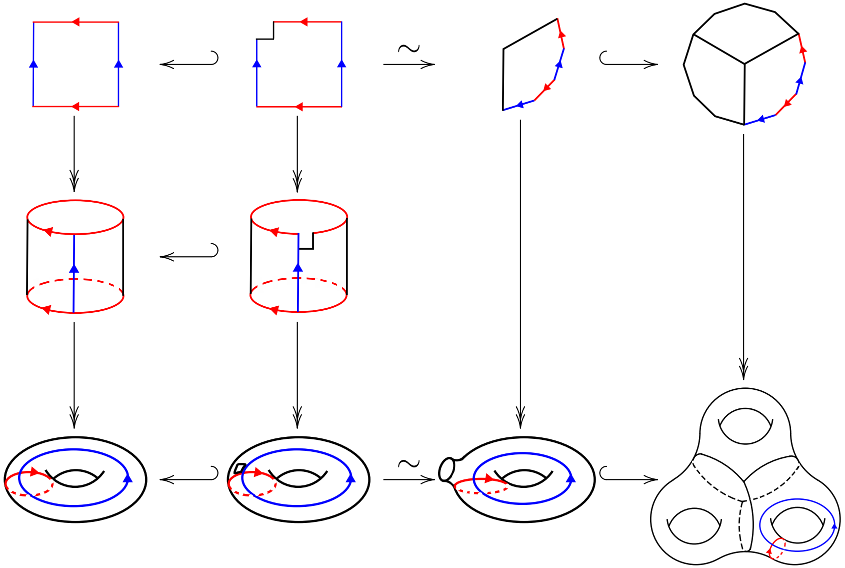
La *matrice des périodes* de X est

$$\begin{bmatrix} \int_{\gamma_1} \omega_1 & \cdots & \int_{\gamma_{2g}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\gamma_1} \omega_g & \cdots & \int_{\gamma_{2g}} \omega_g \end{bmatrix} \in M_{g \times 2g}(\mathbb{C}).$$

Nous allons voir que ses colonnes engendrent un réseau dans $\mathbb{C}^g$, que nous noterons Λ.

La *jacobienne* de X est $J = \mathbb{C}^g / \Lambda$.

Dissection canonique



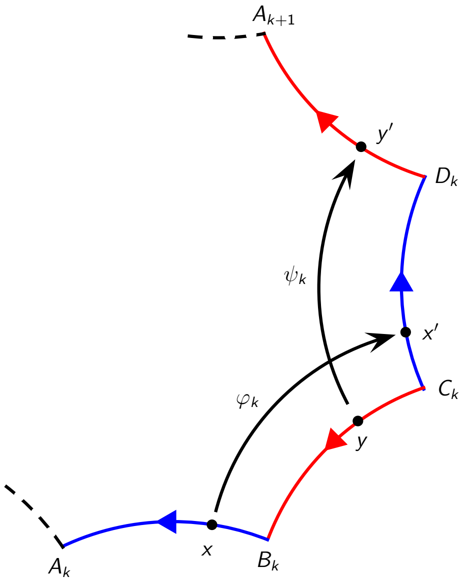
Une loi de réciprocité

Lemme

Si ω et ω' sont des formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ fermées, alors

$$\iint_X \omega \wedge \omega' = \sum_{k=1}^{g} \left(\int_{\gamma_k} \omega \int_{\gamma_{g+k}} \omega' - \int_{\gamma_{g+k}} \omega \int_{\gamma_k} \omega' \right).$$

Détail du collage



Produit extérieur et (anti)holomorphie

Si ω_1 et ω_2 sont holomorphes, alors

$$\iint_X \omega_1 \wedge \omega_2 = 0.$$

Produit extérieur et (anti)holomorphie

Si ω_1 et ω_2 sont holomorphes, alors

$$\iint_X \omega_1 \wedge \omega_2 = 0.$$

En effet, localement, $\omega_1 = f_1(z)dz$ et $\omega_2 = f_2(z)dz$, donc $\omega_1 \wedge \omega_2 = f_1(z)f_2(z)dz \wedge dz = 0$ car $dz \wedge dz = 0$.

Produit extérieur et (anti)holomorphie

Si ω_1 et ω_2 sont holomorphes, alors

$$\iint_X \omega_1 \wedge \omega_2 = 0.$$

En effet, localement, $\omega_1 = f_1(z)dz$ et $\omega_2 = f_2(z)dz$, donc $\omega_1 \wedge \omega_2 = f_1(z)f_2(z)dz \wedge dz = 0$ car $dz \wedge dz = 0$.

Si $\omega \neq 0$ est holomorphe, alors

$$i \iint_X \omega \wedge \overline{\omega} > 0.$$

Produit extérieur et (anti)holomorphie

Si ω_1 et ω_2 sont holomorphes, alors

$$\iint_X \omega_1 \wedge \omega_2 = 0.$$

En effet, localement, $\omega_1 = f_1(z)dz$ et $\omega_2 = f_2(z)dz$, donc $\omega_1 \wedge \omega_2 = f_1(z)f_2(z)dz \wedge dz = 0$ car $dz \wedge dz = 0$.

Si $\omega \neq 0$ est holomorphe, alors

$$i \iint_X \omega \wedge \overline{\omega} > 0.$$

En effet, localement, $\omega = f(z)dz$ et $\overline{\omega} = \overline{f(z)}d\overline{z}$, donc $\omega \wedge \overline{\omega} = |f(z)|^2 dz \wedge d\overline{z}$, or

$$idz \wedge d\overline{z} = i(dx + idy) \wedge (dx - idy) = 2dx \wedge dy.$$

τ est symétrique

$$\tau_{j,i} - \tau_{i,j} = \int_{\gamma_{g+i}} \omega_j - \int_{\gamma_{g+j}} \omega_i$$

τ est symétrique

$$\tau_{j,i} - \tau_{i,j} = \int_{\gamma_{g+i}} \omega_j - \int_{\gamma_{g+j}} \omega_i$$

$$= \sum_{k=1}^{g} \left(\int_{\gamma_k} \omega_i \int_{\gamma_{g+k}} \omega_j - \int_{\gamma_k} \omega_j \int_{\gamma_{g+k}} \omega_i \right)$$

τ est symétrique

$$\tau_{j,i} - \tau_{i,j} = \int_{\gamma_{g+i}} \omega_j - \int_{\gamma_{g+j}} \omega_i$$

$$= \sum_{k=1}^{g} \left(\int_{\gamma_k} \omega_i \int_{\gamma_{g+k}} \omega_j - \int_{\gamma_k} \omega_j \int_{\gamma_{g+k}} \omega_i \right)$$

$$= \iint_X \omega_i \wedge \omega_j = 0.$$

$\operatorname{Im}\tau$ est définie positive

Soit $(v_j)_{1 \leqslant j \leqslant g} \in \mathbb{R}^g \setminus \{0\}$ un vecteur réel non nul, et posons

$$\omega = \sum_{j=1}^{g} v_j \omega_j \neq 0.$$

Im τ est définie positive

Soit $(v_j)_{1 \leqslant j \leqslant g} \in \mathbb{R}^g \setminus \{0\}$ un vecteur réel non nul, et posons

$$\omega = \sum_{j=1}^{g} v_j \omega_j \neq 0.$$

$${}^t v (\operatorname{Im} \tau) v = \sum_{j=1}^{g} \sum_{k=1}^{g} v_j \operatorname{Im} \tau_{j,k} v_k = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{g} v_k \sum_{j=1}^{g} v_j (\overline{\tau_{j,k}} - \tau_{j,k})$$

$\operatorname{Im}\tau$ est définie positive

Soit $(v_j)_{1\leqslant j\leqslant g} \in \mathbb{R}^g \setminus \{0\}$ un vecteur réel non nul, et posons

$$\omega = \sum_{j=1}^{g} v_j \omega_j \neq 0.$$

$${}^t v (\operatorname{Im}\tau) v = \sum_{j=1}^{g}\sum_{k=1}^{g} v_j \operatorname{Im}\tau_{j,k} v_k = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{g} v_k \sum_{j=1}^{g} v_j (\overline{\tau_{j,k}} - \tau_{j,k})$$

$$= \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{g}\left(v_k \sum_{j=1}^{g} v_j \overline{\int_{\gamma_{g+k}} \omega_j} - v_k \sum_{j=1}^{g} v_j \int_{\gamma_{g+k}} \omega_j \right)$$

$\mathrm{Im}\,\tau$ est définie positive

Soit $(v_j)_{1\leqslant j\leqslant g} \in \mathbb{R}^g \setminus \{0\}$ un vecteur réel non nul, et posons

$$\omega = \sum_{j=1}^{g} v_j \omega_j \neq 0.$$

$$\begin{aligned}
{}^t v(\mathrm{Im}\,\tau)v &= \sum_{j=1}^{g}\sum_{k=1}^{g} v_j \,\mathrm{Im}\,\tau_{j,k} v_k = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{g} v_k \sum_{j=1}^{g} v_j(\overline{\tau_{j,k}} - \tau_{j,k}) \\
&= \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{g}\left(v_k \sum_{j=1}^{g} v_j \overline{\int_{\gamma_{g+k}} \omega_j} - v_k \sum_{j=1}^{g} v_j \int_{\gamma_{g+k}} \omega_j \right) \\
&= \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{g}\left(\int_{\gamma_k}\omega \int_{\gamma_{g+k}} \overline{\omega} - \int_{\gamma_k}\overline{\omega}\int_{\gamma_{g+k}}\omega \right) = \frac{i}{2}\iint_X \omega \wedge \overline{\omega} > 0.
\end{aligned}$$

Formes différentielles méromorphes

Théorème

Pour toute forme différentielle méromorphe ξ sur X,

$$\sum_{P \in X} \operatorname{res}_P \xi = 0.$$

Formes différentielles méromorphes

Théorème

Pour toute forme différentielle méromorphe ξ sur X,

$$\sum_{P \in X} \operatorname{res}_P \xi = 0.$$

Théorème

Réciproquement, étant donné un nombre fini de points $P_1, \cdots, P_n \in X$ et des nombres $r_1, \cdots, r_n \in \mathbb{C}^*$ tels que $\sum_{k=1}^{n} r_i = 0$, il existe une forme différentielle méromorphe sur X ayant un pôle simple en chaque P_k avec résidu r_k, et pas d'autres pôles.

Diviseurs

Un *diviseur* sur X est une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire formelle finie $D = \sum_{P \in X} n_P P$ de points de X.

Diviseurs

Un *diviseur* sur X est une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire formelle finie $D = \sum_{P \in X} n_P P$ de points de X.

Le degré d'un diviseur est $\deg D = \sum_{P \in X} n_P \in \mathbb{Z}$.

Diviseurs

Un *diviseur* sur X est une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire formelle finie $D = \sum_{P \in X} n_P P$ de points de X.

Le degré d'un diviseur est $\deg D = \sum_{P \in X} n_P \in \mathbb{Z}$.

Un diviseur est *principal* si c'est le diviseur d'une fonction méromorphe non nulle f sur X,

$$(f) = \sum_{P \in X} \operatorname{ord}_P(f) P, \quad f \in \mathbb{C}(X)^*.$$

Diviseurs

Un *diviseur* sur X est une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire formelle finie $D = \sum_{P \in X} n_P P$ de points de X.

Le degré d'un diviseur est $\deg D = \sum_{P \in X} n_P \in \mathbb{Z}$.

Un diviseur est *principal* si c'est le diviseur d'une fonction méromorphe non nulle f sur X,

$$(f) = \sum_{P \in X} \operatorname{ord}_P(f) P, \quad f \in \mathbb{C}(X)^*.$$

Théorème

Tout diviseur principal est de degré nul.

Diviseurs

Un *diviseur* sur X est une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire formelle finie $D = \sum_{P \in X} n_P P$ de points de X.

Le degré d'un diviseur est $\deg D = \sum_{P \in X} n_P \in \mathbb{Z}$.

Un diviseur est *principal* si c'est le diviseur d'une fonction méromorphe non nulle f sur X,

$$(f) = \sum_{P \in X} \operatorname{ord}_P(f) P, \quad f \in \mathbb{C}(X)^*.$$

Théorème

Tout diviseur principal est de degré nul.

Le *groupe de Picard* de X est

$$\operatorname{Pic}^0(X) = \text{Diviseurs de degré } 0 \;/\; \text{Diviseurs principaux}.$$

Plongement dans la jacobienne

Le choix d'une origine $O \in X$ permet de définir un plongement de X dans sa jacobienne :

$$\jmath_O : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & J = \mathbb{C}^g/\Lambda \\ P & \longmapsto & \left(\displaystyle\int_O^P \omega_i \right)_{1 \leqslant i \leqslant g} \end{array} .$$

L'application d'Abel-Jacobi

On prolonge par $\mathbb{Z}$-linéarité aux diviseurs, et on obtient un morphisme de groupes

$$\mathcal{J}: \begin{array}{ccc} \mathrm{Div}^0(X) & \longrightarrow & J = \mathbb{C}^g/\Lambda \\ \displaystyle\sum_{P \in X} n_P P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{P \in X} n_P \left(\int_O^P \omega_i \right)_{1 \leqslant i \leqslant g} \end{array} .$$

L'application d'Abel-Jacobi

On prolonge par $\mathbb{Z}$-linéarité aux diviseurs, et on obtient un morphisme de groupes

$$\jmath : \begin{array}{ccc} \mathrm{Div}^0(X) & \longrightarrow & J = \mathbb{C}^g/\Lambda \\ \displaystyle\sum_{P \in X} n_P P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{P \in X} n_P \left(\int_O^P \omega_i \right)_{1 \leqslant i \leqslant g} \end{array}.$$

Théorème (Abel-Jacobi)

Le noyau de $\jmath$ est exactement formé des diviseurs principaux, donc $\jmath$ induit un isomorphisme $\mathrm{Pic}^0(X) \xrightarrow{\sim} J$.

D principal $\Longrightarrow \jmath(D) = 0$

Soit $D = (f)$ un diviseur principal. Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1\mathbb{C} & \longrightarrow & J \\ (u:v) & \longmapsto & \jmath\big((u+vf)\big) \end{array}$$

est holomorphe, donc constante.

$\jmath(D) = 0 \implies D$ principal

Écrivons $D = \sum_{k=1}^{s} n_k P_k$.

$\jmath(D) = 0 \implies D$ principal

Écrivons $D = \sum_{k=1}^{s} n_k P_k$.

Dire que $\jmath(D) = 0$, c'est dire que pour un (pour tout) choix de chemins α_k de O à P_k dans X, il existe des entiers $m_1, \cdots, m_{2g} \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{s} n_k \int_{\alpha_k} = \sum_{l=1}^{2g} m_l \int_{\gamma_l}.$$

$\jmath(D) = 0 \implies D$ principal

Nous allons construire une fonction f méromorphe sur X de diviseur est $(f) = \sum n_k P_k$ sous la forme

$$f(P) = \exp\left(\int_O^P \xi\right)$$

où ξ est une forme différentielle méromorphe sur X bien choisie.

$\jmath(D) = 0 \implies D$ principal

Nous allons construire une fonction f méromorphe sur X de diviseur est $(f) = \sum n_k P_k$ sous la forme

$$f(P) = \exp\left(\int_O^P \xi\right)$$

où ξ est une forme différentielle méromorphe sur X bien choisie.

Il faudrait

1. que ξ ait des pôles simples en les P_k, avec résidus n_k, et pas d'autres pôles,
2. et que $\displaystyle\int_{\gamma_j} \xi \in 2i\pi\mathbb{Z}$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant 2g$.

$\jmath(D) = 0 \implies D$ principal

Nous allons construire une fonction f méromorphe sur X de diviseur est $(f) = \sum n_k P_k$ sous la forme

$$f(P) = \exp\left(\int_O^P \xi\right)$$

où ξ est une forme différentielle méromorphe sur X bien choisie.

Il faudrait

1. que ξ ait des pôles simples en les P_k, avec résidus n_k, et pas d'autres pôles, c'est possible car $\sum n_k = 0$.
2. et que $\displaystyle\int_{\gamma_j} \xi \in 2i\pi\mathbb{Z}$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant 2g$.

$\jmath(D) = 0 \implies D$ principal

Nous allons construire une fonction f méromorphe sur X de diviseur est $(f) = \sum n_k P_k$ sous la forme

$$f(P) = \exp\left(\int_O^P \xi\right)$$

où ξ est une forme différentielle méromorphe sur X bien choisie.

Il faudrait

1. que ξ ait des pôles simples en les P_k, avec résidus n_k, et pas d'autres pôles, c'est possible car $\sum n_k = 0$.
2. et que $\displaystyle\int_{\gamma_j} \xi \in 2i\pi\mathbb{Z}$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant 2g$. Nous allons y parvenir en ajoutant à ξ une combinaison linéaire convenable des ω_i.

$\jmath(D) = 0 \implies D$ principal

Déjà, comme $\displaystyle\int_{\gamma_j} \omega_i = \mathbf{1}_{i=j}$, on peut s'arranger pour que

$$\int_{\gamma_j} \xi = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant g.$$

Alors

$\jmath(D) = 0 \implies D$ principal

Déjà, comme $\int_{\gamma_j} \omega_i = \mathbf{1}_{i=j}$, on peut s'arranger pour que

$$\int_{\gamma_j} \xi = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant g.$$

Alors

$$\int_{\gamma_{g+j}} \xi = 2i\pi \sum_{k=1}^{s} n_k \int_{\alpha_k} \omega_j.$$

$\jmath(D) = 0 \implies D$ principal

$$\int_{\gamma_{g+j}} \xi = 2i\pi \sum_{k=1}^{s} n_k \int_{\alpha_k} \omega_j, \qquad \sum_{k=1}^{s} n_k \int_{\alpha_k} = \sum_{l=1}^{2g} m_l \int_{\gamma_l}.$$

$\jmath(D) = 0 \implies D$ principal

$$\int_{\gamma_{g+j}} \xi = 2i\pi \sum_{k=1}^{s} n_k \int_{\alpha_k} \omega_j, \qquad \sum_{k=1}^{s} n_k \int_{\alpha_k} = \sum_{l=1}^{2g} m_l \int_{\gamma_l}.$$

Posons alors $\xi' = \xi - 2i\pi \sum_{i=1}^{g} m_{g+i}\omega_i$.

$\jmath(D) = 0 \implies D$ principal

$$\int_{\gamma_{g+j}} \xi = 2i\pi \sum_{k=1}^{s} n_k \int_{\alpha_k} \omega_j, \qquad \sum_{k=1}^{s} n_k \int_{\alpha_k} = \sum_{l=1}^{2g} m_l \int_{\gamma_l}.$$

Posons alors $\xi' = \xi - 2i\pi \sum_{i=1}^{g} m_{g+i}\omega_i$.

Nous avons $\displaystyle\int_{\gamma_j} \xi = -2i\pi m_{g+j} \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

$\jmath(D) = 0 \implies D$ principal

$$\int_{\gamma_{g+j}} \xi = 2i\pi \sum_{k=1}^{s} n_k \int_{\alpha_k} \omega_j, \qquad \sum_{k=1}^{s} n_k \int_{\alpha_k} = \sum_{l=1}^{2g} m_l \int_{\gamma_l}.$$

Posons alors $\xi' = \xi - 2i\pi \sum_{i=1}^{g} m_{g+i}\omega_i$.

Nous avons $\int_{\gamma_j} \xi = -2i\pi m_{g+j} \in 2i\pi\mathbb{Z}$, et

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{g+j}} \xi' &= \int_{\gamma_{g+j}} \xi - 2i\pi \sum_{i=1}^{g} m_{g+i} \int_{\gamma_{g+j}} \omega_i \\ &= 2i\pi \sum_{l=1}^{2g} m_l \int_{\gamma_l} \omega_j - 2i\pi \sum_{i=1}^{g} m_{g+i} \int_{\gamma_{g+i}} \omega_j \\ &= 2i\pi m_j \in 2i\pi\mathbb{Z}.\end{aligned}$$