Fonctions Thêta

Nicolas Mascot

Mars 2009

Introduction

Le but de ce mémoire est l'étude de certaines fonctions, dites *fonctions Thêta*, attachées à des formes quadratiques. Le résultat essentiel est sans aucun doute le fait que ces fonctions Thêta soient modulaires sur certains sous-groupes de congruence du groupe modulaire. Comme les formes modulaires jouissent de propriétés remarquables, cette modularité est extrêmement riche de conséquences ; nous en déduirons par exemple des résultats portant sur le nombre de représentations des entiers positifs par certaines formes quadratiques.

Table des matières

Notations

Lorsque $u \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe, nous noterons $\Re u$ et $\Im u$ ses parties réelle et imaginaire. Nous désignerons par $\mathcal{H}$ le *demi-plan supérieur de Poincaré*

$$\mathcal{H} = \{u \in \mathbb{C} \,|\, \Im u > 0\}.$$

Pour $\varepsilon > 0$, nous noterons

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \{u \in \mathbb{C} \,|\, \Im u \geqslant \varepsilon\}.$$

La lettre z désignera toujours un élément de $\mathcal{H}$, et nous noterons $q = e^{2i\pi z}$, c'est un nombre complexe de module strictement inférieur à un.

Nous noterons également Γ le groupe modulaire $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$. Pour tout entier naturel non nul N, nous noterons $\Gamma(N)$ et $\Gamma_0(N)$ les *sous-groupes de congruence*

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod N \right\}$$

et

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, c \equiv 0 \mod N \right\}.$$

Ces groupes agissent sur $\mathcal{H}$ par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$.

La lettre r désignera quant à elle un nombre entier naturel non nul, et la base canonique de $\mathbb{R}^r$ sera notée $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$. L'ensemble des matrices carrées réelles de taille r définies positives sera quant à lui noté $Sym_r^{++}(\mathbb{R})$, et nous posons

$$Sym_r^{++}(\mathbb{Z}) = Sym_r^{++}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_r(\mathbb{Z}).$$

Étant donné un entier naturel n, nous noterons

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

la somme des puissances k-ièmes de ses diviseurs.

Enfin, les *nombres de Bernouilli* seront notés $(B_k)_{k \geqslant 1}$, de sorte que

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} B_k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

1 Formes quadratiques entières

1.1 Formes quadratiques entières sur $\mathbb{R}^r$

Définition 1.1. *Soit Q une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^r$. On dit que Q est* entière *si $Q(x) \in \mathbb{Z}$ dès que $x \in \mathbb{Z}^r$.*

Dans la suite, toute forme quadratique entière sera implicitement supposée définie positive.

Soit une matrice symétrique réelle définie positive $A = (a_{i,j}) \in Sym_r^{++}(\mathbb{R})$. Nous lui associons une forme quadratique sur $\mathbb{R}^r$ en posant

$$Q\colon x \longmapsto \frac{1}{2}\,{}^t x A x = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} a_{i,j}x_i x_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} a_{i,i}x_i^2 + \sum_{i<j} a_{i,j}x_i x_j.$$

Réciproquement, toute forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^r$ définit une unique matrice symétrique réelle définie positive A telle que $Q(x) = \frac{1}{2}\,{}^t x A x$. Nous dirons que A est la matrice de Q. Nous posons aussi $\det(Q) = \det(A) \in \mathbb{R}$.

Supposons que la forme quadratique Q définie par la matrice $A = (a_{i,j}) \in Sym_r^{++}(\mathbb{R})$ soit entière. En faisant $x = e_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, nous trouvons que les $a_{i,i}$ sont nécessairement tous des entiers pairs ; puis, en faisant $x = e_i + e_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant r$, nous voyons que les $a_{i,j}$ sont nécessairement entiers. Comme il est évident que réciproquement, ces conditions sur les $a_{i,j}$ suffisent à assurer que Q est entière, nous sommes amenés à définir :

Définition 1.2. *Soit $A = (a_{i,j}) \in Sym_r^{++}(\mathbb{R})$. On dit que A est* entière *si les $a_{i,j}$ sont tous entiers et si de plus les termes diagonaux $a_{i,i}$ sont pairs.*

Ainsi Q est entière si et seulement si A est entière, et alors $Q(x) \in \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_r]$.

1.2 Forme quadratique adjointe

Lorsque Q est une forme quadratique entière, il est possible que $\frac{1}{n}Q$ soit encore entière pour certains entiers $n \in \mathbb{N}^*$; précisément, c'est le cas si et seulement si n divise le pgcd des coefficients de Q vue comme polynôme de $\mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_r]$. On définit alors

Définition 1.3. *La forme quadratique entière Q est dite* primitive *si $\frac{1}{n}Q$ n'est entière que pour $n = 1$. La matrice $A \in Sym_r^{++}(\mathbb{Z})$ est dite* primitive *si la forme quadratique associée est primitive.*

Ainsi, Q est primitive si et seulement si le polynôme $Q(x) \in \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_r]$ est primitif, et $A = (a_{i,j})$ est primitive si et seulement si les $\frac{1}{2}a_{i,i}$ et les $a_{i,j}$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Avant de poursuivre, nous avons besoin du

Lemme 1.1. *Soit $A \in Sym_r^{++}(\mathbb{Z})$ une matrice entière.*

a) Si r est impair, alors le déterminant de A est un entier pair.

b) Si r est pair, alors la matrice $\det(A)A^{-1}$ est entière.

Démonstration.

a) Supposons r pair. Par définition,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{r} a_{i,\sigma(i)} \in \mathbb{Z}$$

puisque A est à coefficients entiers. De plus, puisque A est symétrique, le terme

$$\prod_{i=1}^{r} a_{i,\sigma(i)}$$

est invariant si on remplace σ par σ^{-1} ; ainsi $\det(A)$ a la même parité que

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_r \\ \sigma^2 = Id}} \prod_{i=1}^{r} a_{i,\sigma(i)}.$$

Or tout σ tel que $\sigma^2 = Id$ est un produit de transpositions disjointes ; comme r est impair, un tel σ a toujours au moins un point fixe. Chaque terme

$$\prod_{i=1}^{r} a_{i,\sigma(i)}$$

fait ainsi intervenir au moins un coeffcient diagonal donc pair $a_{i,i}$, donc est pair.

b) La matrice $\det(A)A^{-1}$ est la comatrice de A, qui est clairement symétrique et inversible. Elle est de plus entière, puisque ses cofacteurs sont visiblement entiers et que ses cofacteurs diagonaux vérifient les hypothèses de a).

$\square$

Nous supposons dorénavant que $r = 2k$ *est pair*. Ainsi $\det(A)A^{-1}$ est une matrice entière, mais elle peut très bien ne pas être primitive. On définit donc

Définition 1.4. *L'unique entier* $N \in \mathbb{N}^*$ *tel que* NA^{-1} *soit entière et primitive s'appelle le* niveau *de* A*. On note* $A^* = NA^{-1}$*, c'est l'*adjointe *de* A*. La forme quadratique* Q^* *associée à* A^* *est l'*adjointe *de* Q*, c'est une forme quadratique entière primitive.*

Nous disposons alors de la

Proposition 1.2.

a) Si Q *est primitive, alors* Q *et* Q^* *ont le même niveau :* $N = N^*$*.*

b) En général, on a $N^*|N$ *et* $N|\det(Q)|N^r$*.*

Démonstration. Par définition, la forme quadratique Q^{**} est entière primitive, et a pour matrice $A^{**} = N^*A^{*-1} = \frac{N^*}{N}A$. Ainsi,

a) Si A était primitive, alors comme N et N^* sont positifs, ils sont égaux, et

b) $\frac{N^*}{N}$ est donc en général l'inverse d'un entier, donc $N^*|N$; de plus, il est clair d'après le lemme 1.1 que $N|\det(A)$, et comme $\det(A^*) = \frac{N^r}{\det(A)}$ est entier, $\det(A)|N^r$.

$\square$

Corollaire 1.3. *Il en résulte que* N *et* $\det(Q)$ *ont les mêmes facteurs premiers. En particulier,* Q *est de niveau* 1 *si et seulement si* $\det(Q) = 1$*.*

Avant de passer aux fonctions Thêta, nous devons nous intéresser à une certaine classe de polynômes homogènes.

1.3 Fonctions sphériques pour une forme quadratique

Soit Q une forme quadratique définie positive non nécessairement entière (même si les résultats qui suivent ne seront appliqués que dans le cas Q entière) ; et soit $A \in Sym_r^{++}(\mathbb{R})$ la matrice de Q. Il est possible de diagonaliser Q par un changement de variable linéaire $y = Px$, $P \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{R})$:

$$Q(x) = \frac{1}{2}\,{}^t x A x = {}^t y y,$$

autrement dit, $A = 2\,{}^t P P$.

Définition 1.5. *Le* laplacien tordu *par Q est défini par*

$$\Delta_Q = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}.$$

Une application f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^r$ est dite sphérique *pour Q si $\Delta_Q f = 0$.*

Cette défininiton ne dépend pas du choix de P puisque le laplacien usuel est invariant par isométries.

Nous allons voir qu'il est possible de donner une caractérisation précise des applications sphériques, à condition de se restreindre aux polynômes homogènes. Pour ce faire, il est utile de définir un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_r]$ en posant

$$\langle f, g \rangle = \int_{Q(x) \leqslant 1} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Comme Q est définie positive, la partie $K = \{x \in \mathbb{R}^r \,|\, Q(x) \leqslant 1\}$ est compacte, ce qui assure que cette définition a bien un sens. Nous pouvons alors énoncer :

Théorème 1.4. *Soit $f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_r]$ un polynôme homogène de degré ν. S'équivalent*

(i) f est une fonction sphérique pour Q.

(ii) f est orthogonale à tout polynôme homogène de degré strictement inférieur à ν de $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_r]$.

(iii) f est combinaison linéaire d'applications de forme $x \mapsto ({}^t\zeta A x)^\nu$, où $\zeta \in \mathbb{C}^r$ est isotrope pour Q : $Q(\zeta) = 0$.

Démonstration. En effectuant le changement de variable $y = Px$ et en remplaçant au passage ζ par $\eta = P\zeta$, qui vérifie ${}^t\eta\eta = 0$, nous nous ramenons au cas où Q s'écrit simplement $Q(x) = {}^t xx$, et où $\Delta_Q = \Delta$ est le laplacien classique.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : On se ramène par linéarité au cas où $f(x) = ({}^t\eta x)^\nu$, et on vérifie alors facilement que

$$\Delta f = \sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\sum_{j=1}^r \eta_j x_j\right)^\nu = \nu(\nu-1)\underbrace{\left(\sum_{i=1}^r \eta_i^2\right)}_{=0}\left(\sum_{j=1}^r \eta_j x_j\right)^{\nu-2} = 0.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit g un polynôme homogène quelconque de degré ν. La formule d'Euler nous dit que

$$\sum_{i=1}^r x_i \frac{\partial g}{\partial x_i} = \nu g.$$

Définissons sur $\mathbb{R}^r$ les $(r-1)$-formes différentielles

$$\omega_i = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_r, \qquad \omega = \sum_{i=1}^r x_i \omega_i.$$

Alors si dx désigne la r-forme

$$dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r,$$

nous avons d'après la formule de Stokes

$$\int_K \Delta g dx = \int_{\partial K} \sum_{i=1}^r x_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \omega = \nu \int_{\partial K} g\omega \qquad (\star)$$

d'après la formule d'Euler

$$= \nu \int_{\partial K} \sum_{i=1}^r g x_i \omega_i = \nu \int_K \sum_{i=1}^r \frac{\partial (g x_i)}{\partial x_i} dx$$

après une nouvelle application de la formule de Stokes

$$= \nu \int_K \sum_{i=1}^r g dx + \nu \int_K \underbrace{\sum_{i=1}^r \frac{\partial g}{\partial x_i} x_i}_{\nu g} dx = \nu(\nu + r) \int_K g dx.$$

Montrons alors par récurrence sur ν que si f est un polynôme homogène sphérique de degré ν, alors f est orthogonal à tout polynôme homogène g de degré strictement inférieur à n. Pour $\nu = 0$, il n'y a rien à démontrer. Pour $\nu \geqslant 1$, on remarque que d'après le théorème de Schwartz, les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont sphériques, donc Δf aussi, si bien que d'après ce qui précède

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle = \int_K fg dx = (\cdots)\int_K \Delta(fg)dx = (\cdots)\int_K (f\Delta g + 2\nabla f\cdot\nabla g + g\Delta f)dx \\ = (\cdots)\int_K f\Delta g dx \text{ par hypothèse de récurrence} \\ = \cdots = (\cdots)\int_K f\Delta^2 g dx = \cdots = 0.\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Montrons que si f est orhtogonale à la fois aux polynômes g de degré strictement inférieur à ν et aux applications de forme $x \mapsto ({}^t\eta x)^\nu$, ${}^t\eta\eta = 0$, alors f est nulle.
Soit donc $g\colon x \mapsto ({}^t\eta x)^\nu$, ${}^t\eta\eta = 0$. Nous avons

$$0 = \langle f, g\rangle = \int_K f\overline{g} dx = (\cdots)\int_K \Delta(f\overline{g})dx = (\cdots)\int_K \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{g}}{\partial x_i}$$

puisque $\Delta f = \Delta g = 0$

$$= \cdots = (\cdots)\int_K \sum_{i_1+\cdots+i_\nu = r} \frac{\partial^\nu f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_\nu}}\frac{\partial \overline{g}}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_\nu}}.$$

Or d'une part, la formule d'Euler donne par récurrence sur n

$$\sum_{i_1+\cdots+i_\nu = r} \underbrace{\frac{\partial^\nu f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_\nu}}}_{\text{constante } \in\mathbb{C}} x_{i_1}\cdots x_{i_\nu} = \nu! f(x),$$

et d'autre part, on a

$$\frac{\partial \overline{g}}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_\nu}} = \nu!\overline{\eta_{i_1}\cdots\eta_{i_\nu}},$$

si bien que l'expression à laquelle nous avions abouti vaut

$$\int_K \sum_{i_1+\cdots+i_\nu = r} \frac{\partial^\nu f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_\nu}}\frac{\partial \overline{g}}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_\nu}} = \int_K (\nu!)^2 f(\overline{\eta})dx = \lambda(K)(\nu!)^2 f(\overline{\eta}).$$

Par conséquent, $f(\eta) = 0$ dès que $\overline{{}^t\eta}\overline{\eta} = 0$, donc dès que ${}^t\eta\eta = 0$.
Ainsi le polynôme f est divisible par $Q(x) = {}^t xx$, mettons $f = Qf_1$.
On a alors d'après $(\star)$

$$\langle f_1, f_1 \rangle = \int_K f_1 \overline{f_1} dx = (\cdots) \int_{\partial K} f_1 \overline{f_1} \omega = (\cdots) \int_{\partial K} Q f_1 \overline{f_1} \omega$$

puisque $Q = 1$ sur ∂K

$$= (\cdots) \langle f, f_1 \rangle = 0$$

par hypothèse, donc $f_1 = 0$, donc $f = 0$.

$\square$

2 Fonctions Thêta

2.1 Fonctions Thêta associées à une forme quadratique entière

Définition 2.1. *Soit Q une forme quadratique entière. Pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$, notons $R_Q(m) \in \mathbb{N}$ le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}^r$ de l'équation $Q(x) = m$. La* fonction Thêta *associée à Q est*

$$\vartheta(z; Q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^r} e^{2i\pi Q(n) z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^r} q^{Q(n)} = \sum_{m=0}^{+\infty} R_Q(m) q^m.$$

Remarquons que, puisque Q est définie positive, il existe des constantes réelles $0 < A \leqslant B$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^r, \qquad A\|x\|^2 \leqslant Q(x) \leqslant B\|x\|^2,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^r$. Ainsi, les $R_Q(m)$ sont tous finis, et la série définissant ϑ est dominée terme-à-terme par

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^r} e^{-2\pi A \|n\|^2 \Im z} = \left(\sum_{t \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi A t^2 \Im z} \right)^r < +\infty,$$

si bien qu'elle converge normalement sur $\mathcal{H}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$; ainsi sa somme est holomorphe sur $\mathcal{H}$.

Nous allons en fait nous intéresser à des fonctions Thêta plus générales. Une première généralisation consiste à faire intervenir des fonctions sphériques :

Définition 2.2. *Soit P un polynôme homogène de $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_r]$, sphérique pour Q. On pose*

$$\vartheta(z; Q, P) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^r} P(n) q^{Q(n)}.$$

Tandis qu'une généralisation supplémentaire consiste à sommer non plus sur le réseau $\mathbb{Z}^r$, mais sur un réseau translaté :

Définition 2.3. *Soient N le niveau de Q, ν le degré de P, et $h \in \mathbb{Z}^r$ un vecteur à coordonnées entières tel que $Ah \equiv 0 \mod N$. On pose*

$$\vartheta(z; Q, P, h) = \sum_{n \in \frac{1}{N} h + \mathbb{Z}^r} P(n) e^{2i\pi Q(n) z} = \frac{1}{N^\nu} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^r \\ n \equiv h \mod N}} P(n) e^{\frac{2i\pi Q(n) z}{N^2}}.$$

Notons que la condition sur h fait que les termes $\frac{Q(n)}{N^2}$ sont tous multiples entiers de $\frac{1}{N}$; ainsi $\vartheta(z; Q, P, h)$ est-elle invariante par les translations $z \mapsto z + N$, mais pas *a priori* par $z \mapsto z + 1$.

Ces trois formules sont des généralisations successives de la même idée, dans le sens où

$$\vartheta(\cdot; Q) = \vartheta(\cdot; Q, 1) \qquad \text{et} \qquad \vartheta(\cdot; Q, P) = \vartheta(\cdot; Q, P, 0).$$

Comme les $q^{Q(n)}$ décroissent exponentiellement, on vérifie toujours aussi facilement que ces formules définissent bien des applications holomorphes sur $\mathcal{H}$.

L'étape suivante est certainement la plus importante de toutes : elle consiste à remarquer que toutes ces fonctions Thêta sont modulaires pour certains sous-groupes de congruence du groupe modulaire.

2.2 Modularité des fonctions Thêta

Soit Q une forme quadratique entière sur $\mathbb{R}^r$, de matrice A. Le résultat suivant constitue une première indication de la modularité de la fonction Thêta associée.

Lemme 2.1. *Posons pour tout $x \in \mathbb{R}^r$*

$$\vartheta(z; Q, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^r} e^{2i\pi Q(n+x)z}.$$

On a alors l'identité suivante :

$$\forall z, \qquad \vartheta(z; Q, x) \left(\frac{z}{i}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{\det Q}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^r} e^{2i\pi\, {}^t n x \;-\; \frac{i\pi}{z}\, {}^t n A^{-1} x}.$$

Démonstration. En se plaçant comme précédemment sur $\mathcal{H}_\varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$, on constate facilement grâce à la décroissance exponentielle des termes que $\vartheta(z; Q, x)$ est bien définie sur $\mathcal{H} \times \mathbb{R}^r$, et est de classe $\mathcal{C}^1$ et périodique en x, la dérivation sous le signe somme ne pose aucun problème puisqu'elle ne fait intervenir que des termes multiplicatifs à croissance polynômiale en n alors qu'on conserve une décroissance exponentielle. La fonction $\vartheta(z; Q, \cdot)$ est donc égale d'après le théorème de Dirichlet à sa série de Fourier

$$\vartheta(z; Q, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^r} c_n(z) e^{2i\pi\, {}^t n x},$$

les coefficients de Fourier étant donnés par

$$c_n(z) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \vartheta(z; Q, x) e^{-2i\pi\, {}^t n x} dx_1 \cdots dx_r$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z\, {}^t x A x \;-\; 2i\pi\, {}^t n x} dx_1 \cdots dx_r,$$

toujours grâce à la décroissance exponentielle des termes.

En complétant l'argument de l'exponentielle en

$$z\, {}^t x A x \;-\; 2\, {}^t n x + \frac{1}{z}\, {}^t n A^{-1} n = z\, {}^t (x - \frac{1}{z} A^{-1} n) A (x - \frac{1}{z} A^{-1} n),$$

on en déduit que

$$c_n(z) = e^{-\frac{i\pi}{z}\, {}^t n A^{-1} n} b_n(z),$$

avec

$$b_n(z) = \int_{\mathbb{R}^r} e^{i\pi z\, {}^t (x - \frac{1}{z} A^{-1} n) A (x - \frac{1}{z} A^{-1} n)} dx = \int_{\mathbb{R}^r} e^{i\pi z\, {}^t x A x} dx$$

après translation par $\frac{1}{z} A^{-1} n$,

$$= \frac{1}{\sqrt{\det Q}} \int_{\mathbb{R}^r} e^{i\pi z\, {}^t y y} dy$$

après changement de variable $y = Px$ diagonalisant la forme quadratique, puisqu'on a alors $A = {}^t P P$ donc le jacobien est $|\det P| = \sqrt{\det Q}$,

$$= \frac{1}{\sqrt{\det Q}} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\pi z \|u\|^2} du \right)^k.$$

Afin d'évaluer cette intégrale double, passons en coordonnées polaires dans le plan :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\pi z \|u\|^2} du = \int_{\rho=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho e^{i\pi z \rho^2} d\rho d\theta = \int_0^{+\infty} 2\pi \rho e^{i\pi z \rho^2} d\rho = \left[\frac{1}{iz} e^{i\pi z \rho^2} \right]_{\rho=0}^{+\infty} = \frac{i}{z},$$

d'où le résultat.

□

En prenant $x = 0$, on obtient directement la

Proposition 2.2. *Si Q est entière, alors la fonction Thêta associée vérifie l'identité*

$$\forall z, \qquad \vartheta(z;Q)\left(\frac{z}{i}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{\det Q}}\ \vartheta(\frac{-1}{Nz};Q^*).$$

Ceci suggère une modularité de poids k dans ce cas-là. Nous allons à présent élagir ce résultat aux $\vartheta(z;Q,P)$. Définissons tout d'abord :

Définition 2.4. *Soit P un polynôme homogène, sphérique pour Q. Le* polynôme adjoint *de P est $P^*(x) = P(A^{-1}x)$.*

On a alors facilement la

Proposition 2.3. *Si P est sphérique pour Q, alors P^* est sphérique pour Q^*.*

Démonstration. C'est évident avec le théorème 1.4, puisque si $P(x) = ({}^t\zeta Ax)^\nu$, ${}^t\zeta A\zeta = 0$, alors $P^*(x) = ({}^t\zeta x)^\nu = ({}^t\eta A^{-1}x)^\nu$, où $\eta = A\zeta$ vérifie ${}^t\eta A^*\eta = {}^t\zeta ANA^{-1}A\zeta = 0$. □

On en déduit la

Proposition 2.4 (Schöneberg)**.** *Si P est sphérique pour Q, alors*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^r} P(n+x)e^{2i\pi Q(n+x)z} = \frac{1}{\sqrt{\det Q}}\frac{i^k}{z^{k+\nu}}\sum_{n\in\mathbb{Z}^r} P^*(n)e^{2i\pi\,{}^tnx\ -\ \frac{i\pi}{z}\,{}^tnA^{-1}n},$$

où $\nu = \deg P$.

Démonstration. Nous nous ramenons tout d'abord par linéarité au cas $P(x) = ({}^t\zeta Ax)^\nu$. Considérons alors l'opérateur différentiel

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^r \zeta_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Comme $Q(x) = \frac{1}{2}\,{}^txAx$, on a $\mathcal{D}Q(x) = {}^t\zeta Ax$ et donc $\mathcal{D}^2Q(x) = \vartheta\zeta A\zeta = 0$. Ainsi, en appliquant ν fois $\mathcal{D}$ à

$$\vartheta(z;Q,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^r} e^{2i\pi Q(n+x)z},$$

on obtient

$$\mathcal{D}^\nu \vartheta(z;Q,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^r} \left(2i\pi z\right)^\nu \underbrace{\left({}^t\zeta A(n+x)\right)^\nu}_{P(n+x)} e^{2i\pi Q(n+x)z}.$$

Par ailleurs, le lemme 2.1 nous dit que

$$\vartheta(z;Q,x) = \frac{1}{\sqrt{\det Q}} \left(\frac{z}{i}\right)^{-k} \sum_{n\in\mathbb{Z}^r} e^{2i\pi\,{}^tnx \;-\; \frac{i\pi}{z}\,{}^tnA^{-1}x},$$

d'où, en appliquant ν fois $\mathcal{D}$,

$$\mathcal{D}^\nu \vartheta(z;Q,x) = \frac{1}{\sqrt{\det Q}} \left(\frac{z}{i}\right)^{-k} \sum_{n\in\mathbb{Z}^r} (2i\pi)^\nu \underbrace{\left({}^t\zeta n\right)^\nu}_{P^*(n)} e^{2i\pi\,{}^tnx \;-\; \frac{i\pi}{z}\,{}^tnA^{-1}x}.$$

Le résultat s'en déduit en simplifiant par $(2i\pi)^\nu$ ces deux expressions de $\mathcal{D}^\nu\vartheta(z;Q,x)$. $\square$

Puisque cette dernière proposition suggère une modularité de poids $k+\nu$, définissons sans plus tarder l'*action de poids* $k+\nu$

$$f(z)| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (cz+d)^{-(k+\nu)} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

pour $f\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$.

Nous atteignons alors enfin notre but.

Théorème 2.5 (Schöneberg)**.** *Soient Q une forme quadratique entière de niveau N, P un polynôme homogène sphérique pour Q, et h un vecteur de $\mathbb{Z}^r$ tel que $Ah \equiv 0 \mod N$, où A désigne la matrice de Q. La fonction $\vartheta(z;Q,P,h)$ vérifie l'identité*

$$\vartheta(z;Q,P,h)| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = e^{\frac{2i\pi abQ(h)}{N^2}} \varepsilon(d)\vartheta(z;Q,P,ah)$$

pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, où $\varepsilon(d) = \left(\frac{(-1)^k \det Q}{d}\right)$ est un caractère modulo N à valeurs réelles.

Démonstration. Substituons $\frac{h}{N}$ à x dans la formule obtenue à la proposition précédente. Nous obtenons

$$\vartheta(z; Q, P, h) = \frac{1}{N^\nu} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^r \\ n \equiv h \mod N}} P(n) e^{\frac{2i\pi Q(n) z}{N^2}}$$

$$= \frac{i^k}{\sqrt{\det Q} z^{k+\nu}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^r} P^*(n) e^{\frac{2i\pi\, {}^t n h}{N} - \frac{i\pi}{z}\, {}^t n A^{-1} n}.$$

Procédons alors au changement de variable $m = NA^{-1}n = A^* n$. La nouvelle variable m est à valeurs dans $\mathbb{Z}^r$ et vérifie $Am \equiv 0 \mod N$, et réciproquement, si un vecteur $m \in \mathbb{Z}^r$ vérifie $Am \equiv 0 \mod N$, alors $n = \frac{1}{N} Am \in \mathbb{Z}^r$. Par conséquent, nous obtenons

$$\vartheta(z; Q, P, h) = \frac{i^k}{\sqrt{\det Q} z^{k+\nu}} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^r \\ Am \equiv 0 \mod N}} N^{-\nu} P(m) e^{\frac{2i\pi\, {}^t m A h \,-\, \frac{i\pi}{z} 2Q(m)}{N^2}}.$$

Mais comme $Ah \equiv 0 \mod N$, le facteur $e^{\frac{2i\pi\, {}^t m A h}{N^2}}$ ne dépend que de $m \mod N$; ainsi, en regroupant les termes de la somme précédente selon $m \mod N$, ce qui est licite grâce à la convergence absolue sur $\mathcal{H}$, nous trouvons

$$\vartheta(z; Q, P, h) = \frac{i^k}{\sqrt{\det Q} z^{k+\nu}} \sum_{\substack{m \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^r \\ Am \equiv 0 \mod N}} e^{\frac{2i\pi\, {}^t m A h}{N^2}} N^{-\nu} \sum_{t \in \mathbb{Z}^r} P(m+Nt) e^{\frac{-\frac{2i\pi}{z} Q(m+Nt)}{N^2}}$$

$$= \frac{i^k}{\sqrt{\det Q} z^{k+\nu}} \sum_{\substack{m \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^r \\ Am \equiv 0 \mod N}} e^{\frac{2i\pi\, {}^t m A h}{N^2}} \vartheta\left(-\frac{1}{z}; Q, P, m\right). \qquad (1)$$

Ceci étant, remarquons que si c est un entier naturel non nul, alors la forme quadratique cQ est de niveau cN ; par conséquent, on obtient en regroupant les termes suivant leur congruence modulo cN

$$\vartheta(z; Q, P, h) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^r \\ n \equiv h \mod N}} \frac{1}{N^\nu} P(n) e^{\frac{2i\pi c Q(n) cz}{(cN)^2}}$$

$$= \sum_{\substack{g \in (\mathbb{Z}/cN\mathbb{Z})^r \\ g \equiv h \mod N}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^r \\ n \equiv g \mod cN}} \frac{1}{N^\nu} P(n) e^{\frac{2i\pi c Q(n) cz}{(cN)^2}} = \sum_{\substack{g \in (\mathbb{Z}/cN\mathbb{Z})^r \\ g \equiv h \mod N}} \vartheta(cz; cQ, P, g).$$

Soit alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ tel que $c \neq 0$, $c > 0$ quitte à changer de représentant. Comme $ad - bc = 1$,

$$c \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = c\frac{az+b}{cz+d} = a - \frac{1}{cz+d},$$

et nous avons donc

$$\vartheta(z; Q, p, h)| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (cz+d)^{-(k+\nu)} \sum_{\substack{g \in (\mathbb{Z}/cN\mathbb{Z})^r \\ g \equiv h \mod N}} \vartheta\left(a - \frac{1}{cz+d}; cQ, P, g\right)$$

$$= \sum_{\substack{g \in (\mathbb{Z}/cN\mathbb{Z})^r \\ g \equiv h \mod N}} \frac{e^{2i\pi a Q(g)/cN^2}}{(cz+d)^{k+\nu}} \vartheta\left(\frac{-1}{cz+d}; cQ, P, g\right)$$

puisque comme $Ah \equiv 0 \mod N$, $e^{2i\pi a Q(n)/cN^2}$ ne dépend que de $n \mod cN = g$. D'après (1), nous obtenons ainsi

$$\vartheta(z; Q, p, h)| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\substack{g \in (\mathbb{Z}/cN\mathbb{Z})^r \\ g \equiv h \mod N}} \frac{e^{2i\pi a Q(g)/cN^2}}{(cz+d)^{k+\nu}} \frac{i^k}{\sqrt{\det(cQ)} \left(\frac{-1}{cz+d}\right)^{k+\nu}} \sum_{\substack{m \in (\mathbb{Z}/cN\mathbb{Z})^r \\ cAm \equiv 0 \mod cN}} e^{\frac{2i\pi\, {}^t mcAg}{(cN^2)}} \vartheta(cz+d; cQ, P, m)$$

$$= \frac{i^k (-1)^{k+\nu}}{c^k \sqrt{\det Q}} \sum_{\substack{g \in (\mathbb{Z}/cN\mathbb{Z})^r \\ g \equiv h \mod N}} e^{2i\pi a Q(g)/cN^2} \sum_{\substack{m \in (\mathbb{Z}/cN\mathbb{Z})^r \\ Am \equiv 0 \mod N}} e^{\frac{2i\pi\, {}^t mAg}{cN^2}} \vartheta(cz+d; cQ, P, m)$$

$$= \frac{i^{-k-2\nu}}{c^k \sqrt{\det Q}} \sum_{\substack{m \in (\mathbb{Z}/cN\mathbb{Z})^r \\ Am \equiv 0 \mod N}} \phi(h, m) \vartheta(cz; cQ, P, m) \qquad (2)$$

où nous avons posé

$$\phi(h, m) = \sum_{\substack{g \in (\mathbb{Z}/cN\mathbb{Z})^r \\ g \equiv h \mod N}} e^{2i\pi \frac{aQ(g) + {}^t mAg + dQ(m)}{cN^2}}.$$

Le calcul

$$\phi(h+dm,0)=\sum_{\substack{g\in(\mathbb{Z}/cN\mathbb{Z})^r\\ g\equiv h+dm \mod N}} e^{2i\pi\frac{aQ(g)}{cN^2}}=\sum_{\substack{f\in(\mathbb{Z}/cN\mathbb{Z})^r\\ f\equiv h \mod N}} e^{2i\pi\frac{aQ(f+dm)}{cN^2}}$$

$$=\sum_{\substack{f\in(\mathbb{Z}/cN\mathbb{Z})^r\\ f\equiv h \mod N}} e^{2i\pi\frac{aQ(f)+ad\left({}^tfAm+dQ(m)\right)}{cN^2}}=\sum_{\substack{f\in(\mathbb{Z}/cN\mathbb{Z})^r\\ f\equiv h \mod N}} e^{2i\pi\frac{aQ(f)+{}^tfAm+dQ(m)}{(cN)^2}}e^{2i\pi\frac{(1-ad)\left({}^tmAf+dQ(m)\right)}{cN^2}}$$

montre, en tenant compte du fait que d'une part, $ad-bc=1$, et d'autre part, que $e^{2i\pi\frac{b\left({}^tfAm+dQ(m)\right)}{N^2}}=e^{2i\pi\frac{b\left({}^thAm+dQ(m)\right)}{N^2}}$ puisque $Ah\equiv 0 \mod N$, que ϕ vérifie l'identité

$$\phi(h,m)=e^{-2i\pi\frac{b\left({}^thAm+dQ(m)\right)}{N^2}}\phi(h+dm,0). \qquad (3)$$

Par conséquent, $\phi(h,m)$ ne dépend que de $m \mod N$ puisque $Am\equiv 0 \mod N$, si bien que (2) devient

$$\vartheta(z;Q,P,h)|\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\frac{i^{-k-2\nu}}{c^k\sqrt{\det Q}}\sum_{\substack{m\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^r\\ Am\equiv 0 \mod N}}\phi(h,m)\vartheta(z;Q,P,m).$$

En particulier, si $d\equiv 0 \mod N$, alors nous avons bien $c\neq 0$, et donc

$$\vartheta(z;Q,p,h)|\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\frac{i^{-k-2\nu}\phi(h,0)}{c^k\sqrt{\det Q}}\sum_{\substack{m\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^r\\ Am\equiv 0 \mod N}} e^{\frac{-2i\pi b\,{}^thAm}{N^2}}\vartheta(z;Q,P,m)$$

d'après (3).

En appliquant à ceci la transformation

$$S=\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

nous obtenons

$$\vartheta(z;Q,P,h)|\begin{pmatrix} b & -a\\ d & -c\end{pmatrix}$$

$$=\frac{i^{-k-2\nu}\phi(h,0)}{c^k\sqrt{\det Q}}\sum_{\substack{m\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^r\\ Am\equiv 0 \mod N}} e^{\frac{-2i\pi b\,{}^thAm}{N^2}}\frac{i^{-k-2\nu}1}{1^k\sqrt{\det Q}}\sum_{\substack{l\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^r\\ Al\equiv 0 \mod N}} e^{\frac{-2i\pi(-1)\,{}^tmAl}{N^2}}\vartheta(z;Q,P,l)$$

puique le termes $\phi(m,0)$ associés à S valent 1

$$= \frac{\phi(h,0)}{(-c)^k \det Q} \sum_{\substack{l\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^r \\ Al\equiv 0 \mod N}} \sum_{\substack{m\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^r \\ Am\equiv 0 \mod N}} e^{\frac{2i\pi\, {}^t mA(l-bh)}{N^2}} \vartheta(z;Q,P,l).$$

Examinons le terme

$$\sum_{\substack{m\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^r \\ Am\equiv 0 \mod N}} e^{\frac{2i\pi\, {}^t mA(l-bh)}{N^2}}.$$

Il vaut $card\{m \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^r | Am \equiv 0 \mod N\}$ si $l \equiv bh \mod N$, et 0 sinon. Ce cardinal est le cardinal du noyau de A vue comme endomorphisme de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^r$, qui est égal à celui du *conoyau* $Coker\, A = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^r / Im\, A$ par finitude de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^r$. Comme l'image de A vue cette fois comme endomorphisme de $\mathbb{Z}^r$ est contenue dans $(N\mathbb{Z})^r$ par définition du niveau, le conoyau de A dans $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^r$ coïncide avec son conoyau dans $\mathbb{Z}^r$, qui est de cardinal $\det A = \det Q$.

Finalement, nous en déduisons donc que

$$\vartheta(z;Q,P,h)| \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} = \frac{\phi(h,0)}{(-c)^k} \vartheta(z;Q,P,bh).$$

Ainsi, en voyant $\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$, $d \equiv 0 \mod N$ comme une nouvelle matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, nous avons l'identité

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N), \quad \vartheta(z;Q,P,h)| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{\psi(h)}{d^k} \vartheta(z;Q,P,ah),$$

à condition de définir

$$\psi(h) = \sum_{\substack{g\in(\mathbb{Z}/dN\mathbb{Z})^r \\ g\equiv h \mod N}} e^{2i\pi \frac{bQ(g)}{dN^2}}$$

comme la nouvelle $\phi(h,0)$.

Comme $ad \equiv 1 \mod N$ puisque $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, les g intervenant dans la somme définissant ψ s'écrivent $g = adh + Nf$, où f parcourt $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^r$.

Ainsi

$$\psi(h) = \sum_{f\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^r} e^{2i\pi\frac{bQ(adh+Nf)}{dN^2}} = e^{2i\pi\frac{a^2dbQ(h)}{N^2}} \sum_{f\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^r} e^{2i\pi\frac{bQ(f)}{d}}$$

puisque $Ah \equiv 0 \mod N$, et pour cette même raison, puisque $ad \equiv 1 \mod N$,

$$\psi(h) = e^{2i\pi\frac{abQ(h)}{N^2}} \sum_{f\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^r} e^{2i\pi\frac{bQ(f)}{d}}.$$

Par conséquent, nous obtenons enfin

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N), \quad \vartheta(z; P, Q, h) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = e^{\frac{2i\pi abQ(h)}{N^2}} \chi(b,d)\vartheta(z; Q, P, ah),$$

et il ne nous reste plus qu'à démontrer que

$$\chi(b,d) = d^{-k} \sum_{g\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^r} e^{\frac{2i\pi bQ(g)}{d}}$$

ne dépend que de d et est un caractère réel modulo N.

Prenons tout d'abord un entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$, et faisons agir

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N).$$

Nous obtenons $\chi(b,d) = \chi(b+na, d+nc)$; par conséquent, $\chi(b,d)$ appartient à la $d+nc$-ème extension cyclotomique $\mathbb{Q}\big(e^{\frac{2i\pi}{d+nc}}\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc il est rationnel. Comme b et d sont premiers entre eux puisque $ad - bc = 1$, nous disposons de l'automorphisme

$$\big(\sigma\colon e^{\frac{2i\pi b}{d}} \longmapsto e^{\frac{2i\pi}{d}}\big) \in Gal\big(\mathbb{Q}(e^{\frac{2i\pi}{d}})/\mathbb{Q}\big) \simeq (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^{inv},$$

et, en écrivant que $\chi(b,d)$ est fixé par σ car rationnel, nous obtenons

$$\chi(b,d) = \chi(1,d) =: \varepsilon(d).$$

L'identité $\chi(b,d) = \chi(b+na, d+nc)$ montre alors que $\varepsilon(d)$ ne dépend que de $d \mod c$. Or si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ Nc_1 & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, alors

$\begin{pmatrix} a & bc_1 \\ N & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ aussi, si bien que nous pouvons supposer que $c = N$, et donc $\varepsilon(d)$ ne dépend que de $d \mod N$.

Ensuite, puisque d est premier avec N puisque $ad - bNc_1 = 1$, le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet nous autorise à considérer un nombre premier impair p tel que $p \equiv d \mod N$. En remarquant que le résidu modulo p de Q se diagonalise sur le corps fini à p éléments $\mathbb{F}_p$, mettons

$$Q(y) \equiv \sum_{j=1}^{r} a_j y_j^2 \mod p, \quad y = Px, \quad P \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{F}_p),$$

où les a_j sont des entiers relatifs, le calcul se trouve grandement simplifié :

$$\varepsilon(d) = \varepsilon(p) = p^{-k} \sum_{x \in \mathbb{F}_p^r} e^{\frac{2i\pi Q(x)}{p}} = p^{-k} \sum_{y \in \mathbb{F}_p^r} e^{\frac{2i\pi \sum_{j=1}^r a_j y_j^2}{p}}$$

$$= p^{-k} \sum_{y \in \mathbb{F}_p^r} \prod_{j=1}^{r} e^{\frac{2i\pi a_j y_j^2}{p}} = p^{-k} \prod_{j=1}^{r} \sum_{z \in \mathbb{F}_p} e^{\frac{2i\pi a_j z^2}{p}} = p^{-k} \prod_{j=1}^{r} \tau(a_j)$$

où $\tau(a) = \sum_{z \in \mathbb{F}_p} e^{\frac{2i\pi a z^2}{p}}$ est une somme de Gauss. Comme nous savons que $\tau(a) = \left(\frac{a}{p}\right) \tau(1)$, où $\left(\frac{a}{p}\right)$ est le *symbole de Legendre*, et que $\tau(1)^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) p$, nous en déduisons que

$$\varepsilon(d) = \varepsilon(p) = p^{-k} \prod_{j=1}^{r} \left(\frac{a_j}{p}\right) \tau(1) = p^{-k} p^k \left(\frac{-1}{p}\right)^k \left(\frac{\prod_{j=1}^r a_j}{p}\right) = \left(\frac{(-1)^k \det Q}{p}\right)$$

car $\det Q \equiv \prod_{j=1}^r 2a_j \mod p$ et $r = 2k$ est pair. Par conséquent,

$$\varepsilon(d) = \left(\frac{(-1)^k \det Q}{d}\right),$$

où $\left(\frac{a}{d}\right)$ désigne cette fois le symbole de Jacobi.

$\square$

En nous restreignant à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$, nous déduisons immédiatement de ce théorème le

Corollaire 2.6.

$$\vartheta(z;Q,P,h)|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \vartheta(z;Q,P,h)$$

pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$.

Autrement dit, $\vartheta(z;Q,P,h)$ *est modulaire de poids* $k+\nu$ *sur* $\Gamma(N)$. *Si* $\nu > 0$*, c'est une forme parabolique.*

Notons que la remarque faite après la définition de $\vartheta(z;Q,P,h)$ montrait déjà que nous ne pouvions guère espérer une modularité sur Γ tout entier, mais plutôt sur $\Gamma(N)$. Ainsi, pour obtenir une modularité sur Γ, mieux vaut se restreindre aux formes quadratiques de niveau $N = 1$. Le théorème suivant nous indique où les chercher et comment les trouver.

Théorème 2.7. *Une forme quadratique entière sur* $\mathbb{R}^r$ *est de niveau* 1 *si et seulement si son déterminant est égal à* 1*, et ceci n'est possible que si* r *est un multiple de* 8.

Démonstration. La première assertion a déjà été énoncée dans le corollaire 1.3. Ensuite, notons Q la forme quadratique en question. Le théorème 2.5 nous dit que la fonction Thêta associée est modulaire de poids k sur Γ, tandis que la proposition 2.2 affirme que cette même fonction Thêta vérifie l'équation fonctionnelle

$$\vartheta(z;Q) = \left(\frac{i}{z}\right)^k \vartheta\left(\frac{-1}{z};Q\right).$$

Comme $\vartheta(z;Q)$ est non identiquement nulle, puisqu'elle vaut 1 à l'infini, sa modularité entraîne alors que k est divisible par 4. $\square$

Ce dernier résultat illustre comment la théorie des formes modulaires appliquée aux fonctions Thêta permet de déduire des résultats sur les formes quadratiques entières. Étudions à présent quelques autres conséquences de la modularité des fonctions Thêta.

2.3 Application à la représentation des entiers par les formes quadratiques entières

Puisqu'il y a « peu »de formes modulaires, la modularité des fonctions Thêta est riche de conséquences. Entre autres, nous l'avons déjà vu, la fonction Thêta associée à une forme quadratique entière de niveau $N = 1$ sera modulaire sur le groupe modulaire Γ tout entier, avec toutes les conséquences que cela implique. Pour trouver de telles formes, nous savons d'après le thorème 2.7 qu'il est nécessaire de se restreindre à des valeurs de r divisibles par 8.

Par exemple, prenons $r = 8$, et donc $k = 4$, et posons

$$Q_8(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 8} x_i x_j - x_1 x_2 - x_2 x_8.$$

Un calcul montre que $\det(Q_8) = 1$; ainsi Q_8 est de niveau 1. On en déduit que la fonction Thêta associée

$$\vartheta(z; Q_8) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^8} q^{Q_8(n)}$$

est modulaire de poids $k = 4$ sur Γ. Or nous savons que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes modulaires de poids 4 sur Γ est de dimension 1, et qu'il est engendré par la *série d'Eisenstein*

$$E_4(z) = \frac{45}{\pi^4} \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^4} = 1 + 240 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_3(n) q^n;$$

par conséquent, $\vartheta(\cdot; Q_8)$ et E_4 sont proportionnelles, et comme elles valent toutes les deux 1 en $q = 0$, on a nécessairement

$$\vartheta(\cdot; Q_8) = E_4.$$

En comparant les coefficients, nous pouvons en déduire que le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}^8$ de l'équation $Q_8(x) = m$ est donné par

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \qquad R_{Q_8}(m) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m < 0, \\ 1 & \text{si} \quad m = 0, \\ 240\sigma_3(m) & \text{si} \quad m > 0. \end{cases}$$

Nous trouverions de même pour $r = 16$ que si Q_{16} est une forme quadratique entière de niveau 1 sur $\mathbb{R}^{16}$, alors

$$\vartheta(z; Q_{16}) = E_8(z) = \frac{4725}{\pi^8} \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\\(m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^8} = 1 + 480 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_7(n) q^n$$

et donc que

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \qquad R_{Q_{16}}(m) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m < 0, \\ 1 & \text{si} \quad m = 0, \\ 480\sigma_7(m) & \text{si} \quad m > 0. \end{cases}$$

Pour $r = 24$, Carl Siegel a démontré l'existence de deux formes quadratiques entières Q_{24} et Q'_{24} de niveau 1 sur $\mathbb{R}^{24}$ dont les fonctions Thêta sont différentes. Comme elles valent toutes les deux 1 en $q = 0$, leur différence est donc un multiple de « la »forme parabolique de poids 12

$$\Delta(z) = q \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n) q^n,$$

où τ désigne la *fonction de Ramanujan*, qui est donc un multiple de la différence $R_{Q_{24}} - R_{Q'_{24}}$.

Plus généralement, puisque la fonction Thêta associée à une forme quadratique entière de niveau 1 sur $\mathbb{R}^r$ vaut 1 en $q = 0$, elle s'écrit comme somme de la série d'Eisenstein

$$E_k(z) = 1 + \gamma_k \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

et d'une forme parabolique

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n,$$

où $\gamma_k = (-1)^{k/2} \frac{2k}{B_{k/2}} = \frac{2k}{B_{k/2}}$ puisque $4|k$. D'après le théorème de Hecke, $a_n = \mathcal{O}(n^{r/4})$ puisque f est parabolique ; on en déduit que le comportement asymptotique quand $m \to +\infty$ de $R_Q(m)$ est

$$R_Q(m) = \gamma_k \sigma_{k-1}(m) + \mathcal{O}(m^{r/4}).$$