Symétries de Lie des équations aux dérivées partielles et classification des actions locales de groupes de Lie

Sylvain Arguillère et Nicolas Mascot

FIMFA, École Normale Supérieure, Paris

Juin 2008

Table des matières

Introduction

Les symétries de Lie sont des outils puissants pour la recherche de groupes de symétries continus d'un sous-espace d'une variété. Elles ont également de nombreuses applications dans l'étude des équations différentielles et aux dérivées partielles.

En 1870, lors d'un séjour en France, Sophus Lie découvrit la théorie de Galois, qui permet l'étude d'une équation algèbrique par groupe laissant invariant l'ensemble de ses racines interposé. C'est vers 1874 qu'il eut une révélation : il avait compris qu'en utilisant des groupes de symétries continus, il devait être possible d'étudier les équations différentielles par un procédé en quelque sorte similaire. Ses travaux gravitaient essentiellement autour de la notion de *générateur infinitésimal* d'un groupe continu de transformations. Il s'agit en fait, comme nous le verrons, d'algèbres de Lie de dimension finie de champs de vecteurs.

Dans ce mémoire, après avoir introduit le fameux concept de générateur infinitésimal, nous en donnerons deux applications : premièrement, l'étude des symétries d'équations différentielles, et deuxièmement, la classification de toutes les algèbres de Lie de champs de vecteurs holomorphes en dimension complexe un et deux.

Tous nos problèmes seront purement locaux, ce qui nous autorisera plusieurs simplifications. Nous pourrons ainsi restreindre notre étude à un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$; néanmoins, tous les résultats donnés dans ce mémoire demeurent valables dans le cadre plus général des variétés différentielles.

I - Champs de vecteurs

Commençons notre étude par quelques rappels concernant les champs de vecteurs.

Dérivations. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^n$. D'un point de vue géométrique, un *champ de vecteurs* sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est une application qui, à chaque point x de U, associe un vecteur $\xi(x)$ issu de ce point, la dépendance par rapport à x étant lisse. Autrement dit, ξ s'interprète comme une application $\xi\colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, éventuellement analytique réelle. Dans toute la suite, U désigne un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$.

D'un point de vue différentiel, si on note $\xi(x) = (\xi_1(x), \ldots, \xi_n(x))$ les composantes de ξ, un tel champ de vecteurs agit comme *dérivation* sur les fonctions lisses $f\colon U \to \mathbb{R}$ par :

$$\xi(f)(x) := \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Ceci justifie la notation :

$$\xi(x) := \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Par ailleurs, si $x \mapsto \phi(x) =: y$ est un difféomorphisme de U sur un ouvert $V = \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ équipé des coordonnées $y = (y_1, \ldots, y_n)$, l'*image directe $\phi_*\xi$ de ξ par ϕ* est définie en transférant les vecteurs $\xi(x)$ par la différentielle de ϕ :

$$(\phi_*\xi)(y) := d\phi_x\big(\xi(x)\big),$$

pour tout $y \in V$.

Le résultat suivant classifie localement à difféomorphisme près les champs de vecteurs en dehors de leurs *singularités*, c'est-à-dire des points où ils s'annulent.

Théorème 1 : *Soit ξ un champ de vecteurs lisse ou analytique sur U, et $x_0 \in U$ un point où ce champ ne s'annule pas, i.e. $\xi(x_0) \neq 0$. On peut "redresser" ξ localement, au sens où il existe un voisinage V de x_0 et un difféomorphisme local $\phi \colon V \to \phi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$, de même régularité que ξ, fixant x_0 tels que*

$$\phi_*(\xi) \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{sur} \quad \phi(V),$$

pour tout $y = f(x)$.

Flot. Pour tout élément x de U, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution maximale γ_x, définie sur un intervalle ouvert maximal I_x contenant 0, au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \gamma'(t) = \xi(\gamma(t)) \text{ pour tout } t \in I_x, \\ \gamma(0) = x. \end{cases}$$

Ceci nous autorise à définir le *flot* de ξ comme étant l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi \ : & \bigcup_{x\in U} \big(\{x\} \times I_x\big) & \longrightarrow & U \\ & (x,t) & \longmapsto & \gamma_x(t). \end{array}$$

Classiquement, on note $exp(t\xi)x$ pour $\Phi(x,t)$, ce qui a l'avantage de suggérer la propriété typique des équations ordinaires autonomes d'ordre un :

$$exp(s\xi)exp(t\xi)x = exp\big((s+t)\xi\big)x \qquad \text{et} \qquad exp(0\xi)x = x,$$

qui sont vraies dès que la composition a un sens, c'est-à-dire pour $x \in U$, $t \in I_x$ et $s \in I_{exp(t\xi)x}$. Ainsi, les $\big(exp(t\xi)\big)_{t\in\mathbb{R}}$ forment *un groupe local à un paramètre* de difféomorphismes.

Réciproquement, il est classique qu'une famille $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ différentiables de difféomorphismes localement définis, telle que $\varphi_0 = Id_U$ vérifiant quand définies les égalités :

$$\varphi_t \circ \varphi_s(x) = \varphi_{t+s}(x), \qquad t \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R}$$

est le flot d'un unique champ de vecteurs ξ sur U, donné par :

$$\xi(x) = \frac{d}{dt}\big(\varphi_t(x)\big)_{t=0}, \qquad x \in U.$$

Crochets de Lie. On définit le *crochet de Lie* $[\xi, \eta]$ de deux champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$, ξ et η, sur U comme l'unique champ de vecteurs vérifiant

$$[\xi,\eta](f) = \xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f))$$

pour toute application de classe $\mathcal{C}^\infty$ $f \colon U \to \mathbb{R}$. Ainsi, dans un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, le crochet se calcule simplement comme commutateur entre deux dérivations :

$$\left[\ \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}\ \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

En fait, le crochet de Lie $[\xi, \eta]$ mesure non seulement la non-commutativité des deux dérivations ξ et η, mais c'est encore le premier terme significatif du développement de Taylor du commutateur des flots de ξ et η :

$$exp(t\xi)exp(t\eta)exp(-t\xi)exp(-t\eta)x = x + \frac{t^2}{2}[\xi,\eta] + O(t^3).$$

On a même le théorème suivant :

Théorème 2 : *Les flots $exp(t\xi)$ et $exp(s\eta)$ de deux champs de vecteurs ξ et η commutent si et seulement si leur crochet de Lie s'annule identiquement :* $[\xi, \eta] \equiv 0$.

L'application crochet $[\cdot\,,\cdot]$ définit sur l'espace des champs de vecteurs sur U une application bilinéaire antisymétrique :

$$[\xi, \eta] = -[\eta, \xi],$$

qui satisfait en outre l'*identité de Jacobi* : pour tous champs de vecteurs ξ, η et ϕ, on a :

$$\big[\xi, [\eta, \phi]\big] + \big[\eta, [\phi, \xi]\big] + \big[\phi, [\xi, \eta]\big] \equiv 0.$$

Lors de ces bref rappel sur les champs de vecteurs, nous avons introduit une première sorte de groupes de transformations : les flots. Un flot décrit le mouvement d'un point le long d'une courbe, c'est-à-dire un mouvement avec un seul degré de liberté. Dans la partie suvante, nous étudierons des transformations plus générales : les actions de groupes de Lie.

II - Actions différentiables de groupes de Lie

Dans cette partie, nous donnons sans démonstration quelques propriétés classiques des groupes de Lie, et introduisons les outils qui constitueront la base de ce mémoire. Ces outils permettront de réduire l'étude des actions locales à celle d'actions infinitésimales, grâce aux algèbres de Lie de groupes de Lie.

Groupes de Lie. On appelle *groupe de Lie à r paramètres* un groupe (au sens algébrique du terme), muni en outre d'une structure de variété $\mathcal{C}^\infty$, de dimension r, telle que la loi de groupe $m\colon (G \times G) \to G$ et l'inversion $\iota\colon G \to G$ soient également $\mathcal{C}^\infty$. Dans beaucoup de nos applications, nous nous restreindrons même à des groupes de Lie analytiques.

Pour tout $g \in G$, on définit les applications *multiplication à gauche* $L_g : G \longrightarrow G$ et *à droite* $R_g : G \longrightarrow G$ par $\forall h \in G,\ L_g(h) = gh$ et $R_g(h) = hg$. Ainsi définies, L_g et R_g sont des difféomorphismes, d'inverses respectifs $L_{g^{-1}}$ et $R_{g^{-1}}$.

Soient H et G des groupes de Lie. Un *morphisme de groupes de Lie* $\phi : G \longrightarrow H$ est un morphisme de groupes qui est également une application différentiable. Il est facile, par composition avec L_g par exemple, de montrer qu'un morphisme de groupe ϕ est différentiable en tout point si et seulement s'il l'est en l'élément neutre. Un morphisme de groupes de Lie est de plus de rang constant, et, dès qu'il est bijectif, est un difféomorphisme. On dit alors que ϕ est un *isomorphisme de groupe de Lie.*

Dans toute la suite, sauf mention explicite, tous les groupes de Lie que nous considérerons seront connexes.

Soit G un groupe de Lie. Un *sous-groupe de Lie H* de G est un sous-groupe qui est également une sous-variété. Le théorème de Cartan donne un critère simple pour caractériser les sous-groupes de Lie d'un groupe G :

Théorème 3 : *Soit H un sous-groupe d'un groupe de Lie G. Alors H est un sous-groupe de Lie si et seulement si H est fermé.*

Groupes locaux de transformations. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Un *groupe local de transformations* agissant sur U est la donnée d'un groupe de Lie G et d'un ouvert W tels que $\{e\} \times U \subseteq W \subseteq G \times U$, ainsi que d'une application lisse

$$\begin{array}{rccll} \psi : & W & \longrightarrow & U & \\ & (g,x) & \longmapsto & \psi((g,x)) & =: g.x \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- Composition : Si $(h,x), (g,h.x)$ et (gh,x) sont dans W, alors $g.(h.x) = (gh).x$,
- Elément identité : L'élément neutre de G, e, agit comme l'application identité : pour tout x dans U, $e.x = x$,
- Inverse : $g^{-1}.(g.x)$ est défini et vaut x dès que $g.x$ est défini.

On notera $V_x := \{g \in G \mid (g,x) \in W\}$ l'ensemble des g pouvant agir sur x.

Nous avons déjà rencontré un exemple de groupe local de transformations : le flot d'un champ de vecteurs ξ sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Comme nous l'avons déjà mentionné, c'est bien un groupe local à un paramètre : $t.x = exp(t\xi)x$, pour $t \in I_x$, définit en effet une action locale de $\mathbb{R}$ sur U.

Si x est un élément de U, on note $O(x)$ son *orbite*. Celle-ci est définie comme étant le plus petit sous-ensemble de U contenant x et stable par l'action de G : dès que $y \in O(x)$ et $g \in V_y$, $g.y \in O(x)$. Il vient alors directement que :

$$O(x) = \{g_1 \dots g_k.x \mid k \in \mathbb{N},\ g_1, \dots, g_k \in G,\ g_1 \dots g_k.x \text{ défini}\},$$

où $g_1 \dots g_n.x$ signifie que l'on a d'abord appliqué la transformation g_n, puis g_{n-1}, etc... jusqu'à g_1.

Remarquons la différence de caractérisation entre une orbite de groupe local et une orbite de groupe : dans le cas d'un groupe local, même si $g.x$ et $h.(g.x)$ sont définis, $(hg).x$ ne l'est pas forcément, ce qui nécessite de faire agir successivement plusieurs éléments du groupe.

Un groupe local de transformations est dit *transitif* s'il n'y a qu'une seule orbite. Il est dit *fidèle* si le seul élément de G fixant tous les éléments de U est e. Il est *localement transitif* si, pour tout $x \in U$, pour tout voisinage $V'_x \subseteq V_x$ de l'élément neutre, $V'_x.x$ contient un voisinage de x, et *localement fidèle* s'il existe un voisinage V_0 de l'élément neutre, telle que l'action de G restreinte à V_0 soit fidèle.

Dorénavant, tous les groupes locaux de transformations que nous considérerons seront localement fidèles.

Les orbites forment une partition de U, et en sont toujours des *sous-variétés immergées* ; en effet, pour tout $x \in U$, l'application $\psi_x : V_x \longrightarrow U$ définie par $\psi_x(g) := g.x$ est une application de rang constant, car $\psi_x \circ R_g = \psi_{g.x}$, d'image $O(x)$.

Un groupe de Lie agit *semi-régulièrement* si toutes ses orbites ont la même dimension en tant que sous-variétés immergés. Il agit *régulièrement* si, pour la topologie induite, chaque orbite est localement connexe par arcs. En fait, en réduisant suffisamment U et W, toute action semi-régulière peut devenir régulière. Ceci se démontre par le théorème de Frobenius, mais comme nous ne souhaitons pas nous aventurer trop loin dans ce domaine, nous l'admettrons.

Le théorème de Frobenius permet également de donner une forme normale locale aux orbites de G :

Théorème 4 : *Si G agit régulièrement sur U, avec orbites de dimension k, alors pour tout $x_0 \in U$, il existe des voisinages V de x_0 et V' de 0, et un difféomorphisme*

$$\begin{array}{rccl} \phi & : & V & \longrightarrow & V', \\ & & x & \longmapsto & (y,z) = (y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots z_{n-k}), \end{array}$$

tel que l'intersection de toute orbite de G avec V soit la pré-image par ϕ de l'intersection de V_0 et d'un sous-espace affine de dimension k et d'équation $z_1 = c_1, \ldots, z_{n-k} = c_{n-k}$ où les c_i sont des constantes. Ainsi, les orbites de G forment un feuilletage de U.

Sous-espaces invariants. Soit G un groupe local de transformations agissant sur U. Un sous-ensemble $S \subseteq U$ est *invariant* sous l'action de G si pour tout $x \in S$, pour tout $g \in V_x$, $g.x \in S$. Ceci est équivalent à ce que S soit une réunion d'orbites.

Si les solutions d'un système d'équations

$$F_1(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = F_k(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

forment un sous-ensemble invariant sous l'action de G, on dit que G est un *groupe de symétries* pour ce système d'équations.

Lorsque l'on cherche à montrer qu'une variété immergée est invariante, le plus commode est souvent d'utiliser un critère infinitésimal, comme nous le verrons plus tard.

Algèbres de Lie. Une *algèbre de Lie* est un espace vectoriel réel ou complexe V muni d'une application $[\ .\ ,\ .\ ] : V \times V \longrightarrow V$ bilinéaire, antisymétrique, et qui satisfait l'identité de Jacobi, à savoir :

$$\forall u, v, w \in V, \big[u, [v, w]\big] + \big[v, [w, u]\big] + \big[w, [u, v]\big] = 0.$$

Typiquement, les champs de vecteurs sur U forment une algèbre de Lie.

Soit V une algèbre de Lie de dimension finie r, et $v_1, \ldots, v_r$ une base de V. Alors il existe des constantes C_{ij}^k, dites *constantes de structure*, telles que

$$\forall i, j = 1, \ldots, r, \qquad [v_i, v_j] = \sum_{k=1}^{r} C_{ij}^k v_k;$$

l'antisymétrie et l'identité de Jacobi donnant les relations $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$ et $\sum_{k=1}^r C_{ij}^k C_{kl}^m + C_{li}^k C_{kj}^m + C_{jl}^k C_{ki}^m = 0$ pour tous $i, j, m, l = 1, \ldots, r$.

Soient V et W deux algèbres de Lie. Un *morphisme d'algèbres de Lie* est une application linéaire $\psi : V \longrightarrow W$ qui en outre conserve le crochet de Lie, autrement dit, telle que pour tous $v, w \in V$, on ait $\psi([v, w]) = [\psi(v), \psi(w)]$. Par exemple, l'image directe de champs de vecteurs définie ci-dessus est un morphisme d'algèbre de Lie.

Algèbre de Lie d'un groupe de Lie. Soit G un groupe de Lie. *L'algèbre de Lie* de G est l'ensemble des champs de vecteurs ξ sur G *invariants à droite* :

$$\forall g \in G,\ R_{g_*}\xi = \xi.$$

Autrement dit, pour tous $h, g \in G$, on doit avoir $(dR_g)_h\big(\xi(h)\big) = \xi(hg)$. On voit ainsi qu'un champ de vecteurs invariant à droite est caractérisé par sa valeur en l'élément neutre :

$$\forall g \in G,\ \xi(g) = (dR_g)_e\big(\xi(e)\big),$$

et que réciproquement, tout élément de l'espace tangent à G en l'indentité donne un champ de vecteurs invariant à droite en imposant l'égalité ci-dessus comme une définition.

Le fait que l'image directe conserve le crochet de Lie montre que le crochet de deux champs de vecteurs invariants à droite est invariant à droite.

Il vient donc que l'espace des champs de vecteurs sur G invariants à droite est une algèbre de Lie pour le crochet de champs de vecteurs, de même dimension que G. On identifiera souvent l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à droite d'un groupe de Lie avec son espace tangent en l'élément neutre, muni du crochet induit.

On notera $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G.

Application exponentielle. L'application exponentielle permet le passage de l'infinitésimal (algèbre de Lie) au local (voisinage de l'élément neutre). Soit ξ champ de vecteurs invariant à droite d'un groupe de Lie G. Ce champ de vecteurs a un flot, noté $exp(t\xi) : G \longrightarrow G$. Toutefois, une conséquence de l'invariance à droite de ξ est que pour tout réel t, pour tout $g \in G$, $exp(t\xi)g = \big(exp(t\xi)e\big)g$. Autrement dit, le flot d'un champ de vecteurs invariant à droite $(exp(t\xi))_{t\in\mathbb{R}}$ sur G s'identifie au sous-groupe à un paramètre $(exp(t\xi)e)_{t\in\mathbb{R}} \subseteq G$ agissant par multiplication à gauche. On définit alors logiquement $exp(\xi) := exp(\xi)e$ pour $\xi \in \mathfrak{g}$.

Réciproquement, tout sous-groupe de Lie immergé H connexe à un paramètre est engendré par le flot d'un champ de vecteurs invariant à droite ξ de G : il s'agit d'un générateur de T_eH. Il y a donc une correspondance bijective entre sous-groupes immergés à un paramètre de G et sous-espaces vectoriels de dimension 1 de $\mathfrak{g}$.

Cette application est un difféomorphisme local au voisinage de $0 \in \mathfrak{g}$ (par le théorème d'inversion locale et le fait que $d(exp)_0 = Id$), et donc $Im(exp)$ contient un voisinage de e. Un groupe de Lie connexe étant sans petit groupe, le théorème suivant vient directement :

Théorème 5 : *Soit G un groupe de Lie connexe. Alors tout élément g de G s'écrit comme un produit fini d'exponentielles d'éléments de $\mathfrak{g}$.*

Liens entre les groupes de Lie et leur algèbre. Soit G un groupe de Lie à r paramètres. Dans ce paragraphe, nous étudions comment certaines informations sur G (sous-groupes immergés, centres, etc...) sont contenues dans son algèbre.

Soit donc G un groupe de Lie connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Une *sous-algèbre de Lie* $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ stable par le crochet de Lie. Nous avons déjà vu qu'une sous-algèbre de Lie de dimension 1 engendre par exponentiation un unique sous-groupe immergé à un paramètre (tout sous-espace vectoriel de dimension 1 de G est une sous-algèbre de Lie). C'est en fait un cas particulier du résultat plus général suivant :

Théorème 6 : *Soit G un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, il y a une correspondance bijective entre sous-groupes immergés à s paramètres et sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ de dimension s.*

Nous allons maintenant nous servir de ces propriétés de l'algèbre de Lie pour étudier les groupes locaux de transformations.

Actions de groupe infinitésimales. De même qu'un groupe local à un paramètre de transformations sur U peut être interprété comme le flot d'un champ de vecteurs, un groupe de Lie de transformations sera généré par un ensemble de champs de vecteurs sur U : ses *générateurs infinitésimaux.*

Plus précisément, si $\xi \in \mathfrak{g}$ est un champ de vecteurs invariant à droite d'un groupe local de transformations G sur U, il génère un sous-groupe à un paramètre

$\big(exp(t\xi)\big)_{t\in\mathbb{R}}$, qui agit alors sur U comme un groupe local de transformations à un paramètre. Il s'identifie alors au flot d'un champ de vecteurs, noté $\widehat{\xi}$, donné par :

$$\widehat{\xi}(x) = \frac{d}{dt}\big(exp(t\xi)x\big)_{t=0}.$$

Ainsi, $\widehat{\xi}(x) = d\psi_x\big(\xi(e)\big)$, où, comme ci-dessus, $\psi_x(g) = g.x$. Remarquons que, sur les ouverts où ces opérations sont définis, on a $\psi_x \circ R_h = \psi_{h.x}$, et donc, pour tout champ de vecteurs $\xi \in g$ invariant à droite, on a, partout où cela a un sens, une application linéaire ρ de $\mathfrak{g}$ vers l'espace des champs de vecteurs sur U :

$$\rho(\xi) := \widehat{\xi}(g.x) = d\psi_{g.x}\big(\xi(e)\big) = d\psi_x \circ R_g\big(\xi(e)\big) = d\psi_x\big(\xi(g)\big).$$

Or, la différentielle de ψ_x préserve les crochets de Lie, ce qui assure que ρ est un morphisme d'algèbres de Lie. Les champs de vecteurs résultants de cette opération forment alors une algèbre de Lie de dimension finie de champs de vecteurs sur U, qui de plus satisfont les même relations de structures que ceux de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ des champs de vecteurs invariants à droite de G.

Par construction, pour tout élément x de U, le sous-espace vectoriel de T_xU engendré par les $\big(\widehat{\xi}(x)\big)_{\xi\in\mathfrak{g}}$ est l'espace tangent à l'orbite $O(x)$. En effet, dans un voisinage ouvert de l'identité assez restreint, ψ_x est un paramètrage de $O(x)$, et donc l'espace tangent à $O(x)$ est $Im\big((d\psi_x)_e\big)$. En particulier, G est localement transitif en x si et seulement si $T_xU = Im\big((d\psi_x)_e\big)$.

De plus, on remarque que G est localement fidèle si et seulement si ρ est injective.

Comme tout élément de G est produit fini d'exponentielles de vecteurs de $\mathfrak{g}$, on peut obtenir n'importe quelle transformation du groupe à partir de composition de flots des générateurs infinitésimaux.

Maintenant, si M est une sous-variété de U, et si $\widehat{\xi}$ est un générateur infinitésimal de G, on remarque que si $\widehat{\xi}$ est tangent à M en tout point de M, c'est-à-dire si pour tout élément x de M, $\widehat{\xi}(x) \in T_xM$, alors on peut restreindre $\widehat{\xi}$ à M, créant ainsi un champ de vecteurs sur M. Mais alors le flot $\big(exp(t\widehat{\xi})\big)_{t\in\mathbb{R}}$ se resteint également à M. Et donc, dès que $x \in M$ et que $exp(t\widehat{\xi})x$ est défini, $exp(t\widehat{\xi})x$ est encore un élément de M : M est invariant sous l'action du flot $\big(exp(t\widehat{\xi})\big)_{t\in\mathbb{R}}$.

Mais, si G est connexe, comme tout élément de G est produit fini d'exponentielles de vecteurs de $\mathfrak{g}$, on peut obtenir n'importe quelle transformation du groupe à partir de compositions de flots des générateurs infinitésimaux.

Ce raisonnement démontre le théorème crucial suivant, qui est le fondement de la symétrie infinitésimale :

Théorème 7 : *Si G est un groupe local connexe de transformations agissant sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, et si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, alors M est localement invariante sous l'action de G si et seulement si, en tout point x de M, et pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$:*

$$\widehat{\xi}(x) \in T_xM.$$

En particulier, si est M est définie par un système régulier d'équations $F_i(x) = cst, i = 1 \dots n$, c'est-à-dire par la préimage d'un point par une submersion, alors G est symétrie de M si et seulement si, pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, pour tout $i = 1, \dots n$, on a :

$$F_i(x) = 0 \implies \widehat{\xi}(F_i)(x) = 0.$$

Une fois ces outils de symétrie infinitésimale introduits, nous nous atteler à la construction des espaces appropriés à leur utilisation pour l'étude des équations différentielles.

III - Espaces de jets

Nous avons introduit dans le chapitre précédent les outils de base pour l'étude des groupes de transformations. Toutefois, afin de les utiliser lors de la recherche des symétries d'équations différentielles, il est nécessaire de se placer dans un cadre géométrique approprié. Ce cadre est fourni par les *espaces de jets*.

Action d'un groupe de transformations sur les fonctions. Soit $X = \mathbb{R}^p$ (respectivement $U = \mathbb{R}^q$) muni des coordonnées canoniques $x = (x^1, \dots, x^p)$ (respectivement $u = (u^1, \dots, u^q)$). Le cadre naturel pour travailler sur des applications de X dans U est l'*espace total* $E := X \times U$. Dans ce contexte, les variables $x^1 \dots, x^p$ seront appelées *variables indépendantes*, et $u^1, \dots, u^q$, *variables dépendantes*.

Le *graphe* d'une application $u = f(x)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est la partie

$$\Gamma_f := \Big\{ \big(x, f(x)\big),\ x \in X \Big\} \subseteq E \ ;$$

c'est une sous variété de E de dimension p.

Bien évidemment, la réciproque est, en général, fausse : une sous-variété N de E de dimension p n'est pas forcément le graphe d'une application de classe $\mathcal{C}^\infty$; en effet, globalement, il est nécessaire qu'elle rencontre chaque $\{x\} \times U$ exactement une fois, et localement, elle doit être *transverse*, c'est-à-dire que son espace tangent ne doit jamais contenir de directions *verticales* : pour tout $z \in N$, $T_zE = T_zX + T_zN$. Le théorème des fonctions implicites montre que ces conditions sont en fait suffisantes :

Théorème 8 : *Les points d'une sous-variété se dimension p au voisinage desquels elle coïncide avec le graphe d'une fonction $u = f(x)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sont exactement les points où elle est transverse.*

Soit G désigne un groupe de transformations de E. Ses éléments agissent sur E par difféomorphismes locaux :

$$(\bar{x}, \bar{u}) = g.(x, u) := \big(\chi(x, u), \psi(x, u)\big).$$

On dira que G *préserve les fibres* si les transformations des variables indépendantes ne dépendent pas des variables dépendantes, autrement dit si χ ne dépend que de x :

$$(\bar{x}, \bar{u}) = g.(x, u) := \big(\chi(x), \psi(x, u)\big).$$

On définit une action de G sur les applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ en considérant son action sur leur graphe. Autrement dit, si f est une telle application, si $g \in G$, alors le graphe de $\bar{f} := g.f$ est

$$\Gamma_{\bar{f}} = \Big\{ \big(\bar{x}, \bar{f}(\bar{x})\big) \Big\} := g.\Gamma_f = \Big\{ g.\big(x, f(x)\big), x \in X \Big\}.$$

En toute généralité, $\bar{f}$ peut ne pas être définie, car le graphe transformé peut ne pas être le graphe d'une application. Cependant, la transversalité sera conservée si l'élément g est suffisamment proche de l'identité, et si le domaine de f est compact. De plus, si G préserve les fibres, alors $\bar{x} = \chi(x)$ est un difféomorphisme local, et par conséquent $\bar{f}$ est toujours bien définie dans ce cas, et est donnée par

$$\bar{u} = \bar{f}(\bar{x}) := \psi\left(\chi^{-1}(\bar{x}), f(\chi^{-1}(\bar{x}))\right).$$

Construction de l'espace des jets. A ce stade, une remarque s'impose : force est de constater que, bien que nous ayons défini une action de G sur les applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de X dans U, nous ne contrôlons pas vraiment ce qu'il advient des *dérivées* de ces applications, ce qui est très gênant dans la mesure où nous nous intéressons au problème de la recherche du groupe de symétries d'un systèmes d'équations *différentielles*. Afin de pallier cet inconvénient, une solution naturelle s'offre à nous : les *espaces de jets*.

Un *espace de jets* n'est en effet ni plus ni moins que l'espace E dont on a agrandi la composante U en y adjoignant des coordonnées correspondant aux dérivées partielles. Concrètement, on appelle *n-ième espace de jets* l'espace J^nE constitué du produit cartésien de l'espace des variables dépendantes X et de copies de l'espace des variables dépendantes U en nombre suffisant pour incorporer des coordonnées pour chaque dérivée partielle d'ordre inférieur ou égal à n :

$$J^nE := X \times U^{(n)} := X \times \underbrace{U \times \cdots \times U}_{\binom{p+n}{n} \text{ fois}} ,$$

puisqu'une application $u = f(x)$ de X dans U de classe $\mathcal{C}^\infty$ admet $\binom{p+n}{p}$ dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à n. Le produit $U^{(n)} = U^{\binom{p+n}{n}}$ est naturellement indexé par les multiindices $J = (j_1, \ldots, j_k)$ d'ordre $k = \#J \leqslant n$ à l'ordre près. Ainsi, un point générique de J^nE admet des coordonnées de forme $(x, u^{(n)})$, où $u^{(n)} = (u_J^\alpha)_{0 \leqslant \#J \leqslant n}^{1 \leqslant \alpha \leqslant q}$ sont les coordonnées des variables dépendantes et de leurs dérivées.

Si $u = f(x)$ est une application de X dans U de classe $\mathcal{C}^\infty$, il est alors naturel de considérer le *n-ième prolongement* $f^{(n)}$ de f, qui est bien entendu l'application $u^{(n)} = f^{(n)}(x)$ de X dans $U^{(n)}$ définie comme étant l'évaluation de f ainsi que de ses dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à n. Autrement dit, les fonctions-coordonnées de $f^{(n)}$ sont les $u_J^\alpha = \partial_J f^\alpha(x)$, et en particulier, $f^{(0)} = f$. Le graphe de $f^{(n)}$ est alors une sous-variété de dimension p de l'espace J^nE, que nous noterons $\Gamma_f^{(n)} := \Gamma_{f^{(n)}}$.

Un groupe G de transformations de E voit son action naturellement prolongée à J^nE comme suit. Si $z_0 = (x_0, u_0^{(n)}) \in J^nE$ et si $g \in G$, on choisit une application $u = f(x)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie au voisinage de x_0 et dont le n-ième prolongement coïncide en x_0 avec $u_0^{(n)}$, autrement dit telle que $z_0 = \big(x_0, f^{(n)}(x_0)\big)$ - par exemple, un polynôme de Taylor - et on pose $\bar{z}_0 = \big(\bar{x}_0, \bar{u}_0^{(n)}\big) = g^{(n)}.z_0 := \big(\bar{x}_0, \bar{f}(\bar{x}_0)\big)$, c'est-à-dire qu'on calcule $\bar{u}_0^{(n)}$ en évaluant le n-ième prolongement de $\bar{f} = g.f$ en $\bar{x}_0$, sous réserve de définition. Ainsi, la transformation prolongée $g^{(n)}$ envoie le graphe $\Gamma_f^{(n)}$ du n-ième prolongement d'une application $u = f(x)$ sur le graphe du n-ième prolongement de son image $\bar{f} = g.f$:

$$g^{(n)}.\Gamma_f^{(n)} = \Gamma_{g.f}^{(n)} ,$$

tout simplement. Bien évidemment, cette construction est licite, dans la mesure où elle ne dépend pas de l'application f choisie.

Comme le prolongement des transformations est bien entendu compatible avec la composition de celles-ci, à savoir pour tous g, $h \in G$, $(g \circ h)^{(n)} = g^{(n)} \circ h^{(n)}$, nous pouvons définir le *groupe prolongé* $G^{(n)}$ constitué des transformations prolongées $g^{(n)}$, qui est donc muni d'une action naturelle sur J^nE. Il convient toutefois de faire preuve d'un minimum de prudence, car, en général, les transformations du groupe prolongé $G^{(n)}$ ne sont que des transformations locales, même si l'action initiale de G était définie globalement.

Armés des espaces de jets, nous pouvons donc surveiller le devenir des dérivées lors d'une transformation ; toutefois, nous manquons encore d'outils de calcul réellement performants.

Dérivées totales. On appelle *fonction différentielle d'ordre* n toute application de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur un ouvert du n-ième espace de jets J^nE et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notons qu'une fonction différentielle d'ordre n peut être vue comme une fonction différentielle d'ordre n' pour tous $n' \geqslant n$, c'est pourquoi il est d'usage de choisir n le plus petit possible.

Une *équation différentielle d'ordre* n n'est alors autre qu'une équation de forme $\Phi = 0$, où Φ est une fonction différentielle d'ordre n. Par exemple, l'équation de Laplace dans le plan est l'équation différentielle associée à la fonction différentielle d'ordre deux $\Delta(x, u^{(2)}) = u_{xx} + u_{yy}$ définie sur J^2E tout entier, où $E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ est muni des coordonnées (x, y, u).

Si Φ est une fonction différentielle d'ordre n, on appelle *dérivée totale de* Φ *par rapport à* x^i, et on note $D_{x^i}\Phi$ ou $D_i\Phi$, l'unique fonction différentielle d'ordre $n+1$ vérifiant

$$D_i\Phi\big(x, f^{(n+1)}(x)\big) \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} F\big(x, f^{(n)}(x)\big)$$

pour toute application $u = f(x)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

La dérivée totale par rapport à x^i est donc la fonction différentielle d'ordre un sur l'espace des jets, vu pour l'occasion comme un espace E, qui est définie par

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_J u^\alpha_{J,i} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J}$$

où $u^\alpha_{J,i} = D_i u^\alpha_J = u^\alpha_{j_1 \cdots j_k i}$, et où la somme interne porte sur tous les multiindices J de toutes les tailles, à l'ordre près. Bien qu'apparemment infinie, cette somme ne comporte en fait jamais qu'un nombre fini de termes non nuls, à savoir ceux indexés par les multiindices d'ordre inférieur ou égal à l'ordre de la fonction différentielle Φ à laquelle D_i est appliquée.

On définit naturellement les dérivées totales d'ordre supérieur de la façon suivante :

$$D_J = D_{j_1} \circ \cdots \circ D_{j_k}$$

pour tous multiindices $J = (j_1, \ldots, j_k)$.

Les dérivées totales sont le premier des ingrédients destinés à faciliter les calculs que nous vous avions promis. La seconde friandise se trouve du côté des générateurs infinitésimaux.

Prolongement des champs de vecteurs. Un champ de vecteurs sur E est de la forme :

$$\xi(x, u) = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} ,$$

où les ξ^i et φ^α sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Un tel champ engendre un groupe de transformations de E à un paramètre, à savoir son flot $exp(t\xi)$. Nous allons bien évidemment nous intéresser au prolongement de ce groupe.

On appelle *n-ième prolongement du champ de vecteurs* ξ le champ de vecteurs $\xi^{(n)}$ sur l'espace des jets J^nE dont le flot est le n-ième prolongement du flot de ξ. Il s'agit donc du générateur infinitésimal du groupe à un paramètre prolongé $exp(t\xi)^{(n)}$, et en tant que tel, il caractérisé par l'identité

$$\xi^{(n)}(x,u^{(n)}) = \frac{d}{dt}\, exp(t\xi)^{(n)} \cdot (x,u^{(n)})\Big|_{t=0} .$$

Afin d'en déduire une formule explicite permettant le calcul de ce fameux n-ième prolongement $\xi^{(n)}$, il est préférable d'introduire un dernier outil : appelons *caractéristique* du champ de vecteurs

$$\xi(x,u) = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

le q-tuple de fonctions différentielles du premier ordre $Q = (Q^1,\ldots,Q^q)$ définies par

$$Q^\alpha(x,u^{(1)}) = \varphi^\alpha(x,u) - \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}(x,u) , \qquad \alpha = 1,\ldots,q .$$

Nous sommes alors enfin en mesure de calculer le n-ième prolongement d'un champ de vecteurs.

Théorème 9 : *Soit un champ de vecteurs sur E*

$$\xi(x,u) = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} ,$$

et soit $Q = (Q^1,\ldots,Q^q)$ sa caractéristique. Le n-ième prolongement de ξ est

$$\xi^{(n)}(x,u^{(n)}) = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\#J=k} \varphi_J^\alpha(x,u^{(k)})\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}$$

où

$$\varphi_J^\alpha = D_J Q^\alpha + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{J,i}^\alpha .$$

De plus, les coefficients φ_J^α peuvent être calculés récursivement à l'aide de la formule

$$\varphi_{J,i}^\alpha = D_i\varphi_J^\alpha - \sum_{j=1}^{p} \big(D_i\xi^j\big)u_{J,j}^\alpha ;$$

en particulier, les coefficients du premier prolongement $\xi^{(1)}$ sont immédiatement disponibles, grâce à

$$\varphi_i^\alpha = D_i\varphi^\alpha - \sum_{j=1}^{p} \big(D_i\xi^j\big)u_j^\alpha .$$

Rappelons que la notation J,i signifie l'adjonction d'un indice supplémentaire valant i au multiindice J.

Il existe une autre approche permettant le calcul du prolongement de ξ. Introduisons le *champ évolutif*

$$\xi_Q := \sum_{\alpha=1}^{q} Q^\alpha(x,u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u^\alpha} ,$$

où Q désigne la caractérisitque de ξ. C'est un exemple de champ de vecteurs, dit de *Lie-Bäcklund*, qui ne dépend plus seulement des variables indépendantes et dépendantes, mais également de leurs dérivées, et qui par conséquent ne définit pas de flot sur l'espace E. Considérons son n-ième prolongement formel

$$\xi_Q^{(n)} := \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_J D_J Q^\alpha(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} ,$$

dont l'intérêt principal réside dans le résultat suivant :

Proposition : *Le n-ième prolongement de ξ s'écrit*

$$\xi^{(n)} = \xi_Q^{(n)} + \sum_{i=1}^{p} \xi^i D_i .$$

Prolongement des algèbres de Lie. Puisque le prolongement est compatible avec la composition, la formule

$$exp(t\xi)exp(t\eta)exp(-t\xi)exp(-t\eta)\, x = x + \frac{t^2}{2}[\xi, \eta] + O(t^3)$$

que nous avons rencontrée précédemment montre qu'il est également compatible avec le crochet de Lie :

$$[\xi, \eta]^{(n)} = [\xi^{(n)}, \eta^{(n)}] .$$

Par conséquent, le processus de n-ième prolongement est un morphisme d'algèbres de Lie de l'espace des champs de vecteurs sur E vers l'espace des champs de vecteurs prolongés sur J^nE. Ainsi, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, son n-ième prolongement est une algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{(n)}$ de champs de vecteurs sur J^nE, isomorphe à $\mathfrak{g}$, et formée des générateurs infinitésimaux du n-ième prolongement du groupe de transformations associé à $\mathfrak{g}$.

IV - Symétries des équations différentielles

Nous disposons à présent de tous les outils nécessaires à la recherche du groupe des symétries d'un système d'équations aux dérivées partielles, tâche à laquelle nous nous attelons sans plus tarder.

Présentation du cadre. Soit (Δ) un *système d'équations aux dérivées partielles d'ordre n*

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0 , \quad \nu = 1, \ldots, m \quad (\Delta)$$

défini par des fonctions différentielles $\Delta_\nu : J^nE \to \mathbb{R}$ d'ordre n. Nous associons à ce système la partie de J^nE

$$\mathcal{S}_\Delta := \left\{ (x, u^{(n)}) \in J^nE \;\middle|\; \Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0 , \quad \nu = 1, \ldots, m \right\} \subseteq J^nE .$$

En nous plaçant loin des éventuelles singularités, nous pouvons, quitte à diminuer m, supposer que les fonctions différentielles Δ_ν forment un système régulier. La partie $\mathcal{S}_\Delta$ est alors une sous-variété de J^nE de dimension $p + q\binom{p+n}{n} - r$, où r désigne le rang du système (Δ). Nous supposons également que la première projection $\pi_X : J^nE \to X$ envoie $\mathcal{S}_\Delta$ sur un ouvert de X, car le contraire signifierait que le système (Δ) impose des contraintes sur les variables indépendantes.

Nous dirons naturellement qu'une application $u = f(x)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est une solution de notre système (Δ) si et seulement si son n-ième prolongement $u^{(n)} = f^{(n)}(x)$ satisfait (Δ), autrement dit si $\Delta_\nu\big(x, f^{(n)}(x)\big) \equiv 0$, ce qui revient encore à exiger que son graphe soit inclus dans $\mathcal{S}_\Delta$. Nous appellerons alors *symétrie du système* (Δ) toute transformation g envoyant toute solution sur une solution : pour toute solution $u = f(x)$ de (Δ), dès que $\bar{f} = g.f$ est définie, $\bar{u} = \bar{f}(\bar{x})$ est aussi solution de (Δ). De cette définition découle immédiatement une reformulation géométrique intéressante, à savoir :

Proposition 10 : *Si le n-ième prolongement $g^{(n)} : J^nE \to J^nE$ d'une transformation $g : E \to E$ stabilise $\mathcal{S}_\Delta$, alors g est une symétrie du système (Δ).*

Preuve : En effet, $u = f(x)$ est solution de (Δ) si et seulement si son graphe prolongé $\Gamma_f^{(n)}$ est inclus dans $\mathcal{S}_\Delta$; mais, puisque le graphe prolongé de $g.f$ est $\Gamma_{g.f}^{(n)} = g^{(n)}.\Gamma_f^{(n)}$, la stabilité de $\mathcal{S}_\Delta$ par $g^{(n)}$ entraîne directement l'inclusion de $\Gamma_{g.f}^{(n)}$ dans $\mathcal{S}_\Delta$, ce qui implique que $g.f$ est également solution de (Δ). □

De manière surprenante, il se trouve que la réciproque de cette proposition est fausse ; en effet, il peut malheureusement exister des points de $\mathcal{S}_\Delta$ par lesquels ne passe le graphe d'aucune solution prolongée. Afin de nous prémunir de ce regrettable inconvénient, nous nommerons *localement résoluble* un système d'équations aux dérivées partielles (Δ) si, pour tout point $z_0 = (x_0, u_0^{(n)}) \in \mathcal{S}_\Delta$, il existe une solution $u = f(x)$ de (Δ) au voisinage de x_0 satisfaisant ces conditions initiales : $f^{(n)}(x_0) = u_0^{(n)}$. Nous pouvons alors énoncer le

Théorème 10 : *Soit (Δ) un système d'équations aux dérivées partielles localement résoluble. Une transformation $g : E \to E$ est une symétrie de (Δ) si et seulement si son prolongement stabilise $\mathcal{S}_\Delta$.*

Preuve : Supposons que g soit une symétrie de (Δ). Etant donné un point $z_0 = (x_0, u_0^{(n)})$ de $\mathcal{S}_\Delta$ tel que $\bar{z}_0 = g.z_0$ soit défini, nous pouvons, par hypothèse de résolubilité locale, trouver une solution $u = f(x)$ définie au voisinage de x_0 et telle que $u_0^{(n)} = f^{(n)}(x_0)$. Alors $\bar{f} = g.f$ est une solution au voisinage de $\bar{x}_0$, si bien que $\bar{z}_0 = \big(\bar{x}_0, \bar{f}(\bar{x}_0)\big) \in \mathcal{S}_\Delta$, comme voulu. Le sens réciproque a fait l'objet de la proposition précédente. □

Méthode de recherche. Nous sommes maintenant prêts à calculer le groupe des symétries de (Δ). Nous le supposerons connexe ; si toutefois il ne l'était pas, nous trouverions sa composante neutre.

Notre méthode de calcul du groupe des symétries de (Δ) est basée sur les générateurs infinitésimaux. En termes d'algèbre de Lie, le théorème précédent devient :

Théorème 11 (*Critère infinitésimal de symétrie*) : *Un groupe connexe G est un groupe de symétries d'un système d'équations aux dérivées partielles régulier localement résoluble (Δ) si et seulement si les conditions*

$$\xi^{(n)}(\Delta_\nu) \equiv 0, \quad \nu = 1, \dots m \ ,$$

sont vérifiées par tous les générateurs infinitésimaux $\xi \in \mathfrak{g}$ de G dès que (Δ) est satisfait.

A partir de là, la route menant au groupe de symétries de (Δ) est toute tracée : il suffit de considérer un champ de vecteurs générique ξ sur E, de calculer formellement son n-ième prolongement, et d'appliquer le critère précédent. On obtient alors un système d'équations différentielles portant sur les coefficients de ξ qui, une fois résolu, nous fournit l'expression des générateurs infinitésimaux du groupe de symétries de (Δ). Etayons ce propos par un exemple.

Illustration : l'équation de la chaleur. Un exemple digne d'intérêt est le cas de l'équation de la chaleur, en version unidimensionnelle pour simplifier :

$$u_t = u_{xx} \quad (\Delta) \ .$$

Nous avons ici deux variables indépendantes, à savoir x (l'espace) et t (le temps), et une variable dépendante u (la température). Ainsi, $p = 2$ donc $X = \mathbb{R}^2$, et $q = 1$ donc $U = \mathbb{R}$, si bien que $E = X \times U = \mathbb{R}^3$. De plus, comme (Δ) est un système différentiel d'ordre 2, nous nous intéresserons aux deuxièmes prolongements : $n = 2$.

Soit G le groupe des symétries de (Δ), que nous cherchons à déterminer, et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

Un champ de vecteurs quelconque η sur E s'écrit

$$\eta(x,t,u) = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u} \ .$$

Ce champ de vecteurs engendrera une symétrie de (Δ) si et seulement s'il vérifie le critére infinitésimal de symétrie :

$$\eta \in \mathfrak{g} \qquad \text{si et seulement si} \qquad \varphi^t = \varphi^{xx} \text{ dès que } u_t = u_{xx} \ ,$$

où φ^t et φ^{xx} sont les coefficients des termes $\frac{\partial}{\partial u_t}$ et $\frac{\partial}{\partial u_{xx}}$ du deuxième prolongement de η

$$\eta^{(2)} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \varphi\frac{\partial}{\partial u} + \varphi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varphi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \varphi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} \ .$$

Calculons donc $\eta^{(2)}$. Comme la caractéristique de η est

$$Q = \varphi - \xi u_x - \tau u_t \ ,$$

les formules de la partie précédente affirment notamment que

$$\varphi^t = D_t Q + \xi u_{xt} + \tau u_{tt} = \varphi_t - \xi_t u_x + (\varphi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2$$

et

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{xx} & = & D_x^2 Q + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} \\ & = & \varphi_{xx} + (2\,\varphi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\varphi_{uu} - 2\,\xi_{xu})u_x^2 \\ & & -\,2\,\tau_{xu}u_x u_t - \xi_{uu}u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2 u_t + (\varphi_u - 2\,\xi_x)u_{xx} \\ & & -\,2\,\tau_x u_{xt} - 3\,\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\,\tau_u u_x u_{xt} \end{array} \ .$$

Le critère infinitésimal de symétrie revêt alors la forme d'une équation polynomiale en les dérivées de u, dont les coefficients sont formés de ξ, τ, φ et de leurs dérivées. Mais comme ξ, τ et φ ne dépendent que de x, t et u, lesdits coefficients sont forcément tous nuls, d'où le *système d'équations déterminantes*

Équation			Monôme
0	$=$	$-2\tau_u$	$u_x u_{xt}$
0	$=$	$-2\tau_x$	u_{xt}
0	$=$	$-\tau_{uu}$	$u_x^2 u_{xx}$
$-\xi_u$	$=$	$-2\tau_{xu} - 3\xi_u$	$u_x u_{xx}$
$\varphi_u - \tau_t$	$=$	$\tau_{xx} + \varphi_u - 2\xi_x$	u_{xx}
0	$=$	$-\xi_{uu}$	u_x^3
0	$=$	$\varphi_{uu} - 2\xi_{xu}$	u_x^2
$-\xi_t$	$=$	$2\varphi_{xu} - \xi_{xx}$	u_x
φ_t	$=$	φ_{xx}	1

dont les solutions sont, facilement,

$$\xi = \lambda_1 + \lambda_4 x + 2\lambda_5 t + 4\lambda_6 xt \,, \quad \tau = \lambda_2 + 2\lambda_4 t + 4\lambda_6 t \,,$$

$$\varphi = (\lambda_3 - \lambda_5 x - 2\lambda_6 t - \lambda_6 x^2) u + \theta(x,t) \,,$$

où les λ_i sont des constantes réelles quelconques et où θ est une solution quelconque de l'équation de la chaleur, $\theta_t = \theta_{xx}$.

Par conséquent, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de l'équation de la chaleur est l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs

$$\eta_1 = \frac{\partial}{\partial x} \,, \quad \eta_2 = \frac{\partial}{\partial t} \,, \quad \eta_3 = u \frac{\partial}{\partial u} \,, \quad \eta_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} \,,$$

$$\eta_5 = 2t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u} \,, \quad \eta_6 = 4xt \frac{\partial}{\partial x} + 4t^2 \frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t) u \frac{\partial}{\partial u} \,, \text{ et}$$

$$\eta_\theta = \theta(x,t) \frac{\partial}{\partial u} \,, \quad \text{où} \quad \theta_t = \theta_{xx} \,.$$

Les groupes à un paramètre correspondants sont, respectivement, les translations en x, les translations en t, les homothéties en u, les homothéties composites $(x,t) \mapsto (\lambda x, \lambda^2 t)$, les transformations galiléennes $(x,t,u) \mapsto (x + 2\lambda t, t, e^{-\lambda x - \lambda^2 t} u)$, des "symétries inversantes"

$$(x,t,u) \mapsto \left(\frac{x}{1 - 4\lambda t} \,, \frac{t}{1 - 4\lambda t} \,, \sqrt{1 - 4\lambda t} \, \exp\left(\frac{-\lambda x^2}{1 - 4\lambda t} \right) u \right) \,,$$

où λ est le paramètre du groupe, et la superposition des solutions, provenant de la linéarité de l'équation de la chaleur.

A titre illustratif, jouons un peu avec notre groupe de symétries. En appliquant une symétrie inversante à une solution triviale $\theta(x,t) \equiv \theta_0$, nous obtenons les solutions non-triviales

$$u = \frac{\theta_0}{\sqrt{1 + 4\lambda t}} \exp\left(\frac{-\lambda x^2}{1 + 4\lambda t} \right) \,.$$

En prenant $\theta_0 = \sqrt{\lambda/\pi}$, ce qui revient à faire agir le groupe à un paramètre de générateur infinitésimal η_3, puis en translatant en temps grâce à η_2, nous tombons sur la *solution fondamentale de l'équation de la chaleur*

$$\Theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t} \right) \,,$$

de laquelle se déduisent les solutions de *l'équation de la chaleur avec second membre*

$$u_t - u_{xx} = s(x,t)$$

en convoluant Θ par le terme de source $s(x,t)$.

V - Classification des algèbres de Lie de champs de vecteurs

Nous allons maintenant ébaucher la démonstration donnée par Lie et Engel de la classification des algèbres de Lie de dimension finie de champs de vecteurs sur la droite et sur le plan. Commençons par donner le cadre général de la démonstration.

Position du problème. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, toute algèbre de Lie de dimension finie r de champs de vecteurs sur une variété caractérise un groupe local connexe de transformations de dimension r. Notre but est de classifier, localement, loin des singularités et à biholomorphisme près, toutes ces algèbres de Lie de champs de vecteurs analytiques sur un espace vectoriel complexe à une ou deux dimensions, et de donner un représentant de chaque classe d'algèbre ayant la forme la plus simple possible. Nous l'appellerons la *forme normale locale* de l'algèbre de Lie. Un premier exemple d'une telle classification est celui d'une algèbre de Lie de dimension 1, c'est-à-dire engendrée par un seul champ de vecteurs. Le théorème 1 indique qu'à biholomorphisme près, localement, ce champ peut s'écrire comme un champ de vecteurs constant.

Comme la classification reste purement locale, on se restreindra à un voisinage ouvert de l'identité de l'espace sur lequel agit le groupe. Etant donné que l'on aura souvent besoin de réduire ce voisinage, par exemple pour se placer dans une carte feuilletée, nous ne lui donnerons pas de nom. Quand nous aurons besoin d'utiliser des biholomorphismes locaux pour donner une forme plus simple à l'objet de notre étude, nous le préciserons rapidement, sans nous attarder sur les détails.

On supposera de plus que toutes les transformations et tous les champs de vecteurs sont analytiques complexes. On suppose aussi que le point au voisinage duquel on travaille est régulier pour le groupe de transformations, c'est-à-dire que la dimension de l'orbite de ce point est de dimension maximale. Ce dernier axiome ne réduit pas réellement la généralité, car les sous-ensembles où l'orbite est de dimension inférieure sont caractérisés par l'annulation de fonctions analytiques non constantes, et sont donc des fermés d'intérieur vide. En effet, la dimension de l'orbite d'un point x est égale à la dimension du sous-espace de l'espace tangent en x engendré par les générateurs infinitésimaux du groupe, qui est caractérisé par l'ordre à partir duquel les déterminants extraits des générateurs infinitésimaux s'annulent. On suppose enfin que l'action est fidèle.

En résumé, on travaille loin des singularités, on s'autorise un nombre fini de changements de cartes par difféomorphismes analytiques, et on suppose l'analyticité de tous les objets qui apparaîtront dans la démonstration.

On tente alors de classifier les action de groupes locaux de transformation à biholomorphisme près. On dira que l'action d'un groupe de transformations est *équivalente* à celle d'un autre s'il existe un biholomorphisme qui envoie les générateurs infinitésimaux du premiers sur ceux du second.

On définit également l'*ordre* en un point x d'un champ de vecteurs analytique ξ au voisinage de x comme la plus petite puissance apparaissant dans le développement en série entière de ξ en x.

Nous pouvons maintenant nous attaquer à la classification des algèbres de Lie sur la droite complexe.

Algèbres de Lie de champs de vecteurs analytiques sur $\mathbb{C}$. On se place donc dans un voisinage de 0 de la droite complexe, muni de la coordonnée $x \in \mathbb{C}$. On notera $p = \frac{\partial}{\partial x}$ afin d'alléger les notations. Soit G un groupe local de transformations à r paramètres agissant fidèlement sur notre voisinage. Il existe alors $X_1 = \xi_1(x)p, \dots, X_r = \xi_r(x)p$ des champs de vecteurs analytiques, linéairement indépendants, constituant une base de générateurs infinitésimaux de G. La régularité implique qu'au moins un de ces champs de vecteurs ne s'annule pas en 0. On peut supposer que c'est X_1. Plutôt que de donner directement la classification, nous préférons donner d'abord les différentes étapes du raisonnement, car la démonstration en dimension 2 utilisera des méthodes similaires. On a tout d'abord besoin du lemme technique suivant :

Lemme 13 : Soient ξ et η des champs de vecteurs analytiques sur $\mathbb{C}$, d'ordre respectifs k et l en 0. Alors $[\xi, \eta]$ est d'ordre supérieur ou égal à $k+l-1$. De plus, si $k \neq l$, $[\xi, \eta]$ est d'ordre exactement $k+l-1$.

Preuve : Comme
$$\left[x^k \frac{\partial}{\partial x}, x^l \frac{\partial}{\partial x}\right] = (l-k)x^{(k+l-1)}\frac{\partial}{\partial x_j},$$
la conclusion vient simplement du développement par bilinéarité du crochet de ξ et η. □

Passons maintenant à la suite de la preuve :

Lemme 14 : Il existe une base de générateurs infinitésimaux de G, encore notés $X_1, \ldots, X_r$, qui sont d'ordres respectifs $0, 1, \ldots, r-1$.

Preuve : Après dilatation, $X_1 = p + \cdots$, où le reste est en $O(x)$. En prenant comme nouveaux champs de vecteurs X_i les champs
$$X_i - \xi_i(0)X_1 \qquad {\scriptstyle (i=1\ldots n)},$$
on conserve une base de générateurs infinitésimaux de G, dont seul X_1 est d'ordre 0. Quitte à réordonner les champs de vecteurs et à les diviser par leur premier coefficient non nul, on peut prendre X_2 comme étant celui d'ordre minimal s_2 : $X_2(x) = x^{s_2}p + \ldots$ où le reste est d'ordre supérieur. En itérant ce processus, on peut trouver une nouvelle base de générateurs, toujours notés $X_1, \ldots, X_r$, d'ordres strictement croissant $0 = s_1 < s_2 < \cdots < s_r$.

On va montrer en raisonnant par l'absurde que $s_2 = 1, s_3 = 2, \ldots, s_r = r-1$.

Supposons tout d'abord que s_2 soit strictement plus grand que 1. Alors par notre Lemme 13, le crochet $[X_1, X_2]$ serait d'ordre exactement égal à $s_2 - 1$, et comme ce crochet doit nécessairement appartenir à l'algèbre de Lie des générateurs infinitésimaux de G, on doit avoir :
$$[X_1, X_2] = a_2X_2 + \cdots + a_rX_r, \qquad a_i \in \mathbb{C},$$
où le champ X_1, d'ordre 0, ne peut apparaître car $s_2 - 1 \geqslant 1$. L'ordre du membre de gauche est $s_2 - 1$, celui du membre de droite est $\geqslant s_2$, d'où contradiction, donc $s_2 = 1$.

De manière analogue, si s_3 était supérieur ou égal à 3, par le même raisonnement :
$$[X_1, X_3] = b_3X_3 + \cdots + b_rX_r, \qquad b_i \in \mathbb{C},$$
et la comparaison des ordres implique $s_3 = 3$.

Par récurrence, on a bien montré qu'il existe une base $X_1, X_2, \ldots, X_r$ de générateurs infinitésimaux de G d'ordres respectifs $0, 1, \ldots, r-1$. □

En particulier, il découle du lemme 13 que les générateurs infinitésimaux d'un groupe G à r paramètres agissant sur la droite sont tous d'ordre au plus $r-1$. A présent que nous disposons d'une base échelonnée en ordre, énonçons un résultat étonnant qui constitue la pierre angulaire de la classification en dimension 1 :

Lemme 15 : *L'ordre r du groupe G est au plus égal à trois.*

Preuve : La démonstration est à présent immédiate : d'après le lemme 13, le crochet $[X_{r-1}, X_r]$ d'ordre maximal est d'ordre :
$$(r-1) + (r-2) - 1,$$

nécessairement $\leqslant r-1$, donc r est au plus égal à trois. $\square$

Si $r=1$, le théorème 1 donne à la fois une classification et une forme normale. L'action de G correspond alors à des translations.

Si $r=2$, alors $X_2(x)=xp+\dots$, $[X_1,X_2]=p+\dots$: il existe a coefficient constant complexe tel que $[X_1,X_2]=\xi_1+a\xi_2$. Prenons alors $\widehat{X_1}:=X_1+aX_2$ comme nouveau X_1. On garde ainsi une base comme dans le lemme 13, et telle que $[X_1,X_2]=X_1$. Il suffit alors d'utiliser un biholomorphisme local qui transforme X_1 en p au voisinage de 0. On garde encore les mêmes notations X_1 et X_2 pour les champs de vecteurs images directes. L'image directe par biholomorphisme conservant les crochets de Lie, l'égalité $[X_1,X_2]=X_1$ est conservée et équivaut alors à ce que ξ_2 satisfasse à l'équation $\xi_2'(x)=1$, $\xi_2(0)=0$, et donc $X_2=xp$. Le groupe à deux paramètres $(t_1,t_2)\in\mathbb{C}^2$ correspondant à cette algèbre de Lie est $\psi(x,t_1,t_2)=t_2x+t_1$. On reconnaît ainsi l'ensemble des transformations affines $A_1(\mathbb{C})$.

Si $r=3$, par un raisonnement analogue à celui du cas précédent, on se retrouve avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned}[][X_1,X_2]&=X_1+aX_2+bX_3,\\ [X_1,X_3]&=2X_2+cX_3,\\ [X_2,X_3]&=X_3.\end{aligned}$$

L'identité de Jacobi implique que $a=c$. Introduisons maintenant comme nouveau X_1 le champ de vecteurs $X_1+aX_2+b/2X_3$. On trouve alors

$$[X_1,X_2]=X_1,\qquad [X_1,X_3]=2X_2,\qquad [X_2,X_3]=X_3.$$

Le biholomorphisme qui transforme X_1 en p transforme alors X_2 en xp et X_3 en x^2p. Le groupe à trois paramètres $(t_1,t_2,t_3)\in\mathbb{C}^3$ correspondant à cette algèbre de Lie est

$$\psi(x,t_1,t_2,t_3)=\frac{t_2x+t_1}{t_3x+1}.$$

Il s'agit de l'action locale du groupe $PSL_2(\mathbb{C})$, vue à travers une carte.

Nous pouvons alors enfin énoncer le théorème de forme normale locale d'une action régulière de groupe de Lie, et de ses générateurs infinitésimaux.

Théorème 16 : *Soit G un groupe de Lie à r paramètres agissant régulièrement sur un ouvert de $\mathbb{C}$ par biholomorphismes au voisinage de 0. Alors, r est inférieur ou égal à 3, et, à biholomorphisme local près, une base de ses générateurs infinitésimaux est :*

- *si $r=1$: p, et $G\simeq\mathbb{C}$ est le groupe des translations ;*
- *si $r=2$: p, xp, et $G\simeq A_1(\mathbb{C})$ est le groupe des applications affines ;*
- *si $r=3$: p, xp, x^2p, et G est le groupe projectif $PSL_2(\mathbb{C})$.*

Nous disséquerons plus généralement l'action de $PSL_{n+1}(\mathbb{C})$ sur l'espace $\mathbb{C}^n$ dans le paragraphe suivant.

Les groupes $A_n(\mathbb{C}), SA_n(\mathbb{C})$ et $PSL_{n+1}(\mathbb{C})$. Dans cette section, nous définissons brièvement les actions locales des trois groupes ci-dessus sur un voisinage de $\mathbb{C}^n$ muni des coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$, et donnons sans démonstration leurs générateurs infinitésimaux ainsi que certains autres résultats dont nous aurons besoin par la suite. On note $p_i:=\frac{\partial}{\partial x_i}$ pour plus de simplicité.

On note $A_n(\mathbb{C})\simeq GL_n(\mathbb{C})\ltimes\mathbb{C}^n$ le groupe de Lie $\{(M,a)\in GL_n(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^n\}$, muni de la multiplication $(M,a).(N,b):=(MN,a+Nb)$. C'est bien un groupe de Lie, de dimension $n(n+1)$.

L'algèbre de Lie correspondante $\mathfrak{a}_n(\mathbb{C})$ est identifiée à son espace tangent en l'identité, c'est-à-dire à $M_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n$. De plus, si on note $(E_{i,j})_{i,j=1\dots n}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$ et $(e_k)_{k=1\dots n}$ celle de $\mathbb{C}^n$, et si on note encore $E_{i,j} := (E_{i,j}, 0) \in A_n(\mathbb{C})$, et $e_k = (0, e_k) \in A_n(\mathbb{C})$, alors la famille $\big(E_{i,j}, e_k\big)_{i,j,k=1\dots n}$ forme une base de $\mathfrak{a}_n(\mathbb{C})$. Enfin, l'exponentielle est donnée par :

$$exp\big(t(N,a)\big) = \big(exp(tN), ta\big).$$

L'action de $A_n(\mathbb{C})$ sur un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ est donnée par :

$$(M,a).x = Mx + a.$$

On trouve ainsi comme générateurs infinitésimaux :

$$\begin{aligned}\widehat{e_k}(x) &= \frac{d}{dt}\big((I_n, te_k).x\big)_{t=0} = \frac{d}{dt}(x + te_k)_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(te_k)_{t=0} = p_k \qquad {\scriptstyle (k=1\dots n)},\end{aligned}$$

qui correspondent aux translations, ainsi que :

$$\begin{aligned}\widehat{E_{i,j}} &= \frac{d}{dt}\big((exp(tE_{i,j}, 0).x\big) = \frac{d}{dt}(exp(tE_{i,j}x))_{t=0} \\ &= x_i p_j \qquad {\scriptstyle (i=1\dots n)}, \qquad {\scriptstyle (j=1\dots n)}.\end{aligned}$$

qui correspondent à la multiplication matricielle. Ainsi, Une base de gnérateurs infinitésimaux de $A_n(C^n)$ est donnée par :

$$p_k, \qquad x_i p_j, \qquad {\scriptstyle (i,j,k=1\dots n)}.$$

$SA_n(\mathbb{C})$, quant à lui, est le sous-groupe de $A_n(\mathbb{C})$ constitués des éléments $(N,a) \in SL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n$, où $det(M) = 1$. Un vecteur de son algèbre de Lie $\mathfrak{sa}_n(\mathbb{C})$ est identifié à un couple $(N,a) \in M_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n$ tel que $tr(N) = 0$; cette restriction provenant du fait que l'on doit avoir $det(exp(N)) = 1$. Une base de $\mathfrak{sa}_n(\mathbb{C})$ est donnée par les vecteurs $E_{i,j}, e_k, E_{l,l} - E_{n,n}$, où $i \neq j, = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n$, et $l = 1, \dots, n-1$. Ainsi, $SA_n(\mathbb{C})$ est un groupe de Lie à $n^2 + n - 1$ paramètres, et les générateurs infinitésimaux de son action sont donc :

$$\begin{aligned}&p_i \qquad {\scriptstyle (i=1\dots n)}, \\ &x_i p_j \qquad {\scriptstyle (i\neq j=1\dots n)},\end{aligned}$$

hérités de $A_n(\mathbb{C})$, ainsi que

$$x_i p_i - x_n p_n \qquad {\scriptstyle (i=1\dots n)}.$$

Comme on ne travaille que sur des problèmes locaux, on peut dans notre étude identifier $PSL_{(n+1)}(\mathbb{C})$ à l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{i,j=1,\dots,n+1}$ de $GL_{n+1}(\mathbb{C})$ de la forme :

$$\begin{pmatrix} M' & {}^t a_M \\ b_M & 1 \end{pmatrix}.$$

L'action d'un élément $M = (m_{i,j})_{i,j=1,\dots,n+1} \in PSL_{n+1}(\mathbb{C})$ sur un élément $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ est alors définie par :

$$M.x := \frac{M'x + a_M}{< b_M \mid x > +1}.$$

Les générateurs infinitésimaux sont exactement :

$$p_i, \qquad x_i p_j, \qquad x_i(x_1 + \cdots + x_n)p_j, \qquad {\scriptstyle (i,j=1\dots n)}.$$

La raison pour laquelle nous avons détaillé l'action de ces trois groupes particuliers est qu'ils possèdent une propriété de "rigidité" qui nous sera d'une grande aide lors de la classification en dimension deux.

Groupes équivalents à $A_n(\mathbb{C})$, $SA_n(\mathbb{C})$, et $PSL_{n+1}(\mathbb{C})$. Soit G un groupe local de transformations à r paramètres agissant au voisinage de 0 dans l'espaces des $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. On appelle le *groupe linéarisé* de G, noté $\widehat{G}$, le groupe dont les générateurs infinitésimaux sont les tronqués à l'ordre 1 de ceux de G. Un calcul direct montre qu'il s'agit bien d'un groupe. Une remarque triviale est que les générateurs infinitésimaux de $\widehat{G}$ sont contenus dans ceux de $A_n(\mathbb{C})$.

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant :

Théorème 17 : *Soit G un groupe local de transformations à r paramètres agissant au voisinage de 0 dans l'espace des $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. On suppose de plus que les générateurs infinitésimaux de $\widehat{G}$ sont soit exactement ceux de $SA_n(\mathbb{C})$, soit ceux de $A_n(\mathbb{C})$. Alors, dans le premier cas, l'action de G est localement équivalente à celle de $SA_n(\mathbb{C})$, et dans le deuxième cas, elle est équivalente soit à $A_n(\mathbb{C})$, soit à $PSL_{n+1}(\mathbb{C})$.*

Preuve : La première étape de la démonstration est de trouver l'ordre maximal s des générateurs infinitésimaux de G, et de trouver un générateur infinitésimal d'ordre s d'une forme simple. On va en fait montrer que s est au plus égal à 2.

Nous sauterons dans cette partie certains calculs fastidieux, sans véritable intérêt du point de vue des idées. On sait déjà par hypothèse que s est plus grand que 1. Soit alors un générateur infinitésimal K d'ordre s, on peut écrire :

$$K = Q_1 p_1 + \cdots + Q_n p_n + \cdots ,$$

Où les Q_i sont des polynômes homogènes de degré s, le reste étant d'ordre supérieur. Comme K est d'ordre exactement s, un des Q_i est non nul. Quitte à renuméroter la base canonique, on peut supposer que c'est Q_1. Soit α_1 la plus petite puissance de x_1 apparaissant dans Q_1. Alors, quitte à diviser par un scalaire, Q_1 possède un monôme de la forme :

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \qquad {\scriptstyle (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = s)}.$$

On s'intéresse maintenant au coefficient en p_1 du crochet de K par un générateur infinitésimal de G de la forme $X_i := x_1 p_i + \cdots$, qui existe par hypothèse. La formule :

$$\begin{aligned} &\big[x_1 p_i, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} p_1\big] \\ &= \alpha_i x_1^{\alpha_1+1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_i^{\alpha_i - 1} \cdots x_n^{\alpha_n} p_1 - x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} p_i, \end{aligned}$$

montre que le crochet $[K, X_i]$, diminue de un la puissance en x_i de tous les monômes de Q_1 et augmente de 1 celle en x_1. Ainsi, en prenant α_2 fois le crochet de K par X_2, puis α_3 fois par X_3, etc, jusqu'à α_n fois par X_n, on obtient, après normalisation, un nouveau champ de vecteurs, noté K', de la forme :

$$K'(x) = x_1^s p_1 + \Big(\sum A_{\beta^2} x_1^{\beta_1^2} \cdots x_n^{\beta_n^2}\Big) p_2 + \cdots + \Big(\sum A_{\beta^n} x_1^{\beta_1^n} \cdots x_n^{\beta_n^n}\Big) p_n + \cdots$$

$${\scriptstyle (\beta_1^2 + \cdots + \beta_n^2 = \cdots = \beta_1^n + \cdots + \beta_n^n = s)}.$$

En prenant maintenant le crochet de K' par des générateurs infinitésimaux du type $Y_i := x_1 p_1 - x_i p_i + \cdots$, un long calcul montre que l'on peut obtenir un nouveau générateur infinitésimal K'', de la forme :

$$K''(x) = x_1^s p_1 + B_2 x_1^{s-1} x_2 p_2 + \cdots + B_n x_1^{s-1} x_n p_n + \cdots .$$

Alors si $Z_1 := p_1 + \cdots$ est un générateur infinitésimal de G, et si on note $L := [Z_1, K'']$, on a :

$$L = sx_1^{s-1} + (s-1)B_2x_1^{s-2}x_2p_2 + \cdots + (s-1)B_2x_1^{s-2}x_np_n + \cdots ,$$

Et alors le crochet $[L, K'']$ s'écrit

$$sx_1^{2s-2}p_1 + \eta_2(x)p_2 + \cdots + \eta_n(x)p_n + \cdots ,$$

où les η_i sont des polynomes homogènes de degré $2s-2$. Donc $[L, K'']$ est d'ordre exactement $2s-2$, mais doit être d'ordre au plus s. Donc s est plus petit que 2. Supposons que s vale exactement 2. On commence par donner la forme de tous les générateurs infinitésimaux d'ordre 2. On dispose de K'' de la forme :

$$x_1^2 + A_2x_1x_2p_2 + \cdots + A_2x_1x_np_n + \cdots .$$

Il vient alors, pour $i \neq 1$:

$$\big[x_1p_i + \cdots , K''\big] = (A_i - 1)x_1^2p_i + \cdots$$

Si A_i était différent de 1, on aurait alors successivement les égalités suivantes entre générateurs infinitésimaux :

$$\big[x_1^2p_i + \cdots , x_ip_1 + \cdots\big] = x_1^2p_1 - 2x_1x_ip_i + \cdots ,$$

puis :

$$\big[x_1^2p_1 - 2x_1x_2 + \cdots , x_1^2p_i + \cdots\big] = 4x_1^3p_i + \cdots$$

et on a donc construit une transformation d'ordre 3, d'où la contradiction. Finalement, il vient :

$$K''(x) = x_1(x_1p_1 + \cdots + x_np_n) + \cdots .$$

En prenant alors les crochets $[x_ip_1 + \cdots , K'']$, on obtient toutes les transformations infinitésimales d'ordre deux de la forme :

$$K_i := x_i(x_1p_1 + \cdots + x_np_n) + \cdots , \qquad {\scriptstyle (i=1,\dots,n)}.$$

Jusqu'ici, on a utilisé uniquement l'existence de générateurs infinitésimaux dont la troncature à l'ordre 1 est un générateur infinitésimal de $SA_n(\mathbb{C})$. Mais on va maintenant montrer que si G possède des générateurs infinitésimaux d'ordre 2, alors on est dans le cas où les générateurs infinitésimaux de $\widehat{G}$ coincident avec ceux de $A_n(\mathbb{C})$.

En effet, on dispose dans ce cas des champs de vecteurs K_i définis ci-dessus. En prenant la moyenne arithmétique des transformations infinitésimales suivantes :

$$\big[p_i + \cdots , K_i\big] = x_ip_i + \sum_{k=1}^{n} x_kp_k + \cdots , \qquad {\scriptstyle (i=1,\dots,n)},$$

on obtient comme terme d'ordre 1 la transformation infinitésimale $x_1p_1 + \cdots + x_np_n$ qui n'est manifestement pas un générateur infinitésimal de $SA_n(\mathbb{C})$.

Donc si $\widehat{G}$ s'identifie à $SA_n(\mathbb{C})$, alors G n'a que des transformations d'ordres zéro et un.

On va admettre que tout générateur infinitésimal de G d'ordre deux T est combinaison linéaire des K_i. Cela se démontre en remarquant qu'alors le crochet $[K_i, T]$ est d'ordre au moins trois, et est donc nul. Le reste en découle assez naturellement, mais le calcul ne présente guère d'intérêt.

Résumons ce que nous avons accompli :

Si G est un groupe de transformation tel que la troncature à l'ordre un de ses générateurs infinitésimaux donne exactement les générateurs infinitésimaux de $SA_n(\mathbb{C})$, *alors G est un groupe à n^2+n-1 paramètres, dont une base de générateurs infinitésimaux est de la forme :*

$$p_i + \cdots \qquad {\scriptstyle (i=1\dots n)},$$
$$x_i p_j + \cdots \qquad {\scriptstyle (i\neq j=1\dots n)},$$
$$x_i p_i - x_n p_n + \cdots \qquad {\scriptstyle (i=1\dots n)}.$$

Si cette troncature donne les générateurs infinitésimaux de $A_n\mathbb{C}$, alors :

Soit G ne comprend aucune transformation d'ordre deux, et alors c'est un groupe à n^2+n paramètres, qui admet une base de générateurs infinitésimaux de la forme :

$$p_i + \cdots \qquad {\scriptstyle (i=1\dots n)},$$
$$x_i p_j + \cdots \qquad {\scriptstyle (i,j=1\dots n)},$$

Soit G a des générateurs infinitésimaux d'ordre 2, et c'est alors un groupe à n^2+2n paramètres, admettant une base de générateurs infinitésimaux de la forme :

$$p_i + \cdots\,, \qquad {\scriptstyle (i=1\dots n)},$$
$$x_i p_j + \cdots\,, \qquad {\scriptstyle (i,j=1\dots n)},$$
$$x_i(x_1p_1 + \cdots + x_np_n) + \cdots\,, \qquad {\scriptstyle (i=1\dots n)}.$$

Le reste de la démonstration repose essentiellement sur le même raisonnement que pour la classification en dimension 1 : on modifie un peu la base pour obtenir une algèbre de Lie ayant les mêmes constantes de structures que $SA_n(\mathbb{C})$, $A_n(\mathbb{C})$, ou $PSL_n(\mathbb{C})$ selon les cas. On obtient alors par le Théorème 1 un biholomorphisme qui transforme $p_1+\cdots$ en p_1, et il transformera alors le reste de la base en les générateurs infinitésimaux du groupe affine correspondant. Nous allons le faire uniquement pour le cas le plus simple : lorsque $\widehat{G} = A_n(\mathbb{C})$.

On se place donc dans le cas d'un groupe local de transformations dont les générateurs infinitésimaux admettent une base de la forme :

$$T_{ij} = x_ip_j + \cdots\,, \qquad P_i = p_i + \cdots\,, \qquad {\scriptstyle (i,j=1\dots n)}.$$

Alors le générateur infinitésimal $\big[T_{ij}, T_{kl}\big] = \delta_{jk}x_ip_l + \delta_{il}x_lp_j + \cdots$, où δ_{jk} est le symbole de Kronecker, est d'ordre un. Il est donc combinaison linéaire des T_{ij}. La seule possibilité est alors :

$$\big[T_{ij}, T_{kl}\big] = \delta_{jk}T_{lj} + \delta_{il}T_{jk}.$$

Notons alors $U := \sum_{i=1}^n T_{ii}$. Il vient de la formule ci-dessus que $\big[U, T_{ij}\big] = 0$. Alors $\big[P_i, U\big]$ s'écrit :

$$\big[P_i, U\big] = P_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}T_{jk},$$

ou, plus simplement, en remplaçant P_i par le membre de droite de cette équation :

$$\big[P_i, U\big] = P_i.$$

De plus, on a aussi des relations de la forme :

$$\big[P_i, T_{kj}\big] = \delta_{ik}P_j + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \beta_{lm}T_{lm},$$

$$\big[P_i, P_j\big] = \sum_{k=1}^n \gamma_k P_k + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \epsilon_{lm}T_{lm}.$$

Toutefois, les identités de Jacobi :

$$\big[[P_i, T_{kj}], U\big] - \big[P_i, T_{kj}\big] = 0,$$

et

$$\big[[P_i, P_k], U\big] - 2\big[P_i, P_k\big] = 0,$$

montrent immédiatement que toutes les constantes $\beta,\ \gamma,\ \epsilon$ sont nulles. Finalement, il vient :

$$\big[P_i, T_{kj}\big] = \delta_{ik} P_j, \qquad \big[P_i, P_j\big] = 0,$$

$$\big[T_{ij}, T_{kl}\big] = \delta_{jk} T_{lj} + \delta_{il} T_{jk}.$$

Nous avons ainsi calculé toutes les constantes de structures de notre algèbre de Lie, et celles-ci sont évidemment identiques à celles de $A_n(\mathbb{C})$.

Le théorème de Frobenius assure alors que, quitte à prendre l'image directe de nos générateurs infinitésimaux par un biholomorphisme, on peut prendre les générateurs infinitésimaux P_i chacun identiquement égaux à p_i. Les constantes de structures sont alors conservées.

Dans cette nouvelle carte, on a alors les relations $\big[p_i, U\big] = p_i$, qui impliquent que $U = \sum_{i=1}^n x_i p_i$. On a également que $\big[p_i, T_{kj}\big] = \delta_{ik} p_i$, d'où :

$$T_{kj} = x_k p_j + \sum_{i=1}^n \alpha_{ijk} p_i.$$

Mais comme $\big[T_{jk}, U\big] = 0$, les α_{ijk} sont tous nuls : $T_{jk} = x_j p_k$. On a donc prouvé que les générateurs infinitésimaux de G étaient équivalents à ceux de $A_n(\mathbb{C})$. $\square$

Et voilà un théorème étonnant s'il en est. Sa vraie puissance apparaît lorsque l'on essaie de classifier les actions de groupe en dimension deux.

Classification des actions locales en dimension complexe deux. La démonstration complète est longue, et prend plusieurs dizaines de pages, nous ne pourrons donc pas la retranscrire intégralement. Nous allons toutefois essayer d'en présenter les grandes lignes, en mettant en avant les idées ingénieuses employées par Lie dans sa démonstration.

On travaille en dimension complexe deux, au voisinage de l'origine, et on note $p := \frac{\partial}{\partial x}$ et $q := \frac{\partial}{\partial y}$. On note G un groupe à r paramètres, agissant régulièrement et fidèlement sur le voisinage considéré.

La première idée consiste à séparer les actions de groupe en deux catégories : On dit qu'un groupe local de transformations est *imprimitif* s'il laisse un feuilletage du plan invariant, c'est-à-dire s'il existe un feuilletage pour lequel toutes les transformations de G soient des *morphismes de feuilletage*. Autrement dit, si l'image d'une feuille par une transformation du groupe est encore une feuille. G est dit primitif sinon.

Notons tout d'abord qu'un groupe qui n'est pas localement transitif est imprimitif, car, comme on a supposé la régularité, ses orbites forment immédiatement un feuilletage invariant.

Tentons de voir quel est l'intérêt d'une telle définition. Remarquons qu'à biholomorphisme près, une transformation g laissant un feuilletage invariant s'écrit $g.(x, y) = \big(\psi(x), \varphi(x, y)\big)$. Il vient alors assez logiquement que tout générateur infinitésimal X de G s'écrit

$$X(x, y) = \xi(x) p + \eta(x, y) q.$$

Notons maintenant, pour tout générateur infinitésimal $X = \xi(x)p + \eta(x, y)q$ de G, le champ de vecteurs $X' := \xi(x)p$. Remarquons d'abord que si Y est un autre générateur infinitésimal de l'action de G, alors :

$$\big[X', Y'\big] = \big[X, Y\big]'.$$

Cela se vérifie directement par calcul. Donc $X \longmapsto X'$ est un morphisme d'algèbres de Lie, et donc l'ensemble $\mathfrak{g}'$ des X' pour X générateur infinitésimal de G est une algèbre de Lie de champs de vecteurs de dimension finie sur $\mathbb{C}$. De plus, ses éléments sont de la forme :

$$X' = \xi(x)p.$$

En se restreignant à la droite $\{(x, 0),\ x \in \mathbb{C}\}$, obtient une algèbre finie de champs de vecteurs sur la droite complexe. Et donc $\mathfrak{g}'$ est, à changement de carte près, engendrée linéairement soit par p, soit par $p,\ xp$, soit par $p,\ xp,\ x^2p$.

On n'a donc que quatre cas à étudier pour classifier les actions de groupes imprimitives :

- *Toutes les composantes en p sont nulles :* On a une base de générateurs infinitésimaux de la forme :

$$\Phi_1(x, y)q, \dots,\ \Phi_r(x, y)q.$$

- *Les composantes en p sont nulles, soit constantes en p :* On peut, après combinaisons linéaires, trouver une base de générateurs infinitésimaux de la forme :

$$\Phi_1(x, y)q, \dots,\ \Phi_{r-1}(x, y)q,\ p + \eta_0(x, y)q.$$

- *Les composantes en p sont combinaisons linéaires de p et de xp :* On obtient une base de la forme :

$$\Phi_1(x, y)q, \dots,\ \Phi_{r-2}(x, y)q,\ p + \eta_0(x, y)q,\ xp + \eta_1(x, y)q.$$

- *Les composantes en p sont combinaisons linéaires de p, xp, et x^2p :* On obtient cette fois une base de la forme :

$$\Phi_1(x, y)q, \dots,\ \Phi_{r-2}(x, y)q,\ p + \eta_0(x, y)q,$$
$$xp + \eta_1(x, y)q,\ \eta_2(x, y)q.$$

On s'est ainsi restreint à des cas bien plus simples que dans le problème de base. Nous ne ferons pas l'étude une à une de ces différents cas, qui serait bien trop longue.

On a laissé de côté les groupes primitifs, ceux qui n'admettent pas de feuilletage invariants. La démonstration formelle de l'étude de ce cas nous emmènerait, là encore, bien trop loin. Toutefois, nous tenons à présenter là encore l'idée générale du raisonnement, sans démonstration.

Une deuxième idée ingénieuse de Lie consiste à donner un critère pour la primitivité d'un groupe. On peut déjà supposer que G est localement transitif en 0, sinon il est directement imprimitif. On considère alors l'algèbre de Lie de champs de vecteurs engendrée par les générateur infinitésimaux de $\widehat{G}$, le linéarisé de G, dont le flot fixe l'origine. On appelle le groupe de transformations engendré par ces champs de vecteurs le *groupe isotrope linéarisé de G*. Lie considère alors une action induite de ce groupe, que nous ne préciserons pas, sur les droites de $T_0\mathbb{C}^2$.

Il démontre alors le résultat suivant :

Proposition 18 : *Un groupe local de transformations localement transitif est imprimitif si et seulement si l'action induite de son groupe isotrope linéarisé sur les droites de $T_0\mathbb{C}^2$ fixe une droite.*

Il ne reste plus qu'à caractériser les groupes tels que cette action du groupe isotrope linéarisé soit sans point fixe, ce qu'il fait avec brio :

Théorème 19 : *L'action du groupe isotrope linéarisé sur $T_0\mathbb{C}^2$ est sans points fixes si et seulement si une base de ses générateurs infinitésimaux est de la forme :*

$$xp,\ xq,\ yp,\ yq,$$

ou

$$yp,\ xp - yq,\ xq.$$

Mais, comme on a supposé le groupe transitif, on trouve alors un groupe linéarisé $\widehat{G}$ avec une base de générateurs infinitésimaux de la forme :

$$p,\ q, \qquad xp,\ xq,\ yp,\ yq,$$

ou

$$p,\ q,\ yp,\ xp - yq,\ xq.$$

Et là, enfin, on peut appliquer le théorème de la sous-section précédente : on reconnaît un groupe linéarisé de la forme soit $A_2(\mathbb{C})$, soit $SA_2(\mathbb{C})$. Et donc l'action de G est localement équivalente soit à celle de $A_2(\mathbb{C})$, soit à celle de $PSL_3(\mathbb{C})$, soit à celle de $SA_2(\mathbb{C})$. On en tire le théorème suivant :

Théorème 20 : *Un groupe local de transformations régulier et primitif agissant fidèlement au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$ est équivalent soit à $SA_2(\mathbb{C})$, soit à $A_2(\mathbb{C})$, soit à $PSL_3(\mathbb{C})$.*

Afin de ne pas laisser le lecteur sur sa faim, concluons en donnant la classification des algèbres de Lie de dimension finie de champs de vecteurs en dimension complexe 2 :

Théorème 21 : *Soit G un groupe local de transformation à r paramètres agissant régulièrement et fidèlement au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$. Alors, à biholomorphisme près, une base de générateurs infinitésimaux de G peut s'écrire :*

S'il est primitif :

$$\boxed{p, \quad q, \quad xq, \quad xp - yq, \quad yp, \quad xp + yq, \quad x^2p + xyq, \quad xyp + y^2q}$$

$$\boxed{p, \quad q, \quad xq, \quad xp - yq, \quad yp, \quad xp + yq}$$

$$\boxed{p, \quad q, \quad xq, \quad xp - yq, \quad yp}$$

Sinon :

Premier cas : *G admet un seul feuilletage invariant :*

$$\boxed{q, \quad xq, \quad p, \quad 2xp + yq, \quad x^2p + xyq}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} q, \quad xq, \ \ldots, \ x^rq, \quad p, \quad 2xp + ryq, \quad x^2p + rxyq \\ (r > 2) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} q, \quad xq, \ \ldots, \ x^rq, \quad yq, \quad p, \quad xp, \quad x^2p + rxyq \\ (r > 0) \end{array}}$$

$$\boxed{yq, \quad p, \quad xp, \quad x^2p+xyq}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} q, \quad xq, \ \ldots, \ x^r q, \quad yq, \quad p, \quad xp \\ (r>0) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} q, \quad xq, \ \ldots, \ x^r q, \quad p, \quad xp+cyq \\ (r>0\,;\ c\neq 1) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} q, \quad xq, \ \ldots, x^{r-1} q, \quad p, \quad xp+(ry+x^r)q \\ (r>1) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} q, \quad xq, \ \ldots, \ x^m q, \quad e^{\alpha_k x} q, \quad x e^{\alpha_k x} q, \ \ldots, \ x^{m_k} e^{\alpha_k x} q, \quad yq, \quad p \\ (k=1,2\ldots l\,;\ l\geqslant 0\,;\ l+m+m_1+\cdots+m_l>0\,;\ \alpha_1=1) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} q, \quad xq, \quad F_1(x)\,q, \ \ldots, \ F_r(x)\,q, \quad yq \\ (r\geqslant 0), \end{array}}$$

où les F_i sont des fonctions holomorphes quelconques.

Deuxième cas : *le groupe admet deux feuilletages invariants :*

$$\boxed{q, \quad xq, \quad x^2q, \quad p, \quad xp+yq, \quad x^2p+2xyq}$$

$$\boxed{p, \quad 2xp+yq, \quad x^2p+xyq}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} q, \quad xq, \ \ldots, \ x^r q, \quad p, \quad xp+yq \\ (r>0) \end{array}}$$

$$\boxed{q, \quad p, \quad xp+(x+y)q}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} e^{\alpha_k x} q, \quad x e^{\alpha_k x} q, \ \ldots, \ x^{m_k} e^{\alpha_k x} q, \quad p \\ (\alpha_1\,(\alpha_1-1)=0\,;\ k=1,2\ldots l\,;\ l>0\,;\ l+m_1+\cdots+m_l>1) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} q, \quad xq, \quad F_1(x)\,q, \ \ldots, \ F_r(x)\,q \\ (r\geqslant 0) \end{array}}$$

$$\boxed{q, \quad yq, \quad y^2q, \quad p, \quad xp, \quad x^2p} \qquad \boxed{p+q, \quad xp+yq, \quad x^2p+y^2q}$$

$$\boxed{q, \quad yq, \quad y^2q, \quad p, \quad xp} \qquad \boxed{q, \quad yq, \quad y^2q, \quad p} \qquad \boxed{q, \quad yq, \quad y^2q}$$

$$\boxed{q, \quad yq, \quad p, \quad xp} \qquad \boxed{q, \quad p, \quad xp+cyq \qquad (c\neq 0,1)}$$

$$\boxed{q, \quad yq, \quad p} \qquad \boxed{q, \quad yq} \ .$$

Troisième cas : *le groupe admet une infinité de feuilletages invariants :*

$$\boxed{p, \quad q, \quad xp + yq} \qquad \boxed{q, \quad xp + yq} \qquad \boxed{p, \quad q}$$

$$\boxed{q} \ .$$

Le lecteur comprendra aisément pourquoi la démonstration complète n'a pas pu être faite dans ce mémoire.

Nous terminerons enfin sur le cas de $\mathbb{R}$: la plupart des démonstrations et théorèmes fonctionnent encore dans le cas où l'on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$. La classification des groupes imprimitifs reste la même, en remplaçant les variables complexes par des réelles. Toutefois, le cas primitif est bien moins simple à traiter, et plusieurs autres cas, qui n'étaient pas là du fait que $\mathbb{C}$ soit algébriquement clos, apparaissent.

Conclusion

La raison pour laquelle nous nous sommes penchés sur deux applications des générateurs infinitésimaux *a priori* sans rapport est que leur lien est en fait plus profond qu'il n'y paraît.

Il se trouve en effet que la théorie des invariants différentiels, que nous n'avons pas développée dans ce mémoire, permet, à partir d'un groupe de transformations donné, de connaître toutes les sous-variétés invariantes sous son action. On peut alors donner une *forme normale locale* à une équation différentielle en voyant à quel groupe de transformations est équivalent son groupe de symétrie, et en la reliant ainsi à une sous-variété de l'espace des jets, d'équation la plus simple possible.

C'est ainsi que la classification des algèbres de Lie de dimension finie de champs de vecteurs en dimension deux permet une classification locale complète des équations différentielles ordinaires du second ordre.

Remerciements

Nous tenons à remercier vivement M. Joël Merker pour son aide et son soutien lors de la rédaction de ce mémoire, ainsi que pour sa traduction des travaux de Lie. Nous remercions également Simon Henry pour sa rigueur intransigeante.

Références

Les parties I, II, III et IV sont principalement basées sur le livre
Equivalence, Invariants and Symmetry de Peter J. Olver, publié chez Cambridge University Press. La cinquième et dernière partie, quant à elle, provient de la traduction de l'allemand des travaux de Sophus Lie par Joël Merker, traduction qui, bien que non encore publiée à ce jour, est néanmoins consultable sur Internet, à l'adresse http ://www.dma.ens.fr/∼merker/engel-lie-11-september-2008.pdf.