

Tópicos de Geometria Elementar

Nuno Arala

Prefácio

Estas notas foram inspiradas na disciplina *Complementos de Geometria* leccionada no ano lectivo 2017/2018 pelo Professor Paulo Ventura Araújo na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Esse curso distinguiu-se em pelo menos um aspecto de todos os outros cursos de Geometria a que assisti como estudante. Num meio matemático, a palavra “Geometria” tem, geralmente, uma de duas interpretações: ou se refere a algum parente próximo da Geometria Euclidiana clássica; ou se refere a alguma das formas de Geometria prevalecentes na visão moderna da área (Geometria Diferencial, Geometria Algébrica, Geometria Simplética, etc.). Tive a sorte de contactar com a Geometria do primeiro tipo através dos problemas divertidos de Geometria que resolvi como preparação para diversas Olimpíadas de Matemática antes de iniciar o meu percurso no ensino superior. E, já como aluno universitário, frequentei algumas disciplinas dedicadas às Geometrias modernas do segundo tipo. Mas essas duas vertentes são apresentadas, em geral, como universos distintos sem nenhuma espécie de ligação. Foi nesse aspecto (entre outros) que o curso do Professor Paulo Araújo se distinguiu: fez, de maneira magistral, a ligação entre esses dois universos. O material coberto foi genuinamente interessante para um apreciador de Geometria clássica, mostrando ao mesmo tempo como métodos modernos a iluminam de uma maneira que Euclides não poderia ter entendido.

Tendo em conta que este texto se inspira num curso estruturado com singular cuidado, as excelentes notas que pude colher das aulas simplificaram grandemente o meu trabalho ao escrevê-lo; a estrutura do texto reflecte em grande parte a estrutura do curso. O material apresentado é essencialmente o material do curso exposto por palavras minhas e segundo a minha maneira particular de o ver; incluí um ou outro tópico/exemplo que não foi coberto na disciplina e a exposição não segue sempre as mesmas linhas, e além disso optei por incluir no corpo do texto alguns resultados que nos foram deixados como exercícios, mas o esqueleto do texto coincide com o esqueleto da disciplina que frequentei. Os exercícios são em grande parte os que foram propostos aos alunos da disciplina, juntamente com alguns inventados por mim próprio, e ainda outros extraídos do mundo das competições olímpicas de Matemática; tendo eu tido o privilégio de contactar com esses problemas durante os meus anos no ensino secundário, seria uma pena não os aproveitar para enriquecer este texto, havendo tantos desses problemas com que os tópicos aqui abordados se relacionam de maneira natural.

O ênfase das notas é dado à Geometria Afim e à Geometria Projectiva, abordadas em detalhe nos capítulos 1 e 3. O capítulo 2 explora as circunferências no plano Euclidiano de modo a desenvolver as ferramentas que permitem, posteriormente, explorar as relações entre elas e a Geometria Projectiva. Os capítulos 4 e 5 são dedicados ao estudo das cónicas; o primeiro utilizando apenas métodos clássicos juntamente com alguma Geometria Analítica, e o segundo utilizando métodos projectivos.

Foi um prazer revisitar todo este material fascinante com vista à elaboração deste texto. Escrevo-o esperando proporcionar a outros a satisfação que eu tive quando aprendi sobre estes assuntos pela primeira vez.

Pré-requisitos

Tendo em conta a sua origem, este texto é pensado como um complemento a um curso de Geometria Euclidiana clássica. Assim, o texto pressupõe familiaridade com Geometria Plana elementar, bem como com alguma Geometria Analítica no plano e no espaço. Pressupõe ainda à-vontade com Álgebra Linear, ao nível da que é habitualmente ensinada no primeiro ano de uma licenciatura em Matemática.

No capítulo sobre Geometria Afim, quando possível, optei por desenvolver a teoria sobre um corpo arbitrário em vez de me limitar a corpos “concretos” como \mathbb{R} ou \mathbb{C} . No entanto, não é de todo essencial ter conhecimentos de Álgebra Abstracta (como teoria de Grupos, Anéis e Corpos) para ler este texto! Quem não estiver à vontade com a estrutura abstracta de corpo apenas tem de se restringir ao caso em que os corpos indicados são \mathbb{R} ou \mathbb{C} , substituindo mentalmente expressões como “seja V um espaço vectorial sobre um corpo \mathbb{K} ” por “seja V um espaço vectorial real”, e ignorando digressões ocasionais sobre outros corpos destinados a leitores com mais conhecimentos de Álgebra.

Agradecimentos

Agradeço, muito em especial, ao Professor Paulo Araújo pelo excelente curso leccionado que motivou este texto; foi sem dúvida um dos meus cursos favoritos. Agradeço também à Inês Guimarães pelas discussões enriquecedoras sobre muitos dos exercícios que deixo propostos.

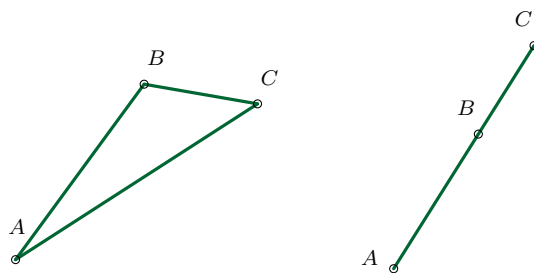
Índice

1 Geometria Afim	1
1.1 Combinações lineares de pontos	3
1.2 A estrutura abstracta de espaço afim	6
1.3 Subespaços afins	11
1.4 Rectas afins, quocientes afins e o Teorema de Tales	13
1.5 Coordenadas afins e os Teoremas de Menelau e Ceva	16
1.6 Transformações afins	24
1.7 O plano afim $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$	30
1.8 Homotetias, translações e os Teoremas afins de Desargues e Pappus	32
1.9 O Teorema Fundamental da Geometria Afim	35
1.10 Exercícios e Problemas	42
2 Circunferências no plano Euclidiano	45
2.1 Intersecções de rectas e circunferências	45
2.2 Potência de Ponto e circunferências ortogonais	48
2.3 Feixes de circunferências	54
2.4 Inversão	60
2.5 Exercícios e Problemas	72
3 Geometria Projectiva	73
3.1 Rectas projectivas e Transformações de Möbius	75
3.2 O plano projectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$	85
3.3 Divisão harmónica	90
3.4 Homografias e os Teoremas de Desargues e Pappus	92
3.5 Homografias entre rectas em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$	102
3.6 Polaridade em relação a uma circunferência	104
3.7 O Teorema Fundamental da Geometria Projectiva	111
3.8 Exercícios e Problemas	113
4 Cónicas no plano Euclidiano	115
4.1 Foco, recta directriz e excentricidade	117
4.2 O Teorema de Dandelin	124
4.3 Intersecções de rectas e cónicas	128
4.4 Exercícios e Problemas	136
5 Cónicas no plano projectivo complexo	137
5.1 Cónicas como curvas algébricas de grau 2	138
5.2 Matriz de uma cónica	141
5.3 Polaridade em relação a uma cónica	149
5.4 Homografias de cónicas e os Teoremas de Pascal e Brianchon	153

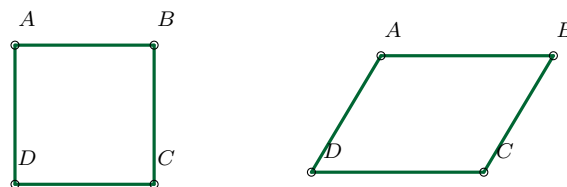
5.5	Exercícios e Problemas	159
-----	----------------------------------	-----

1 Geometria Afim

Em termos informais, a Geometria Afim é o que resta da Geometria Euclidiana quando esqueçamos os conceitos de distância e ângulo, mas mantemos as noções de colinearidade e paralelismo. Assim, por exemplo, a Geometria Afim está interessada nas diferenças entre as figuras



mas é cega à diferença entre as figuras



Em Geometria Euclidiana estudam-se (entre outras coisas) isometrias do plano \mathbb{R}^2 , ou mais geralmente do espaço euclidiano \mathbb{R}^n , que são transformações desses espaços que preservam distâncias. Uma vez que a Geometria Afim não liga a esses conceitos métricos, no seu estudo podemos dar-nos ao luxo de introduzir transformações mais gerais, das quais exigimos menos - as chamadas transformações afins. No caso do segundo par de figuras acima, haverá uma transformação afim que envia a figura do lado esquerdo na figura do lado direito, embora não exista uma isometria que o faça, pois do lado esquerdo $ABCD$ é um quadrado mas do lado direito não é. De facto, motivado pelo “Programa de Erlangen” proposto por Felix Klein no final do século XIX, existe uma tentativa de ver cada Geometria como o estudo das propriedades de um objecto ou classe de objectos que não se alteram quando se aplica uma transformação de um certo tipo. Quanto mais “liberdade” dermos às transformações, menos propriedades preservadas vamos ter. Este ponto de vista, aparentemente muito abstracto, vai parecer mais natural (espero) quando virmos como “encaixa” com a nossa visão da Geometria Afim e da Geometria Projectiva, bem como da hierarquia que existe entre elas.

O nosso primeiro objectivo será definir o tipo de estrutura onde queremos estudar Geometria Afim. Embora possamos desenvolver toda a teoria apenas nos espaços “clássicos” onde estamos

habituaados a fazer Geometria (o plano \mathbb{R}^2 , ou mais geralmente o espaço euclidiano \mathbb{R}^n) há vantagens em adoptar um ponto de vista mais abstracto e trabalhar em espaços mais gerais. Pensemos por exemplo na Álgebra Linear; embora a sua motivação inicial seja a resolução de sistemas de equações lineares, cujas soluções “vivem” em \mathbb{R}^n , sabemos que a ”maneira correcta” de estudar Álgebra Linear passa por introduzir a estrutura abstracta de espaço vectorial, que abstrai de \mathbb{R}^n as propriedades que realmente interessam para o tipo de problema que estamos a considerar. O mesmo modo de pensar aplicado à Geometria Afim conduz naturalmente ao conceito de espaço afim. Mas o exemplo da Álgebra Linear não é arbitrário: vamos ver que a Geometria Afim é uma espécie de irmã gémea da Álgebra Linear, e para cada conceito de Álgebra Linear existe um conceito análogo em Geometria Afim. A próxima secção é essencialmente informal e tenta motivar esta noção de espaço afim; nesta secção não daremos definições rigorosas nem seremos sempre totalmente precisos em relação aos objectos com que estamos a trabalhar.

§1.1 Combinações lineares de pontos

Consideremos a seguinte pergunta meta-matemática:

Existe alguma maneira natural de definir a soma de dois pontos do plano?

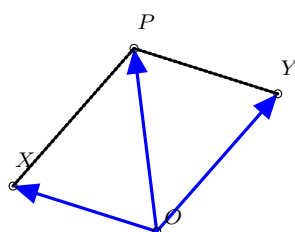
Portanto são-nos dados dois pontos X e Y no plano e queremos saber se existe algum ponto P para o qual “faça sentido” dizer que $P = X + Y$. A princípio a pergunta parece absurdamente simples; parece óbvio que a resposta é sim. Afinal, aprendemos na escola que cada ponto se representa por um par de números reais; ora se X é o ponto (a, b) e Y é o ponto (c, d) , parece óbvio que o ponto $X + Y$ deverá ser o ponto $(a + c, b + d)$! Só temos que somar as abcissas e as ordenadas, por exemplo, se $X = (2, 3)$ e $Y = (1, 5)$ então $X + Y = (3, 8)$! Fácil.

Mas vamos agora colocar uma variante da mesma pergunta.

São dados os pontos X e Y assinalados abaixo. Onde fica o ponto $X + Y$?



Como podemos encontrar $X + Y$ no desenho? Bem, sendo O a origem, nós estamos à procura do ponto P tal que o *vector* \overrightarrow{OP} é a soma dos vectores \overrightarrow{OX} e \overrightarrow{OY} , ou seja, estamos à procura do ponto P tal que $OXPY$ é um paralelogramo.



Mas, para descobrir P , precisamos de saber primeiro onde está O ! Temos de responder à pergunta com outra pergunta:

Onde está a origem?

O problema é que estamos habituados a tratar pontos como se fossem vectores, associando a cada ponto o vector que liga a origem a esse ponto. Se tivermos realmente uma correspondência natural entre pontos e vectores, se quisermos somar pontos só temos que somar os vectores

correspondentes. Mas a correspondência que temos está dependente da escolha da origem! Ou seja, para dar vida à definição de soma de dois pontos que tínhamos inicialmente proposto, precisamos primeiro de escolher um ponto para ser a origem. E esse ponto pode ser qualquer! Não há nenhuma razão para um ponto em particular ter mais direito a ser a origem do que outro. Para dar um significado geométrico à definição de soma de dois pontos que propusemos, temos de começar por seleccionar um ponto ao acaso para ter um “papel especial”. Não há nenhuma escolha *natural*, e isso deixa algum desconforto.

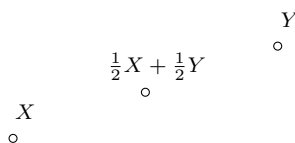
Portanto, não há nada a fazer? Bem, vamos tentar responder a uma questão um pouco mais geral. Suponhamos que, em vez de nos limitarmos a procurar uma interpretação razoável para a soma de dois pontos, queremos definir, mais geralmente, combinações lineares de pontos, dar sentido a expressões da forma $aX + bY$ onde X e Y são pontos e a e b são números reais, ou, quem sabe, até combinações lineares com mais parcelas. Qual é o ponto $3X + 7Y$? E o ponto $\frac{5}{2}X - Y$?

À primeira vista pode parecer que, se a nossa questão inicial não tinha nenhuma resposta natural, então também nenhuma destas vai ter. Mas vamos voltar a considerar o exercício de desenho anterior, com uma ligeira alteração:

São dados os pontos X e Y assinalados abaixo. Onde fica o ponto $\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y$?



Um raciocínio com coordenadas semelhante ao anterior leva-nos a definir o ponto $\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y$ como o ponto médio do segmento XY . Ora, para encontrar o ponto médio do segmento XY , saber onde está a origem é totalmente desnecessário!



Então parece que algumas combinações lineares de pontos “fazem sentido geometricamente”, mas outras não. Vamos investigar este fenómeno em detalhe nas próximas secções, ver que combinações lineares de pontos “não dependem da origem”. E, nos casos em que podemos de facto representar alguns pontos como combinação linear de outros pontos “de maneira natural”, vamos conhecer algumas vantagens em representar pontos desta maneira; isto vai levar-nos à ideia de coordenadas afins (ou baricêntricas).

Para concluir esta secção, vamos ver como de uma formalização apropriada desta ideia resulta quase de graça um resultado geométrico clássico.

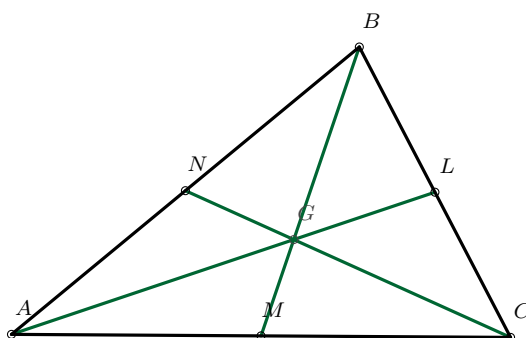
Observe-se que, se X e Y são pontos, e k é um número real qualquer, temos

$$(1 - k)X + kY = X + k(Y - X) = X + k\overrightarrow{XY},$$

ou seja, o ponto $(1 - k)X + kY$ é obtido começando no ponto X , “olhando” para o ponto Y e “percorrendo” k vezes a distância necessária para chegar ao ponto Y . Não precisamos de saber onde está a origem para fazer nada disso! Portanto combinações lineares da forma $(1 - k)X + kY$ são “admissíveis” do nosso ponto de vista, e resultam em pontos que estão na recta que passa por X e Y .

Com isto,

Teorema 1.1.1. *Num triângulo qualquer, as três rectas que unem um vértice ao ponto médio do lado oposto são concorrentes (têm um ponto em comum).*



Demonstração. Sejam A , B e C os vértices do triângulo em causa. Sejam L , M e N os pontos médios dos segmentos BC , CA e AB , respectivamente. Então $L = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$.

Considere-se o ponto $G = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}L$. Este ponto pertence à recta que passa por A e L pela nossa observação anterior, e

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C \right) = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C.$$

De modo análogo, o ponto $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ também é igual a $\frac{1}{3}B + \frac{2}{3}M$ e a $\frac{1}{3}C + \frac{2}{3}N$. Logo esse ponto está também nas rectas BM e CN . Assim, AL , BM e CN são concorrentes em G . \square

§1.2 A estrutura abstracta de espaço afim

A ideia a ter em mente é a seguinte:

Um espaço afim é um espaço vectorial em que nos esquecemos de onde está a origem.

Os elementos de um espaço afim devem ser pensados como **pontos**, não como **vectores**; mas dados quaisquer dois pontos A e B sabemos como nos deslocar de A para B , e essa informação é-nos dada por um vector \overrightarrow{AB} , que pode ser pensado como a diferença $B - A$ e vive num espaço vectorial.

A definição rigorosa é a seguinte:

Definição 1.2.1. Um espaço afim é um triplete $(\mathcal{E}, \mathcal{V}, \varphi)$ tal que \mathcal{E} é um conjunto, \mathcal{V} é um espaço vectorial, e

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{V} \\ (A, B) &\mapsto \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

é uma aplicação que a um par de pontos em \mathcal{E} faz corresponder um vector em \mathcal{V} , com as seguintes propriedades:

- (i) Existe um ponto $A \in \mathcal{E}$ tal que a aplicação $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}, P \mapsto \overrightarrow{AP}$ é bijectiva;
- (ii) Para quaisquer pontos P, Q e R em \mathcal{E} , tem-se $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Observação 1.2.2. A condição (i) pode parecer estranha por envolver um “ponto especial” A , quando parecia mais natural exigir essa condição para *qualquer* ponto $A \in \mathcal{E}$. Acontece que da definição anterior decorre que qualquer outro ponto tem a mesma propriedade. De facto, considere-se qualquer ponto $B \in \mathcal{E}$. Então a aplicação $P \mapsto \overrightarrow{BP}$ envia P em $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}$, sendo também bijectiva uma vez que é obtida da aplicação em (i) adicionando um vector constante (\overrightarrow{BA}) a todas as imagens. Informalmente, isto diz-nos que se fixarmos um ponto (uma “origem”), obtemos uma correspondência natural entre pontos de \mathcal{E} e vectores de \mathcal{V} .

Habitualmente cometemos o desculpável abuso de notação de chamar espaço afim ao conjunto \mathcal{E} e não ao triplete $(\mathcal{E}, \mathcal{V}, \varphi)$. Neste caso dizemos que \mathcal{V} é o **espaço vectorial associado** a \mathcal{E} .

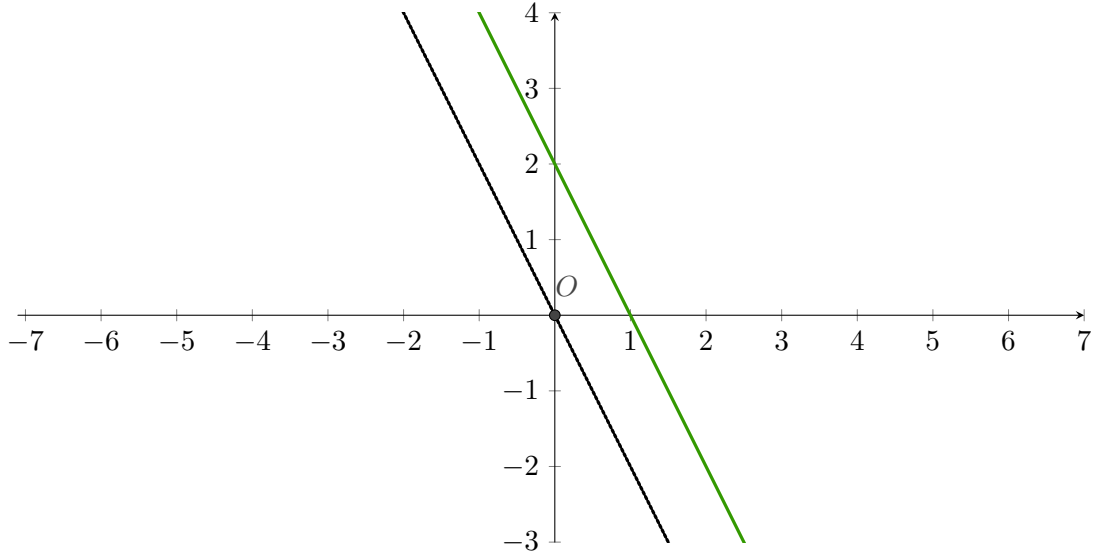
Exemplo 1.2.3. (i) Qualquer espaço vectorial \mathcal{V} é automaticamente um espaço afim, sendo o espaço vectorial associado o próprio \mathcal{V} e a aplicação φ dada por $\varphi(v, w) = w - v$.

(ii) Sejam \mathcal{V} um espaço vectorial e \mathcal{W} um subespaço de \mathcal{V} . Dado $A_0 \in \mathcal{V}$, o conjunto

$$A_0 + \mathcal{W} = \{A_0 + w : w \in \mathcal{W}\}$$

é um espaço afim, com \mathcal{W} como espaço vectorial associado e $\varphi(v, w) = w - v$.

O exemplo (ii) dá-nos os protótipos mais típicos de espaços afins; hiperplanos em \mathbb{R}^n que não passam necessariamente pela origem. Por exemplo, qualquer recta em \mathbb{R}^2 é naturalmente um espaço afim, embora só as rectas que passam pela origem sejam subespaços vectoriais de \mathbb{R}^2 . Abaixo representamos a recta em \mathbb{R}^2 de equação $2x + y = 2$, que é o conjunto dos pontos da forma $(1, 0) + (t, -2t)$ com $t \in \mathbb{R}$, e é portanto um espaço afim com espaço vectorial associado a recta $\{(t, -2t) : t \in \mathbb{R}\}$, de equação $2x + y = 0$.



Definição/Notação 1.2.4. Na Observação 1.2.2 vimos que a propriedade (i) da Definição 1.2.1 é válida para *qualquer* $A \in \mathcal{E}$. Assim, dado um espaço afim \mathcal{E} com espaço vectorial associado \mathcal{V} , e dados $A \in \mathcal{E}$ e $u \in \mathcal{V}$, existe um único ponto $P \in \mathcal{E}$ para o qual $\overrightarrow{AP} = u$. Designamos esse ponto por $A + u$.

Proposição 1.2.5 (Associatividade). *Sejam $A \in \mathcal{E}$ e $u, v \in \mathcal{V}$ quaisquer. Então*

$$(A + u) + v = A + (u + v).$$

Demonstração. Seja $B = A + u$ e seja $C = (A + u) + v = B + v$. Então, por definição, temos

$$u = \overrightarrow{AB} \text{ e } v = \overrightarrow{BC}.$$

Portanto,

$$u + v = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Novamente por definição, resulta que $C = A + (u + v)$, concluindo a prova. \square

Esta propriedade é por vezes usada como axioma numa definição alternativa de espaço afim, como dado por um conjunto \mathcal{E} , um espaço vectorial \mathcal{V} , e uma aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{E} \\ (A, u) &\mapsto A + u \end{aligned}$$

que verifica a Proposição 1.2.5 e tal que, para algum $B \in \mathcal{E}$, a aplicação $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{E}$, $u \mapsto B + u$ é bijectiva. Leitores com paciência e particularmente interessados nestes aspectos axiomáticos

estão à vontade para provar que as duas definições são equivalentes. Damos agora mais algumas “regras de cálculo”; se alguma destas fosse falsa, então haveria algo de muito errado com a nossa definição de espaço afim.

Proposição 1.2.6.

- (i) Dados $A, B \in \mathcal{E}$, tem-se $\overrightarrow{AB} = 0$ se e só se $A = B$.
- (ii) Dados $P, Q \in \mathcal{E}$, tem-se $P + u = Q + v$ se e só se $\overrightarrow{QP} = v - u$ (note-se que a primeira é uma igualdade em \mathcal{E} , e a segunda é uma igualdade em \mathcal{V}).

Demonstração. Para provar (i), observe-se que se $A = B$ então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$, e $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$. Esta é uma igualdade em \mathcal{V} que implica $\overrightarrow{AA} = 0$, i.e., $\overrightarrow{AB} = 0$. Suponha-se agora que $\overrightarrow{AB} = 0$. Então, pelo que já provámos, temos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$. Como a aplicação $P \mapsto \overrightarrow{AP}$ é injectiva, concluímos que $B = A$.

Para provar (ii), observe-se que, por (i), a condição $P + u = Q + v$ equivale a que o vector $\overrightarrow{(Q+v)(P+u)}$ seja nulo. Ora este vector é o único vector w tal que $(Q+v) + w = P+u$. Afirmamos que $w = \overrightarrow{QP} - v + u$. De facto,

$$(Q+v) + (\overrightarrow{QP} - v + u) = Q + (v + \overrightarrow{QP} - v + u) = Q + (\overrightarrow{QP} + u) = P + u.$$

Como $P + u = Q + v$ se e só se $w = 0$, tem-se $P + u = Q + v$ se e só se $\overrightarrow{QP} - v + u = 0$, que equivale ao pretendido. \square

Vamos agora abordar finalmente a questão que usámos para motivar, na secção anterior, a definição de espaço afim. Suponhamos que \mathcal{E} é um espaço afim com espaço vectorial associado \mathcal{V} sobre um corpo \mathbb{K} qualquer (como sempre neste texto, leitores que não estejam à vontade com a estrutura abstracta de corpo estão à vontade para supor que o corpo \mathbb{K} é \mathbb{R} ou \mathbb{C}). Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ elementos de \mathbb{K} . Queremos responder à seguinte questão:

Quando é que, para quaisquer pontos $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$, faz sentido definir um ponto como a combinação linear de pontos

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k?$$

Bem, se o nosso espaço afim tivesse uma origem, digamos O , já tínhamos visto que o candidato natural para ser o ponto $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k$ seria o ponto P tal que

$$\overrightarrow{OP} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k}.$$

Ou seja, seria o ponto

$$O + \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k}.$$

Mas o nosso espaço afim não tem nenhum ponto “melhor que os outros”; todos têm igual direito a ser a origem. Ou seja, o único caso em que a expressão anterior dá uma definição razoável

para $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k$ é o caso em que a expressão dá o mesmo ponto qualquer que seja o ponto O utilizado. Em resumo, queremos ver quando é que

$$O + \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k} = O' + \lambda_1 \overrightarrow{O'A_1} + \lambda_2 \overrightarrow{O'A_2} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{O'A_k}$$

para quaisquer pontos $O, O' \in \mathcal{E}$.

Mas isto é uma conta simples; pela Proposição 1.2.6(ii) sabemos que tal ocorre se e só se

$$\overrightarrow{O'O} = (\lambda_1 \overrightarrow{O'A_1} + \lambda_2 \overrightarrow{O'A_2} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{O'A_k}) - (\lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k}).$$

Podemos simplificar a expressão do lado direito: ela é igual a $\lambda_1(\overrightarrow{O'A_1} - \overrightarrow{OA_1}) + \lambda_2(\overrightarrow{O'A_2} - \overrightarrow{OA_2}) + \dots + \lambda_k(\overrightarrow{O'A_k} - \overrightarrow{OA_k})$. Ora cada termo $\overrightarrow{O'A_j} - \overrightarrow{OA_j}$ é simplesmente igual a $\overrightarrow{O'O}$, já que $\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_j} = \overrightarrow{O'A_j}$! E portanto a expressão do lado direito fica simplesmente $(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)\overrightarrow{O'O}$.

Assim, queremos ver quando é que

$$\overrightarrow{O'O} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)\overrightarrow{O'O}$$

para quaisquer $O, O' \in \mathcal{E}$. Obviamente isto acontece precisamente quando $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$! E portanto a nossa combinação linear de pontos faz sentido precisamente quando a soma dos coeficientes é igual a 1. Para resumir tudo isto, obtemos

Proposição/Definição 1.2.7. Seja \mathcal{E} um espaço afim associado a um espaço vectorial \mathcal{V} sobre o corpo \mathbb{K} , e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tais que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$. Então, para quaisquer $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{E}$, o ponto

$$O + \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k}$$

não depende da escolha de O . Designamos esse ponto por

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k.$$

Uma expressão como a anterior diz-se uma *combinação afim* de A_1, A_2, \dots, A_k .

Vamos ver mais adiante algumas vantagens de representar pontos como combinação afim de outros pontos. Mas, antes disto, vamos ver um outro caso em que a expressão $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k$ tem uma interpretação razoável, mas desta vez como um vector de \mathcal{V} e não como um ponto de \mathcal{E} .

Proposição/Definição 1.2.8. Seja \mathcal{E} um espaço afim associado a um espaço vectorial \mathcal{V} sobre o corpo \mathbb{K} , e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tais que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 0$. Então, para quaisquer $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{E}$, o vector

$$\lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k}$$

não depende da escolha de O . Designamos esse vector por

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k.$$

Demonstração. Sejam O e O' pontos de \mathcal{E} . Então

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k}) - (\lambda_1 \overrightarrow{O'A_1} + \lambda_2 \overrightarrow{O'A_2} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{O'A_k}) \\ &= \lambda_1 (\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{O'A_1}) + \lambda_2 (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{O'A_2}) + \cdots + \lambda_k (\overrightarrow{OA_k} - \overrightarrow{O'A_k}) \\ &= \lambda_1 \overrightarrow{OO'} + \lambda_2 \overrightarrow{OO'} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{OO'} = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_k) \overrightarrow{OO'} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

§1.3 Subespaços afins

Antes de entrar neste assunto, vamos estabelecer uma convenção útil:

Definição 1.3.1. A *dimensão* de um espaço afim é a dimensão do espaço vectorial associado.

Definição 1.3.2. Seja \mathcal{E} um espaço afim com espaço vectorial associado \mathcal{V} . Um *subespaço afim* de \mathcal{E} é um conjunto da forma

$$P_0 + \mathcal{W} = \{P_0 + v : v \in \mathcal{W}\}$$

onde P_0 é um ponto de \mathcal{E} e \mathcal{W} é um subespaço vectorial de \mathcal{V} .

Note-se que já tínhamos visto um caso particular desta construção no Exemplo 1.2.3(ii).

Observação 1.3.3.

- (i) Se $\mathcal{F} = P_0 + \mathcal{W}$ é um subespaço afim de \mathcal{E} , então \mathcal{F} também é naturalmente um espaço afim, com espaço vectorial associado \mathcal{W} .
- (ii) À semelhança do que aconteceu com a própria definição de espaço afim, nas condições da alínea anterior tem-se $\mathcal{F} = Q_0 + \mathcal{W}$ para *qualquer* $Q_0 \in \mathcal{F}$. De facto, dado $w \in \mathcal{W}$

$$Q_0 + w = P_0 + (\overrightarrow{P_0Q_0} + w)$$

e temos $\overrightarrow{P_0Q_0} + w \in \mathcal{W}$ já que $\overrightarrow{P_0Q_0} \in \mathcal{W}$. Isto mostra que $Q_0 + \mathcal{W} \subseteq P_0 + \mathcal{W}$. De modo análogo vemos que $Q_0 + \mathcal{W} \subseteq P_0 + \mathcal{W}$.

- (iii) Dois subespaços afins associados ao mesmo subespaço vectorial de \mathcal{V} dizem-se *paralelos*. Se dois subespaços paralelos \mathcal{F} e \mathcal{G} , associados ao subespaço vectorial \mathcal{W} , têm um ponto R_0 em comum, então por (ii) tanto \mathcal{F} como \mathcal{G} são iguais a $R_0 + \mathcal{W}$. Conclui-se que dois subespaços paralelos diferentes não se intersectam.
- (iv) Um espaço afim \mathcal{E} de dimensão n tem subespaços afins de todas as dimensões $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ (os de dimensão 0 são os subconjuntos de \mathcal{E} com um só ponto; o único de dimensão n é o próprio \mathcal{E}). Um subespaço de \mathcal{E} de dimensão $n - 1 = \dim \mathcal{E} - 1$ diz-se um *hiperplano*.

Vamos agora ver o que podemos dizer sobre a dimensão da intersecção de dois subespaços afins, conhecida a dimensão de cada um dos espaços. Comece-se por recordar que, se $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ são subespaços de um espaço vectorial \mathcal{V} , tem-se a igualdade

$$\dim(\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2) = \dim \mathcal{V}_1 + \dim \mathcal{V}_2 - \dim(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2).$$

Isto leva-nos a questionar se ocorre algo análogo para espaços afins. De facto vamos ver que ocorre se os dois subespaços afins tiverem intersecção não vazia, mas essa condição extra é essencial, ao contrário do que acontece com espaços vectoriais; porque a intersecção de dois subespaços afins pode ser vazia, e nesse caso nem sequer é um espaço afim.

Suponha-se que \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 são subespaços afins do espaço afim \mathcal{E} , associado ao espaço vectorial \mathcal{V} , e sejam \mathcal{V}_1 e \mathcal{V}_2 os subespaços vectoriais de \mathcal{V} associados a \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 . Suponha-se que $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \neq \emptyset$ e considere-se um ponto $P_0 \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$. Então $\mathcal{E}_1 = P_0 + \mathcal{V}_1$ e $\mathcal{E}_2 = P_0 + \mathcal{V}_2$ (Observação 1.3.3(ii)),

logo $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = P_0 + (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2)$. Conclui-se que $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ é também um subespaço afim de \mathcal{E} . Além disso,

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) &= \dim(\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2) \\ &= \dim \mathcal{V}_1 + \dim \mathcal{V}_2 - \dim(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) \\ &= \dim(P_0 + \mathcal{V}_1) + \dim(P_0 + \mathcal{V}_2) - \dim(P_0 + (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)) \\ &= \dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_2 - \dim \mathcal{G} \end{aligned}$$

onde $\mathcal{G} = P_0 + (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)$ é o menor subespaço afim de \mathcal{E} que contém \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 .

Sob algumas condições, é possível garantir que dois espaços afins têm intersecção não vazia, e, portanto, que a igualdade anterior se verifica. É o caso do Lema seguinte.

Lema 1.3.4. *Seja \mathcal{E} um espaço afim, e sejam \mathcal{H} um hiperplano de \mathcal{E} e \mathcal{F} um subespaço afim de dimensão maior ou igual a 1. Suponha-se que \mathcal{F} não é paralelo a nenhum subespaço de \mathcal{H} . Então $\mathcal{H} \cap \mathcal{F}$ é não vazio, e é um subespaço afim de dimensão $\dim \mathcal{F} - 1$.*

Demonstração. Seja \mathcal{V} o espaço vectorial associado a \mathcal{E} . Seja \mathcal{U} o subespaço vectorial associado a \mathcal{H} e seja \mathcal{W} o subespaço vectorial associado a \mathcal{F} . A condição de \mathcal{F} não ser paralelo a nenhum subespaço de \mathcal{H} diz-nos que \mathcal{W} não está contido em \mathcal{U} . Logo $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ é um subespaço vectorial de \mathcal{V} que contém estritamente \mathcal{U} . Mas então $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{W}) > \dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{E} - 1$, pois \mathcal{H} é um hiperplano; então $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{W}) \geq \dim \mathcal{V}$, e como $\mathcal{U} + \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ vem que $\mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{V}$.

Sejam agora $P \in \mathcal{H}$ e $Q \in \mathcal{F}$ pontos quaisquer. O vector \overrightarrow{PQ} pertence a $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{W}$ e como tal existem vectores $u \in \mathcal{U}$ e $w \in \mathcal{W}$ tais que $\overrightarrow{PQ} = u + w$. Mas então

$$P + u = Q - w \in \mathcal{H} \cap \mathcal{F}$$

estando provado que $\mathcal{H} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Conclui-se que

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{F}) &= \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{W} - \dim(\mathcal{U} + \mathcal{W}) \\ &= (\dim \mathcal{E} - 1) + \dim \mathcal{W} - \dim \mathcal{E} \\ &= \dim \mathcal{W} - 1 = \dim \mathcal{F} - 1. \end{aligned}$$

como pretendido. □

Corolário 1.3.5. *Num plano afim (isto é, num espaço afim de dimensão 2), quaisquer duas rectas (isto é, quaisquer dois subespaços afins de dimensão 1) não paralelas têm um ponto em comum.*

§1.4 Rectas afins, quocientes afins e o Teorema de Tales

Com a teoria que desenvolvemos até agora, já estamos essencialmente em condições de provar um dos Teoremas clássicos da Geometria Afim, o *Teorema de Tales*. De facto, enunciar e provar esse Teorema será a nossa próxima tarefa. O princípio desta secção destina-se apenas a introduzir uma notação útil que tornará mais fácil enunciar o dito Teorema (entre outros).

No contexto da Geometria Afim, uma recta é, como seria de esperar, um espaço afim de dimensão 1. Dados dois pontos distintos A e B num espaço afim \mathcal{E} , existe sempre uma única recta que é subespaço de \mathcal{E} e os contém a ambos. De facto, o espaço vectorial associado a uma tal recta tem de conter o vector não nulo \overrightarrow{AB} , e como tal, como tem dimensão 1, é necessariamente o espaço gerado por \overrightarrow{AB} , ou seja, o conjunto $\{\lambda\overrightarrow{AB} : \lambda \in \mathbb{K}\}$ (onde \mathbb{K} é, como habitualmente, o corpo dos escalares). A condição de a recta passar por A deixa como única candidata a recta $A + \{\lambda\overrightarrow{AB} : \lambda \in \mathbb{K}\}$. Em suma,

Proposição/Definição 1.4.1. Dados quaisquer dois pontos distintos A e B num espaço afim \mathcal{E} sobre o corpo \mathbb{K} , existe uma única recta contida em \mathcal{E} que contém A e B , e é o conjunto dos pontos da forma

$$A + \lambda\overrightarrow{AB}$$

com $\lambda \in \mathbb{K}$. Representamos essa recta por AB .

Definição 1.4.2. (*Quocientes Afins*) Sejam A, B, C e D pontos num espaço afim \mathcal{E} sobre o corpo \mathbb{K} , com $C \neq D$. Suponha-se que as rectas AB e CD são paralelas. Então AB e CD têm o mesmo espaço vectorial de dimensão 1 associado e, portanto, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$. Nesse caso, define-se

$$\frac{AB}{CD} = \lambda.$$

No caso em que, por exemplo, $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ com a sua estrutura natural de espaço afim, este quociente corresponde à razão entre as distâncias $|AB|$ e $|CD|$, a menos de um sinal que indica se os vectores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} têm o mesmo sentido ou o sentido contrário.

Sejam agora A e B pontos distintos em \mathcal{E} . Como vimos antes, a recta AB é o conjunto dos pontos da forma $A + \lambda\overrightarrow{AB}$, com $\lambda \in \mathbb{K}$. Note-se que isto é igual a

$$\begin{aligned} A + (1 - \lambda)\overrightarrow{AA} + \lambda\overrightarrow{AB} \\ = (1 - \lambda)A + \lambda B \end{aligned}$$

sendo a última igualdade justificada porque, por definição, a combinação afim $(1 - \lambda)A + \lambda B$ é igual a $O + (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$ para *qualquer* ponto O , e em particular para $O = A$. Conclui-se o seguinte:

Proposição 1.4.3. A recta AB é o conjunto dos pontos que são combinação afim de A e B .

Note-se agora que, se $C = (1 - \lambda)A + \lambda B$ é um ponto na recta AB e $\lambda \neq 1$ (ou seja, $C \neq B$) o quociente

$$\frac{AC}{CB}$$

está definido. Vamos ver como é que esse quociente se relaciona com λ .

Proposição 1.4.4. *Se $C = (1 - \lambda)A + \lambda B$, com $\lambda \neq 1$, então*

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\lambda}{1 - \lambda}.$$

A seguir ilustra-se o caso em que $\lambda = \frac{2}{3}$, e em que, portanto, pela Proposição, deverá ter-se $\frac{AC}{CB} = 2$.



Demonstração. A igualdade $\overrightarrow{OC} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$, válida para qualquer $O \in \mathcal{E}$, dá-nos:

- Para $O = A$, $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$;
- Para $O = B$, $\overrightarrow{BC} = (1 - \lambda)\overrightarrow{BA}$, e portanto $\overrightarrow{CB} = (1 - \lambda)\overrightarrow{AB}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \lambda\overrightarrow{AB} \\ &= \lambda \cdot \frac{1}{1 - \lambda} \overrightarrow{CB} \\ &= \frac{\lambda}{1 - \lambda} \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

Portanto $\frac{AC}{CB} = \frac{\lambda}{1 - \lambda}$. □

Conclui-se de imediato o seguinte:

Corolário 1.4.5. *Seja $f : AB \setminus \{B\} \rightarrow \mathbb{K}$ definida por $f(C) = \frac{AC}{CB}$. Então:*

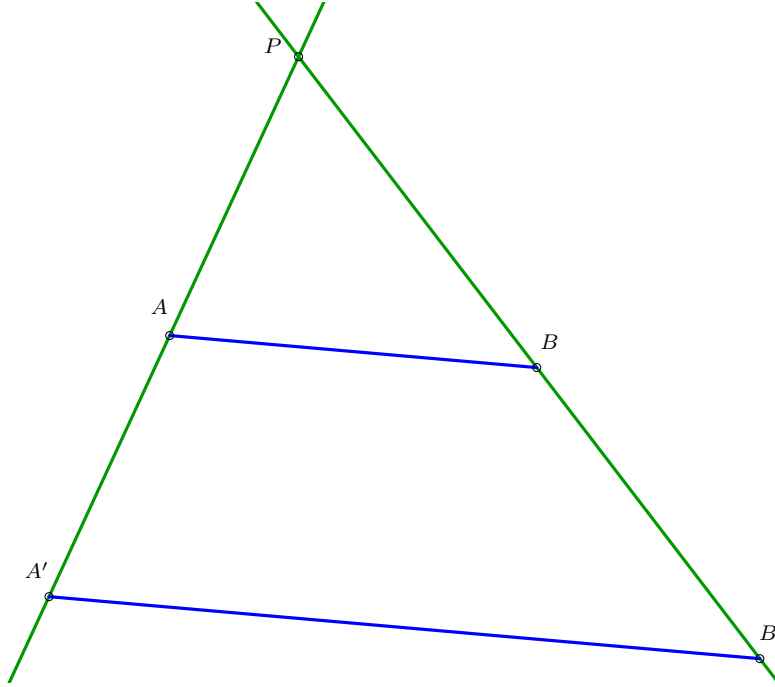
- f é injectiva;
- O contradomínio de f é $\mathbb{K} \setminus \{-1\}$.

Vamos finalmente ver alguma Geometria a acontecer. Ainda não é Geometria muito excitante, mas já se começa a sentir o sabor da Geometria elementar clássica à mistura com a terminologia afim.

Teorema 1.4.6 (Teorema de Tales). *Num espaço afim \mathcal{E} , considerem-se duas rectas distintas r e s concorrentes num ponto P . Sejam A e A' pontos em r , distintos de P , e sejam B e B' pontos em s , também distintos de P . Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB}$;

(ii) As rectas AB e $A'B'$ são paralelas.



Demonstração. Vamos provar as duas implicações em separado.

- (i) \Rightarrow (ii): Seja $\lambda = \frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB}$. Por definição, temos assim $\overrightarrow{PA'} = \lambda\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB'} = \lambda\overrightarrow{PB}$. Assim,

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{PB'} - \overrightarrow{PA'} = \lambda(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}) = \lambda\overrightarrow{AB}.$$

Logo o mesmo espaço vectorial de dimensão 1 está associado às rectas AB e $A'B'$, ou seja, AB e $A'B'$ são paralelas.

- (ii) \Rightarrow (i): Suponha-se agora que AB e $A'B'$ são paralelas. Seja $\lambda = \frac{PA'}{PA}$, e seja B^* o ponto de s tal que $\frac{PB^*}{PB} = \lambda$ (isto é, considera-se $B^* = P + \lambda\overrightarrow{PB}$). Então $\frac{PA'}{PA} = \frac{PB^*}{PB}$, logo, pela implicação já provada, as rectas $A'B^*$ e AB são paralelas. Por transitividade, $A'B^*$ e $A'B'$ são paralelas. Como têm o ponto A' em comum, segue que são a mesma recta. Essa recta contém A' , que não está em s , logo é diferente de s e intersecta s em no máximo um ponto. Mas B^* e B' estão na intersecção dessa recta com s . Logo $B^* = B'$, e assim por construção $\frac{PB'}{PB} = \lambda = \frac{PA'}{PA}$, como pretendido.

□

Observação 1.4.7. Note-se que da prova da primeira implicação decorre também que, se $\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB}$, então $\frac{A'B'}{AB}$ também é igual a esses dois quocientes.

§1.5 Coordenadas afins e os Teoremas de Menelau e Ceva

O nosso objectivo nesta secção é encontrar condições em que qualquer ponto de um espaço afim se pode escrever de maneira única como combinação afim de uma lista de pontos dados. Isto vai conduzir-nos ao conceito de coordenadas afins e, como aplicação, utilizá-las-emos para provar os Teoremas de Menelau e Ceva.

Definição 1.5.1. Seja \mathcal{E} um espaço afim com espaço vectorial associado \mathcal{V} . Dizemos que os pontos $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathcal{E}$ são independentes¹ se os vectores $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}$ são linearmente independentes.

Note-se que esta definição não parece ser simétrica; o ponto P_0 parece ter um papel especial que P_1, \dots, P_n não têm. Mas vamos ver mais tarde que esta ausência de simetria é uma ilusão, e que é possível dar uma definição simétrica equivalente: a independência de uma lista de pontos não depende da forma como os ordenamos.

Chegamos à definição mais importante desta secção:

Definição 1.5.2. Um *referencial afim* de \mathcal{E} é um $(n+1)$ -uplo (P_0, P_1, \dots, P_n) de pontos independentes com $n = \dim \mathcal{E}$.

O interesse desta definição está no seguinte resultado simples:

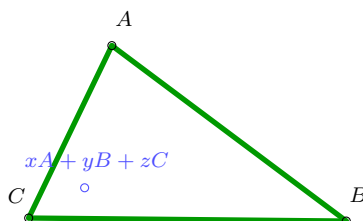
Proposição/Definição 1.5.3. Seja (P_0, P_1, \dots, P_n) um referencial afim de \mathcal{E} . Então todo o ponto $P \in \mathcal{E}$ pode ser escrito de maneira única na forma

$$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$$

com $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ e $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Os escalares $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dizem-se as *coordenadas afins* (ou *coordenadas baricêntricas*) de P no referencial (P_0, P_1, \dots, P_n) .

Exemplo 1.5.4. Num plano afim (isto é, num espaço afim de dimensão 2), quaisquer três pontos não colineares formam um referencial afim. De facto, se A, B e C são pontos não colineares, então \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} não são múltiplos um do outro, e portanto são linearmente independentes. Conclui-se que qualquer ponto do plano afim se escreve de maneira única na forma

$$xA + yB + zC \text{ com } x + y + z = 1.$$



¹A tradução habitual do termo correspondente em inglês é *afinmente independentes*. Mas a palavra *afinmente* é feia, portanto removemo-la.

Demonstração. Se (P_0, P_1, \dots, P_n) é um referencial afim de \mathcal{E} , então o espaço vectorial associado \mathcal{V} tem dimensão n e os vectores $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}$ são n vectores linearmente independentes em \mathcal{V} , logo formam uma base de \mathcal{V} . Assim, para qualquer ponto P , o vector $\overrightarrow{P_0P}$ escreve-se unicamente na forma

$$\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \lambda_2 \overrightarrow{P_0P_2} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{P_0P_n}$$

com $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Logo, sendo $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n$, tem-se

$$\begin{aligned} P &= P_0 + \lambda_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \lambda_2 \overrightarrow{P_0P_2} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{P_0P_n} \\ &= P_0 + \lambda_0 \overrightarrow{P_0P_0} + \lambda_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \lambda_2 \overrightarrow{P_0P_2} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{P_0P_n} \\ &= \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n \end{aligned}$$

já que esta combinação afim, uma vez que por construção $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, é igual a $O + \lambda_0 \overrightarrow{OP_0} + \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}$ para *qualquer* ponto O , e em particular para $O = P_0$. \square

Como prometido, vamos agora dar uma caracterização simétrica da independência de pontos, estabelecendo assim que pontos serem independentes, e em particular formarem um referencial afim, não depende da maneira como os ordenamos.

Proposição 1.5.5. *Sejam $P_0, P_1, \dots, P_k \in \mathcal{E}$ pontos. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) *Os pontos P_0, P_1, \dots, P_k **não** são independentes;*
- (ii) *Existem escalares $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$, não todos nulos, tais que (na notação da Definição 1.2.8)*

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0 \text{ e } \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k = 0.$$

Demonstração. Se temos (i), então os vectores $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k}$ são linearmente dependentes, e portanto existem escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, não todos nulos, tais que

$$\lambda_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{P_0P_k} = 0.$$

Sendo $\lambda_0 = -\lambda_1 - \dots - \lambda_k$, temos assim que $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ não são todos nulos, e

$$\lambda_0 \overrightarrow{P_0P_0} + \lambda_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{P_0P_k} = 0.$$

A expressão anterior é igual a $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k$, e obtivemos (ii).

Reciprocamente, se temos (ii), então os escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ não são todos nulos, pois se o fossem então da igualdade $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$ resultaria que também $\lambda_0 = 0$, o que contradiz a hipótese de (ii). Ora,

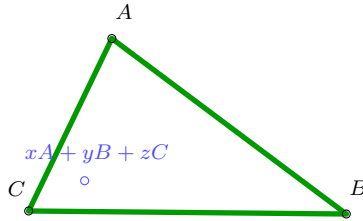
$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k \\ &= \lambda_0 \overrightarrow{P_0P_0} + \lambda_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{P_0P_k} \\ &= \lambda_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{P_0P_k}. \end{aligned}$$

Como $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ não são todos nulos, vem que $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k}$ são linearmente dependentes, e portanto P_0, P_1, \dots, P_k não são independentes. \square

Corolário 1.5.6. *A independência de pontos num espaço afim não depende da ordem dos pontos.*

Agora que temos à nossa disposição as noções de referencial afim e coordenadas afins, há algumas questões fundamentais que se colocam. Quando aprendemos a trabalhar com coordenadas cartesianas, uma das primeiras coisas que nos ensinam é a traduzir conceitos geométricos como rectas, circunferências, etc., em termos dessas coordenadas, dando as equações que os definem. Analogamente, interessa-nos saber, por exemplo, como é a equação de uma recta em coordenadas afins num plano afim.

Seja então (A, B, C) um referencial afim num plano afim \mathcal{E} . Cada ponto P do plano é dado pelas suas coordenadas afins (x, y, z) neste referencial, isto é, escreve-se como $xA + yB + zC$ com $x + y + z = 1$.



Como podemos caracterizar as rectas nestas coordenadas? Bem, uma recta é um subespaço afim de dimensão 1, e como tal escreve-se como $P_0 + \mathcal{U}$ onde P_0 é um ponto de \mathcal{E} e \mathcal{U} é um subespaço de dimensão 1 do espaço vectorial associado \mathcal{V} . Ora $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ é uma base de \mathcal{U} , e, se (e_1, e_2) é uma base de um espaço vectorial de dimensão 2, sabemos (porquê?) que todo o subespaço de dimensão 1 pode ser caracterizado como o conjunto dos vectores cujas coordenadas (y', z') em relação à base (e_1, e_2) satisfazem

$$by' + cz' = 0$$

para alguns escalares b e c , não ambos nulos.

Então suponha-se que \mathcal{U} é o conjunto dos vectores $v = y'\overrightarrow{AB} + z'\overrightarrow{AC}$ tais que $by' + cz' = 0$. Sejam ainda (x_0, y_0, z_0) as coordenadas afins de P_0 (em relação a (A, B, C)). Temos então

$$P_0 = A + x_0\overrightarrow{AA} + y_0\overrightarrow{AB} + z_0\overrightarrow{AC} = A + y_0\overrightarrow{AB} + z_0\overrightarrow{AC}.$$

Portanto, para um vector $v = y'\overrightarrow{AB} + z'\overrightarrow{AC} \in \mathcal{U}$, tem-se

$$P_0 + v = A + (y_0 + y')\overrightarrow{AB} + (z_0 + z')\overrightarrow{AC} = xA + yB + zC$$

onde $y = y_0 + y'$, $z = z_0 + z'$ e x é tal que $x = 1 - y - z$. A condição $by' + cz' = 0$ reescreve-se como

$$b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

ou, sendo $a = -by_0 - cz_0$,

$$a + by + cz = 0.$$

Já temos uma resposta ao problema: toda a recta admite uma equação em coordenadas afins da forma $a + by + cz = 0$, com a , b e c escalares e b e c não ambos nulos. Infelizmente, esta equação não é particularmente simétrica. Mas veja-se que, como $x + y + z = 1$, podemos reescrevê-la como

$$a(x + y + z) + by + cz = 0, \text{ ou seja, } \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

onde $\alpha = a$, $\beta = a + b$ e $\gamma = a + c$; a condição de b e c não serem ambos nulos diz-nos agora que β e γ não são ambos iguais a α , ou seja, α , β e γ não são todos iguais. E agora sim, temos uma condição totalmente simétrica! Conclui-se:

Proposição 1.5.7. *Seja (A, B, C) um referencial afim num plano afim \mathcal{E} . Então as rectas em \mathcal{E} , em coordenadas afins (x, y, z) , são dadas por equações do tipo*

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

onde α , β e γ são escalares, não todos iguais.

(Questão para o leitor: o que acontece se α , β e γ forem todos iguais?)

O argumento anterior admite uma generalização imediata para dimensões maiores, e obtemos o seguinte resultado mais geral:

Proposição 1.5.8. *Seja (A_0, A_1, \dots, A_n) um referencial afim num espaço afim \mathcal{E} de dimensão n . Então os hiperplanos em \mathcal{E} , em coordenadas afins (x_0, x_1, \dots, x_n) , são dados por equações do tipo*

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

onde $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ são escalares, não todos iguais.

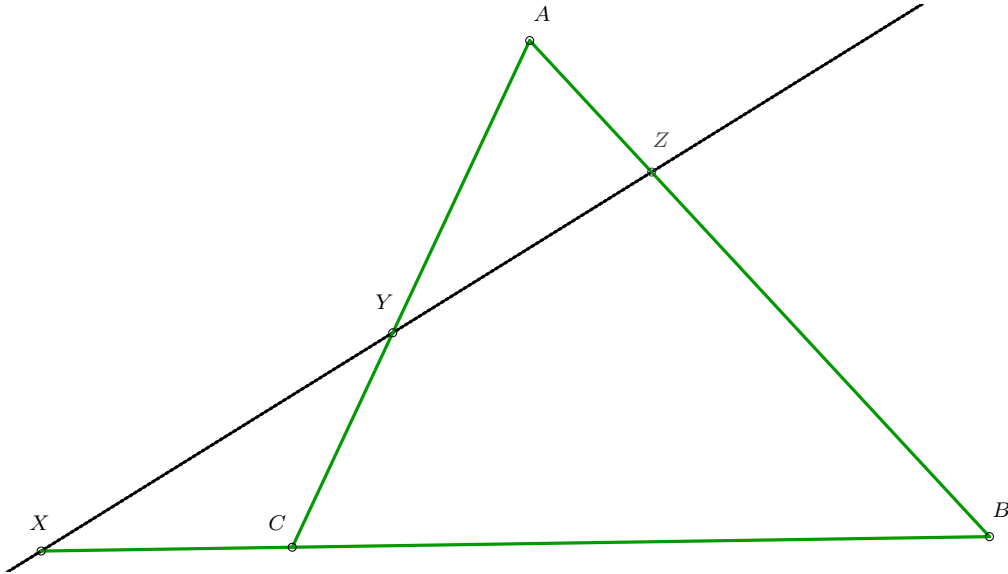
Resultados como estes estão na base da utilização de métodos afins para obtenção de resultados geométricos elementares. Vamos ver um exemplo e provar o clássico Teorema de Menelau, que nos dá um interessante (e útil) critério de colinearidade.

Teorema 1.5.9 (Teorema de Menelau). *Sejam A, B e C pontos não colineares num plano afim, e sejam X, Y e Z pontos nas rectas BC, CA e AB , respectivamente, todos distintos de A, B e C . Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *Os pontos X, Y, Z são colineares;*

(ii)

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = -1.$$



Demonstração. Começamos por provar (i) \Rightarrow (ii). Utilizamos coordenadas afins em relação ao referencial afim (A, B, C) . Seja $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ uma equação da recta ℓ que contém X, Y e Z .

A recta BC tem equação $px + qy + rz = 0$ para alguns p, q, r não todos iguais. Como os pontos B e C , de coordenadas afins $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ respectivamente, pertencem a essa recta, conclui-se, substituindo na equação, que $q = r = 0$. Assim a recta BC tem equação $px = 0$ para algum $p \neq 0$; ou seja, tem equação $x = 0$. De modo análogo, as rectas CA e AB tem equação $y = 0$ e $z = 0$, respectivamente.

Considerem-se as coordenadas afins (x, y, z) do ponto X . Como X pertence à recta BC , tem-se $x = 0$. Substituindo na equação da recta ℓ , obtém-se $\beta y + \gamma z = 0$; como adicionalmente $y + z = 1$, obtém-se $y = \frac{\gamma}{\gamma - \beta}$ e $z = \frac{-\beta}{\gamma - \beta}$.

As coordenadas afins de X são, portanto,

$$\left(0, \frac{\gamma}{\gamma - \beta}, \frac{-\beta}{\gamma - \beta}\right).$$

Isto significa que $X = \frac{\gamma}{\gamma - \beta}B + \frac{-\beta}{\gamma - \beta}C$. Logo, pela Proposição 1.4.4,

$$\frac{BX}{XC} = \frac{\left(\frac{-\beta}{\gamma - \beta}\right)}{\left(\frac{\gamma}{\gamma - \beta}\right)} = \frac{-\beta}{\gamma}.$$

Analogamente,

$$\frac{CY}{YA} = \frac{-\gamma}{\alpha} \text{ e } \frac{AZ}{ZB} = \frac{-\alpha}{\beta}.$$

Logo,

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{-\beta}{\gamma} \cdot \frac{-\gamma}{\alpha} \cdot \frac{-\alpha}{\beta} = -1.$$

Provaremos agora (ii) \Rightarrow (i). Suponha-se que vale a igualdade em (ii). Note-se que, pelo Corolário 1.4.5, se tem $\frac{BX}{XC} \neq -1$. Atendendo à igualdade em (ii), vem que $\frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} \neq 1$, ou seja,

$$\frac{CY}{YA} \neq \frac{BZ}{ZA}.$$

Note-se que $1 + \frac{CY}{YA} = \frac{CA}{YA}$ (porquê?) e, de modo análogo, $1 + \frac{BZ}{ZA} = \frac{BA}{ZA}$. Assim, somando 1 a ambos os membros da não-igualdade anterior, obtemos $\frac{CA}{YA} \neq \frac{BA}{ZA}$, ou, de modo equivalente,

$$\frac{AY}{AC} \neq \frac{AZ}{AB}.$$

Portanto, pelo Teorema de Tales, as rectas YZ e BC não são paralelas. Logo (pelo Corolário 1.3.5, se quisermos ser precisos), as rectas YZ e BC têm um ponto X^* em comum. Pela implicação já provada, obtemos

$$\frac{BX^*}{X^*C} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = -1.$$

Mas por hipótese temos também $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = -1$. Assim,

$$\frac{BX^*}{X^*C} = \frac{BX}{XC}.$$

Pelo Corolário 1.4.5 obtemos $X^* = X$, logo X, Y e Z são colineares, como pretendido. □

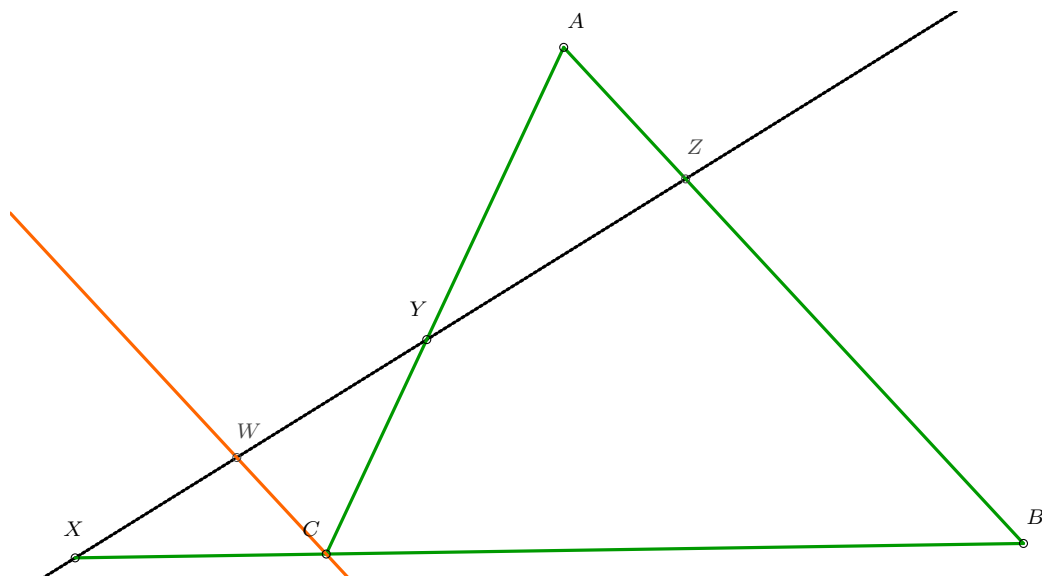
Para concluir esta secção, vamos ver mais duas provas. A primeira é uma prova alternativa da implicação (i) \Rightarrow (ii) do Teorema de Menelau, mais engenhosa e elegante. A segunda é uma prova do *Teorema de Ceva*, que vamos obter como corolário do Teorema de Menelau. Para ambas essas provas precisamos de uma observação “trivial” sobre uma “regra de cálculo” associada à nossa definição de quocientes afins. Deixamos a prova como exercício (é muito fácil!).

Exercício. Sejam P_1, P_2, P_3 e Q_1, Q_2, Q_3 pontos num espaço afim. Suponhamos que $P_k \neq Q_k$ para $k = 1, 2, 3$ e que as rectas P_1Q_1, P_2Q_2 e P_3Q_3 são paralelas. Prove que

$$\frac{P_1Q_1}{P_2Q_2} \cdot \frac{P_2Q_2}{P_3Q_3} \cdot \frac{P_3Q_3}{P_1Q_1} = 1.$$

Passemos então à segunda prova de (parte do) Teorema de Menelau.

Demonstração alternativa. Suponha-se que X, Y e Z estão sobre uma recta ℓ . A recta ℓ não é paralela a AB , já que intersecta ℓ num único ponto (Z).



Considere-se a recta paralela a AB que contém C , ou seja, a recta $C + \{\lambda \overrightarrow{AB} : \lambda \in \mathbb{K}\}$. Esta recta não é paralela a ℓ , já que ℓ não é paralela a AB , e portanto intersecta ℓ num ponto W . Note-se agora que, pelo Teorema de Tales juntamente com a Observação 1.4.7, temos

$$\frac{BX}{XC} = \frac{BZ}{WC}.$$

Também pelo Teorema de Tales juntamente com a Observação 1.4.7, temos

$$\frac{CY}{YA} = \frac{WC}{AZ}.$$

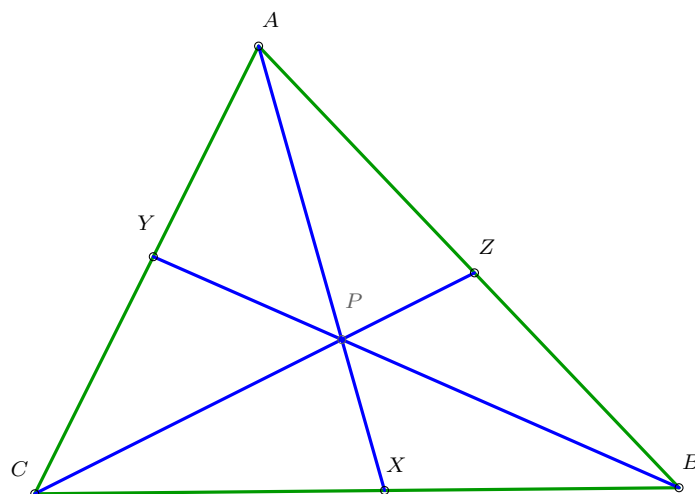
Logo,

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{BZ}{WC} \cdot \frac{WC}{AZ} \cdot \frac{AZ}{ZB} = -\frac{BZ}{WC} \cdot \frac{WC}{AZ} \cdot \frac{AZ}{ZB} = -1.$$

□

Teorema 1.5.10 (Teorema de Ceva). *Sejam A , B e C pontos não colineares num plano afim, e sejam X , Y e Z pontos sobre as rectas BC , CA e AB , respectivamente, distintos de A , B e C . Suponha-se que as rectas AX , BY e CZ concorrem num ponto P . Então*

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$



Demonstração. Pelo Teorema de Menelau aplicado ao triângulo ACX , com a recta transversal que passa por Y , P e B , temos

$$\frac{CB}{BX} \cdot \frac{XP}{PA} \cdot \frac{AY}{YC} = -1$$

pelo que

$$\frac{CY}{YA} = \frac{BC}{BX} \cdot \frac{XP}{PA}.$$

Analogamente, $\frac{BZ}{ZA} = \frac{BC}{XC} \cdot \frac{XP}{PA}$, e invertendo vem

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{XC}{BC} \cdot \frac{PA}{XP}.$$

Obtemos assim

$$\begin{aligned} \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} &= \frac{BX}{XC} \cdot \left(\frac{BC}{BX} \cdot \frac{XP}{PA} \right) \cdot \left(\frac{XC}{BC} \cdot \frac{PA}{XP} \right) \\ &= \left(\frac{BX}{XC} \cdot \frac{XC}{BC} \cdot \frac{BC}{BX} \right) \cdot \left(\frac{XP}{PA} \cdot \frac{PA}{XP} \right) \\ &= 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

□

§1.6 Transformações afins

As transformações afins têm um papel em Geometria Afim análogo ao papel das aplicações lineares na Álgebra Linear. Tendo em conta que aplicações lineares são aplicações entre espaços vectoriais que “respeitam” combinações lineares, é razoável apostar em como uma transformação afim é uma aplicação entre espaços afins que respeita combinações afins. Embora isso seja verdade, a definição que vamos adoptar vai ser outra, e veremos brevemente que é equivalente a esta.

Uma nota de aviso antes de avançarmos:

A partir desta secção, \mathbb{K} designa sempre um corpo de característica diferente de 2.

Definição 1.6.1. Sejam \mathcal{E} e \mathcal{F} espaços afins associados aos espaços vectoriais \mathcal{V} e \mathcal{W} , sobre o mesmo corpo \mathbb{K} . Uma aplicação $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ diz-se uma *transformação afim* (ou uma *aplicação afim*) se existe uma aplicação linear $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ (que chamamos a *aplicação linear associada*) tal que

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ}) \text{ para quaisquer } P, Q \in \mathcal{E}.$$

A igualdade anterior pode reescrever-se na forma

$$f(Q) = f(P) + \varphi(\overrightarrow{PQ}).$$

Fixado $P_0 \in \mathcal{E}$, resulta que, para $P = P_0 + u$, se tem $f(P) = f(P_0) + \varphi(u)$. Ou seja, sendo $Q_0 = f(P_0)$ temos $f(P_0 + u) = Q_0 + \varphi(u)$. Portanto, se conhecemos a imagem Q_0 de P_0 por uma transformação afim, e conhecemos a aplicação linear associada, a igualdade anterior permite-nos reconstruir a aplicação afim inteiramente.

Vamos agora ver que este processo pode ser invertido; a igualdade anterior define uma aplicação afim fixados quaisquer $P_0 \in \mathcal{E}$, $Q_0 \in \mathcal{F}$ e qualquer aplicação linear $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$.

Proposição 1.6.2. Sejam $P_0 \in \mathcal{E}$ e $Q_0 \in \mathcal{F}$ pontos em dois espaços afins, e seja $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ uma aplicação linear entre os espaços vectoriais associados. Então função $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ definida por

$$f(P_0 + u) = Q_0 + \varphi(u) \text{ para qualquer } u \in \mathcal{V}$$

é uma transformação afim, com aplicação linear associada φ .

Demonstração. Sejam A e B quaisquer dois pontos de \mathcal{E} , e escrevemos $A = P_0 + u$ e $B = P_0 + v$ para alguns vectores $u, v \in \mathcal{V}$. Então temos $\overrightarrow{AB} = v - u$. Além disso, temos $f(A) = Q_0 + \varphi(u)$ e $f(B) = Q_0 + \varphi(v)$, logo $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi(v) - \varphi(u) = \varphi(v - u) = \varphi(\overrightarrow{AB})$, como pretendido. \square

Lema 1.6.3 (Caracterizações equivalentes de transformações afins). *Sejam \mathcal{E} e \mathcal{F} espaços afins e $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ uma aplicação. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) f é uma transformação afim;
- (ii) f respeita combinações afins, isto é, para quaisquer $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ com $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ tem-se

$$f(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k) = \lambda_1 f(A_1) + \dots + \lambda_k f(A_k);$$

- (iii) f respeita combinações afins com duas parcelas, isto é, para quaisquer $A, B \in \mathcal{E}$ e para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$ tem-se

$$f((1 - \lambda)A + \lambda B) = (1 - \lambda)f(A) + \lambda f(B).$$

Demonstração. Vamos provar (i) \Rightarrow (ii), (ii) \Rightarrow (iii) e (iii) \Rightarrow (i).

- (i) \Rightarrow (ii): Seja φ a aplicação linear associada a f . Fixe-se um ponto arbitrário $O \in \mathcal{E}$. Então temos

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k) &= f(O + \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k}) \\ &= f(O) + \varphi(\lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k}) \\ &= f(O) + \lambda_1 \varphi(\overrightarrow{OA_1}) + \dots + \lambda_k \varphi(\overrightarrow{OA_k}) \\ &= f(O) + \lambda_1 \overrightarrow{f(O)f(A_1)} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{f(O)f(A_k)} \\ &= \lambda_1 f(A_1) + \dots + \lambda_k f(A_k). \end{aligned}$$

- (ii) \Rightarrow (iii) é trivial.
- (iii) \Rightarrow (i): Suponha-se que f cumpre (iii). Fixe-se um ponto arbitrário $P \in \mathcal{E}$. Pela Proposição 1.6.2, basta provar que existe uma aplicação linear φ entre os espaços vectoriais \mathcal{V} e \mathcal{W} associados a \mathcal{E} e \mathcal{F} tal que $f(P+u) = f(P) + \varphi(u)$ para qualquer $u \in \mathcal{V}$. Definimos então $\varphi(u) = \overrightarrow{f(P)f(P+u)}$; queremos provar que φ é linear.

Sejam $u \in \mathcal{V}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ quaisquer. Observe-se que $P + \lambda u$ é igual à combinação afim $(1 - \lambda)P + \lambda(P + u)$; de facto, basta verificar que $\overrightarrow{O(P + \lambda u)} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{O(P + u)}$ para algum $O \in \mathcal{E}$, ora para $O = P$ ambos os lados são evidentemente iguais a λu . Assim, por (iii),

$$f(P + \lambda u) = (1 - \lambda)f(P) + \lambda f(P + u).$$

Isto significa que $\overrightarrow{Of(P + \lambda u)} = (1 - \lambda)\overrightarrow{Of(P)} + \lambda\overrightarrow{Of(P + u)}$ para qualquer $O \in \mathcal{F}$. Em particular, para $O = f(P)$ obtém-se $\overrightarrow{f(P)f(P + \lambda u)} = \lambda\overrightarrow{f(P)f(P + u)}$, ou seja, $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$.

É meio caminho andado para a linearidade: agora só falta provar que $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ para quaisquer $u, v \in \mathcal{E}$. Para isto, note-se que o ponto $P + \frac{u+v}{2}$ se escreve como a combinação afim $\frac{1}{2}(P + u) + \frac{1}{2}(P + v)$ (é evidente pondo a origem em P) e portanto

$f\left(P + \frac{u+v}{2}\right) = \frac{1}{2}f(P+u) + \frac{1}{2}f(P+v)$. Isto implica, em particular, que $\overrightarrow{f(P)f\left(P + \frac{u+v}{2}\right)} = \frac{1}{2}\overrightarrow{f(P)f(P+u)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{f(P)f(P+v)}$; ou seja, $\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{\varphi(u)+\varphi(v)}{2}$. Então

$$\varphi(u) + \varphi(v) = 2\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right) = \varphi(u+v)$$

como pretendido. □

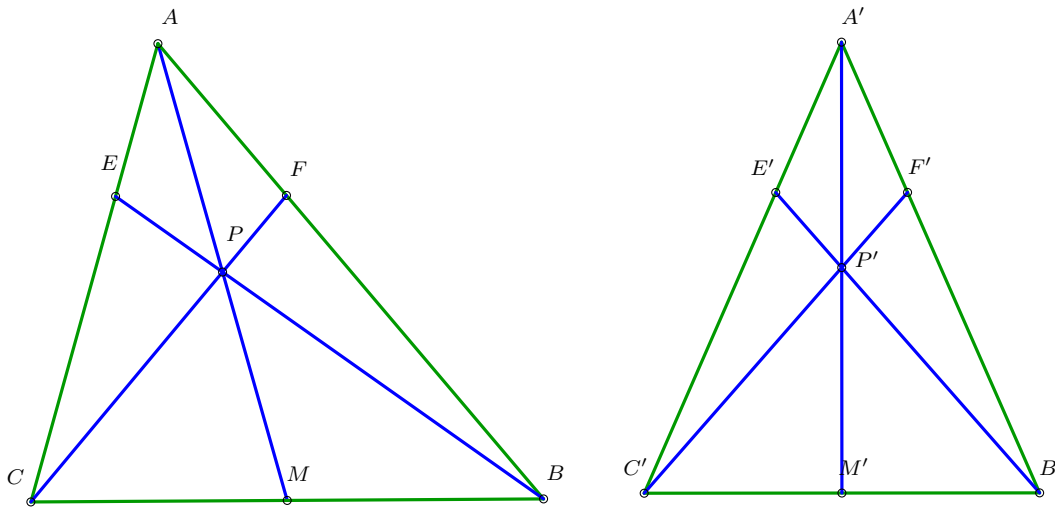
Corolário 1.6.4. *Uma transformação afim envia pontos colineares em pontos colineares.*

Demonstração. Sejam A, B e C pontos colineares e seja f uma transformação afim. Supomos que os pontos são distintos, caso contrário é evidente que as suas imagens por f são colineares. Podemos escrever $C = (1 - \lambda)A + \lambda B$. Mas então $f(C) = (1 - \lambda)f(A) + \lambda f(B)$ é combinação afim de $f(A)$ e $f(B)$, logo $f(A), f(B)$ e $f(C)$ são colineares. □

Corolário 1.6.5. *Sejam \mathcal{E} e \mathcal{F} espaços afins sobre o mesmo corpo, (A_0, A_1, \dots, A_n) um referencial afim de \mathcal{E} e B_0, B_1, \dots, B_n pontos em \mathcal{F} . Então existe uma única transformação afim $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ que satisfaz $f(A_0) = B_0, f(A_1) = B_1, \dots, f(A_n) = B_n$. Além disso, se (B_0, \dots, B_n) for um referencial afim de \mathcal{F} , então essa única transformação afim é bijectiva, com inversa também afim.*

Demonstração. Uma tal transformação afim tem que satisfazer $f(\lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n) = \lambda_0 B_0 + \lambda_1 B_1 + \dots + \lambda_n B_n$. Como A é um referencial afim, isto determina unicamente o valor de f em todos os pontos de E . Por outro lado, é fácil de verificar que a fórmula anterior define uma aplicação que respeita combinações afins, logo é uma transformação afim. No caso em que (B_0, B_1, \dots, B_n) é um referencial afim de \mathcal{F} , podemos também definir analogamente uma aplicação afim $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ que satisfaz $g(\lambda_0 B_0 + \lambda_1 B_1 + \dots + \lambda_n B_n) = \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n$, que é evidentemente inversa de f . □

Vamos ver como podemos utilizar estes corolários para provar resultados geométricos elementares. O Lema que utilizamos como exemplo pode ser obtido directamente utilizando os Teoremas de Tales e Ceva, contudo vamos dar uma prova diferente para ilustrar uma ideia nova.



Lema 1.6.6. *Seja ABC um triângulo num plano afim \mathcal{E} sobre \mathbb{R} , seja M o ponto médio do segmento BC (isto é, o ponto $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$) e seja $P \neq M$ um ponto sobre a recta AM . Sejam $E = BP \cap AC$ e $F = CP \cap AB$. Então as rectas EF e BC são paralelas.*

Demonstração. Começemos por notar que o resultado é óbvio por simetria se ABC for um triângulo isósceles no plano euclidiano \mathbb{R}^2 , com $|AB| = |AC|$. Então podemos tentar aplicar uma transformação afim que envia o nosso triângulo num tal triângulo! Considere-se um qualquer triângulo isósceles $A'B'C'$ em \mathbb{R}^2 com $|A'B'| = |A'C'|$. Então (A, B, C) é um referencial afim do nosso plano afim e (A', B', C') é um referencial afim de \mathbb{R}^2 , logo existe uma única bijecção afim $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ e $f(C) = C'$. Note-se que a imagem de M , a que chamamos M' , é o ponto médio de $B'C'$ pois $M' = f(M) = \frac{1}{2}f(B) + \frac{1}{2}f(C)$. Sendo P' a imagem de P , como transformações afins preservam rectas conclui-se que a imagem de E está nas rectas $A'C'$ e $B'P'$, logo é o ponto E' de intersecção dessas duas rectas. Analogamente, a imagem de F , F' , é o ponto $C'P' \cap A'B'$.

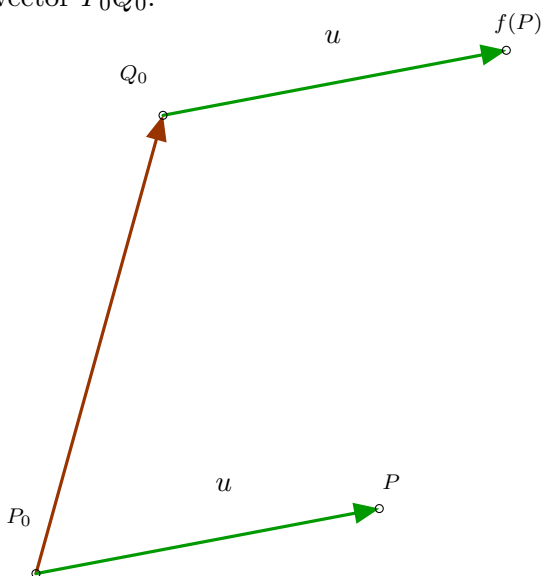
Ora já tínhamos visto que o nosso Lema é evidente num triângulo isósceles euclidiano; ou seja, sabemos que $E'F'$ é paralela a $B'C'$. Será que podemos concluir daí que EF é paralela a BC ? Bem, se não fosse, então essas duas rectas teriam um ponto em comum, digamos X . Ora o ponto $f(X)$ teria que estar nas rectas $E'F'$ e $B'C'$, o que é impossível porque essas rectas são paralelas! Logo EF é paralela a BC . \square

Esta prova ilustra parte do possível potencial das transformações afins; se queremos provar um resultado geométrico envolvendo apenas conceitos que são preservados por transformações afins, podemos utilizar transformações afins para reduzir a nossa configuração geral a uma configuração “mais simples”. Mas temos liberdade limitada; por exemplo, se estivermos a trabalhar sobre um plano afim, só temos “direito” a escolher a posição de até 3 pontos.

Vamos ver agora algumas classes particulares interessantes de transformações afins que merecem ser distinguidas.

Definição 1.6.7. Seja \mathcal{E} um espaço afim. Uma *translacção* de \mathcal{E} é uma transformação afim $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ cuja aplicação linear associada é a identidade.

Dada uma translacção f de um espaço afim \mathcal{E} , com espaço vectorial associado \mathcal{V} , que envia P_0 em Q_0 , decorre do que vimos antes que a translacção envia $P_0 + u$ em $Q_0 + \text{id}_{\mathcal{V}}(u) = Q_0 + u$. Como $Q_0 + u = (P_0 + u) + \overrightarrow{P_0Q_0}$, decorre que a imagem de qualquer ponto é obtida adicionando-lhe o vector $\overrightarrow{P_0Q_0}$.



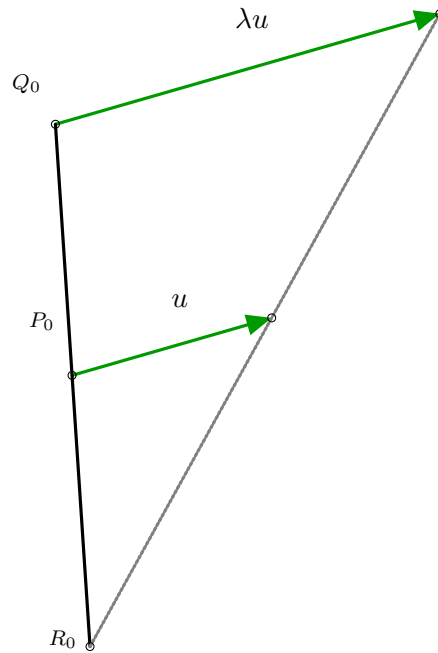
Definição 1.6.8. Seja \mathcal{E} um espaço afim com espaço vectorial associado \mathcal{V} sobre o corpo \mathbb{K} . Dado $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$, define-se a aplicação linear $\varphi_\lambda : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ como $\varphi_\lambda(v) = \lambda v$ para todo o $v \in \mathcal{V}$. Uma *homotetia de razão* $\lambda \neq 0, 1$ de \mathcal{E} é uma transformação afim $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ cuja aplicação linear associada é φ_λ . O *centro* da homotetia é o seu único ponto fixo, isto é, o único $R_0 \in \mathcal{E}$ tal que $f(R_0) = R_0$.

Claro que falta verificar que o ponto R_0 mencionado na definição de facto existe e é único. Seja P_0 um ponto arbitrário de E , e seja $Q_0 = f(P_0)$. Vamos determinar para que pontos $R_0 = P_0 + u$ é que $f(R_0) = R_0$. Temos $f(P_0 + u) = Q_0 + \lambda u$; logo, $f(R_0) = R_0$ equivale a

$$P_0 + u = Q_0 + \lambda u,$$

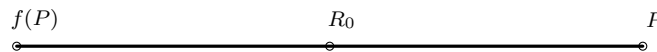
que por sua vez equivale a $\overrightarrow{Q_0 P_0} = (\lambda - 1)u$, e a $u = \frac{1}{\lambda - 1} \overrightarrow{Q_0 P_0}$. Assim, o único ponto fixo de f é

$$R_0 = P_0 + \frac{1}{\lambda - 1} \overrightarrow{Q_0 P_0}.$$



Logo o centro está bem definido.

Definição 1.6.9. Uma *simetria central* é uma homotetia de razão -1 .



Para concluir esta secção, vamos fazer algumas considerações genéricas sobre grupos de transformações afins.

Proposição 1.6.10. Sejam $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ e $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ transformações afins, com aplicações lineares associadas φ e ψ respectivamente. Então a composta $g \circ f$ também é uma transformação afim, e a aplicação linear associada é $\psi \circ \varphi$.

Demonstração. Dados $P, Q \in \mathcal{E}$, tem-se

$$\begin{aligned}\overrightarrow{g(f(P))g(f(Q))} &= \psi(\overrightarrow{f(P)f(Q)}) \\ &= \psi(\varphi(\overrightarrow{PQ})) \\ &= (\psi \circ \varphi)(\overrightarrow{PQ}).\end{aligned}$$

□

É igualmente imediato verificar que, se f é bijectiva, então f^{-1} também é uma transformação afim com aplicação linear associada φ^{-1} . Assim conclui-se que as transformações afins bijectivas $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ formam um grupo, o chamado **grupo afim** de \mathcal{E} , habitualmente representado por $\text{Ga}(\mathcal{E})$.

As homotetias e as translacções formam um subgrupo de $\text{Ga}(\mathcal{E})$. De facto, usando a Proposição 1.6.10, é fácil ver que:

Observação 1.6.11.

- A composta de duas homotetias é uma homotetia ou uma translacção, conforme o produto das razões das duas homotetias é diferente de 1 ou igual a 1, respectivamente.
- A composta de uma translacção e uma homotetia, por qualquer ordem, é uma homotetia.
- A composta de duas translacções é uma translacção.

§1.7 O plano afim $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

O plano afim $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ é simplesmente o nosso bom velho plano euclidiano \mathbb{R}^2 , visto à luz da sua estrutura natural de espaço afim. Pode parecer estranho usar uma notação diferente, mas é o que manda a tradição. Mais geralmente,

Definição 1.7.1. Seja n um inteiro não negativo e seja \mathbb{K} um corpo. O espaço afim $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ é o espaço \mathbb{K}^n com a sua estrutura natural de espaço afim.

O objectivo desta secção é investigar as transformações afins de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Vamos em particular ver uma curiosa maneira de definir uma representação matricial dessas transformações, e deixar, por enquanto, em aberto a questão sobre o que está por trás dela.

Todas as aplicações lineares $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são da forma

$$\varphi : (x, y) \mapsto (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y)$$

com $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. As transformações afins $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ que têm esta φ como aplicação linear associada são então da forma

$$f : (x, y) \mapsto (c_1, c_2) + \varphi(x, y) = (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2)$$

onde $(c_1, c_2) = f(0, 0)$.

Curiosamente, existe uma maneira bastante cómoda de representar transformações afins $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ por matrizes.

Proposição 1.7.2. À transformação afim $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ definida por $f(x, y) = (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2)$, associa-se a matriz

$$M_f = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então, se $f(x, y) = (x', y')$, tem-se

$$M_f \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A prova é uma conta directa. Mais, outra conta directa mostra que, se f e g são duas transformações afins de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, então temos

$$M_{g \circ f} = M_g M_f.$$

Parece coincidência! A estrutura multiplicativa das matrizes foi inventada para representar aplicações lineares. E agora parece que, por mero acaso, também representa, usada da maneira certa, transformações afins! Cuidado. As verdadeiras coincidências deste tipo são muito poucas. Em geral, quando um fenómeno destes ocorre, é prudente desconfiar de que ele não é mais que uma manifestação de uma ideia mais geral que o faz parecer menos mágico e misterioso.

E este caso não é excepção: esta representação matricial misteriosa não é mais do que uma manifestação da existência do plano projectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, que estende $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ e vamos conhecer mais adiante. Nessa altura este fenómeno terá a sua devida explicação. Por agora, fica o mistério...

Concluimos esta secção com uma descrição das matrizes associadas a alguns tipos importantes de transformações afins de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

- Translacções:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Homotetias:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & c_1 \\ 0 & \lambda & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ com } \lambda \neq 0, 1$$

- Aplicações lineares de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Isometrias de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{pmatrix} a & -b & c_1 \\ b & a & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a & b & c_1 \\ b & -a & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ onde } a^2 + b^2 = 1$$

§1.8 Homotetias, translacções e os Teoremas afins de Desargues e Pappus

Nesta penúltima secção sobre Geometria Afim, vamos utilizar homotetias e translacções para provar mais dois Teoremas da Geometria Afim, os Teoremas (afins) de Desargues e Pappus. As versões mais conhecidas destes teoremas são mais gerais do que as que apresentamos nesta secção. Mais tarde, quando tivermos a maquinaria das transformações projectivas à nossa disposição, vamos transformar quase sem esforço os resultados desta secção em resultados muito mais fortes.

Mas cada coisa a seu tempo. Por agora, precisamos de provar mais alguns resultados simples sobre homotetias e translacções.

Proposição 1.8.1. *Seja \mathcal{E} um espaço afim e seja \mathcal{F} um subespaço afim de \mathcal{E} . Se f é uma homotetia de \mathcal{E} , então $f(\mathcal{F})$ é um subespaço de \mathcal{E} paralelo a \mathcal{F} .*

Demonstração. Se $\mathcal{F} = P_0 + \mathcal{U}$, onde \mathcal{U} é um espaço vectorial, e λ é a razão de f , então $f(\mathcal{F}) = f(P_0) + \lambda\mathcal{U} = f(P_0) + \mathcal{U}$ (de facto, como \mathcal{U} é um espaço vectorial e $\lambda \neq 0$ tem-se $\lambda\mathcal{U} = \mathcal{U}$). Logo $f(\mathcal{F})$ é um subespaço afim de \mathcal{E} com espaço vectorial associado \mathcal{U} , e portanto é paralelo a \mathcal{F} . \square

Proposição 1.8.2. *Seja \mathcal{E} um espaço afim e seja f uma homotetia de \mathcal{E} com centro R_0 . Então, para qualquer ponto $P \in \mathcal{E}$, os pontos R_0 , P e $f(P)$ são colineares.*

Demonstração. Se $P = R_0$ é trivial. Caso contrário, basta ver que, se λ é a razão da homotetia e $P = R_0 + u$, então $f(P) = R_0 + \lambda u = R_0 + \lambda \overrightarrow{R_0P} = (1 - \lambda)R_0 + \lambda P$. Assim $f(P)$ está na recta R_0P . \square

Proposição 1.8.3. *Seja \mathcal{E} um espaço afim e seja \mathcal{F} um subespaço afim de \mathcal{E} . Se f é uma homotetia de \mathcal{E} , então $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ se e só se o centro R_0 de f pertence a \mathcal{F} .*

Demonstração. Seja λ a razão de f . Se $R_0 \in \mathcal{F}$, então $\mathcal{F} = R_0 + \mathcal{U}$ para algum espaço \mathcal{U} . Logo $f(\mathcal{F}) = R_0 + \lambda\mathcal{U} = R_0 + \mathcal{U} = \mathcal{F}$.

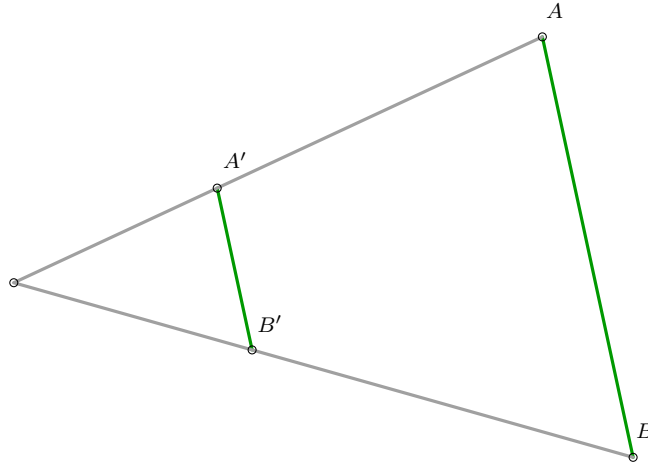
Reciprocamente, suponha-se que $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Considere-se um ponto $P \in \mathcal{F}$ arbitrário. Se $P = R_0$ não há nada a provar. Caso contrário, note-se que $f(P) \in \mathcal{F}$. Se um subespaço afim contém dois pontos, então contém toda a recta definida por eles (porquê?). Logo \mathcal{F} contém a recta $Pf(P)$ (note-se que $f(P) \neq P$ pois $P \neq R_0$!). Mas $R_0 \in Pf(P)$ pela Proposição 1.8.2, logo $R_0 \in \mathcal{F}$. \square

Proposição 1.8.4. *Seja \mathcal{E} um espaço afim, e sejam f e g duas homotetias de \mathcal{E} de centros P_0 e Q_0 respectivamente. Então f e g comutam (isto é, $f \circ g = g \circ f$) se e só se $P_0 = Q_0$.*

Demonstração. Sejam α e β as razões de P_0 e Q_0 , respectivamente. Se $P_0 = Q_0$, f é dada por $P_0 + u \mapsto P_0 + \alpha u$ e g é dada por $P_0 + u \mapsto P_0 + \beta u$. Logo $f \circ g$ é dada por $P_0 + u \mapsto P_0 + \alpha\beta u$. Analogamente, $g \circ f$ é dada por $P_0 + u \mapsto P_0 + \alpha\beta u$. Logo $f \circ g = g \circ f$.

Suponha-se agora que $P_0 \neq Q_0$. Sejam $Q'_0 = f(Q_0)$ e $Q''_0 = g(Q'_0)$. Note-se que $Q'_0 \neq Q_0$, pois $Q_0 \neq P_0$ e P_0 é o único ponto fixo de f . Mas então Q'_0 não é o único ponto fixo de g , logo $Q''_0 \neq Q'_0$. Ou seja, $g(f(Q_0)) \neq f(g(Q_0))$. Logo f e g não comutam. \square

Proposição 1.8.5. *Sejam A, B, A', B' pontos de um espaço afim \mathcal{E} tais que $A \neq B$, $A' \neq B'$ e AB é paralela a $A'B'$. Então existe uma única homotetia ou translacção $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ tal que $f(A) = A'$ e $f(B) = B'$. Se adicionalmente as rectas AB e $A'B'$ forem distintas, se f for uma homotetia o seu centro é o ponto $AA' \cap BB'$, e se f for uma translacção as rectas AA' e BB' são paralelas.*



Demonstração. As homotetias/translacções que enviam A em A' são da forma

$$f : A + u \mapsto A' + \lambda u$$

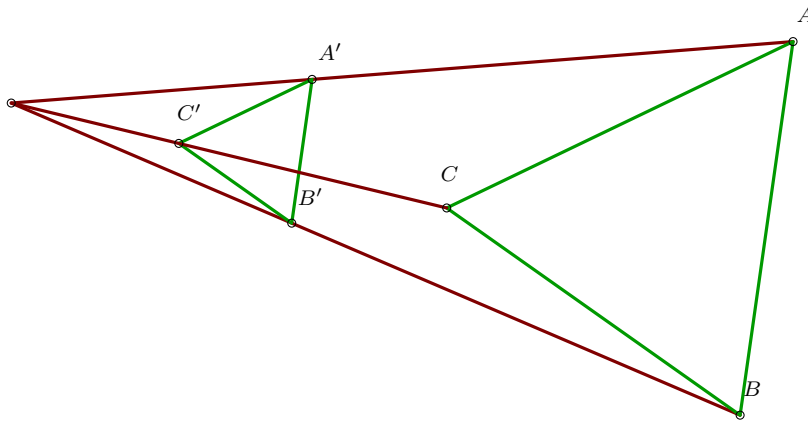
com $\lambda \neq 0$. Para provar o pretendido, basta mostrar que existe exactamente um valor de λ para o qual a aplicação assim obtida também envia B em B' . Tomando $u = \overrightarrow{AB}$ na “fórmula” anterior, vemos que B é enviado em $A' + \lambda \overrightarrow{AB}$, que é igual a B' se e só se $\overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{AB}$. Ora existe um único valor de λ para o qual isto acontece, nomeadamente $\lambda = \frac{A'B'}{AB}$. Isto mostra a existência e a unicidade da homotetia ou translacção procurada.

Se f é uma translacção, então $\lambda = 1$, logo pela nossa descrição de λ temos $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. Somando $\overrightarrow{BA'}$ a ambos os membros desta igualdade vem $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'}$. Logo AA' e BB' são paralelas.

Se f é uma homotetia, então o seu centro está nas rectas AA' e BB' pela Proposição 1.8.2, logo o centro é $AA' \cap BB'$, como pretendido. \square

Com isto já estamos prontos para passar aos Teoremas afins de Desargues e Pappus.

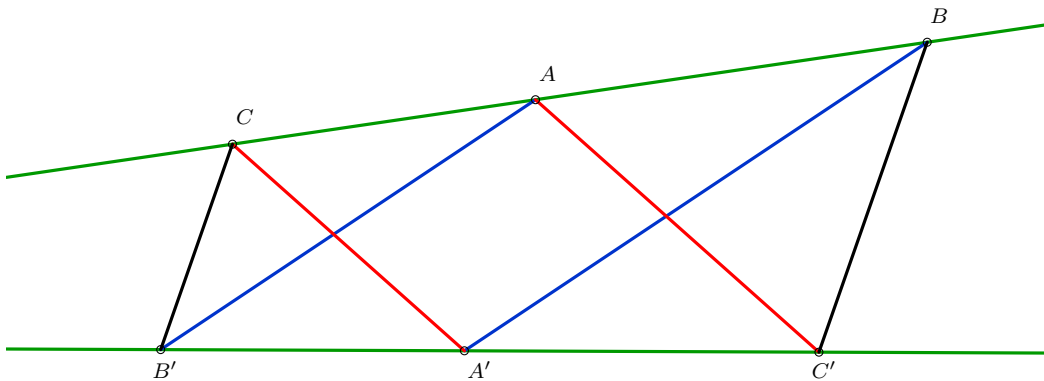
Teorema 1.8.6 (Teorema de Desargues afim). *Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos num espaço afim \mathcal{E} . Se AB é paralela a $A'B'$, BC é paralela a $B'C'$ e CA é paralela a $C'A'$, então as rectas AA' , BB' e CC' são paralelas ou concorrentes num ponto.*



Demonstração. Seja $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ a única homotetia ou translacção tal que $f(A) = A'$ e $f(B) = B'$. Seja $C^* = f(C)$. As rectas $A'C^*$ e AC são paralelas pela Proposição 1.8.1, mas por hipótese $A'C'$ e AC também o são. Logo $A'C^*$ e $A'C'$ são paralelas, e como têm o ponto A' em comum são a mesma recta. Logo A' , C' e C^* são colineares. Analogamente B' , C' e C^* são colineares. Segue que o ponto C^* pertence em simultâneo às rectas (diferentes) $A'C'$ e $B'C'$, logo $C^* = C'$ e $f(C) = C'$.

Se f é uma homotetia, as rectas AA' , BB' e CC' passam todas pelo seu centro e portanto são concorrentes. Se f é uma translacção, pela Proposição 1.8.5 vem que AA' , BB' e CC' são paralelas, provando o Teorema. \square

Teorema 1.8.7 (Teorema de Pappus afim). *Sejam ℓ e ℓ' duas rectas distintas num espaço afim \mathcal{E} , e sejam $A, B, C \in \ell$ e $A', B', C' \in \ell'$ seis pontos distintos. Se AB' é paralela a $A'B$ e AC' é paralela a $A'C$, então BC' é paralela a $B'C$.*



Demonstração. Seja f a única homotetia ou translacção tal que $f(B) = A$ e $f(A') = B'$, e seja g a única homotetia ou translacção tal que $g(A) = C$ e $g(C') = A'$. Observe-se que se ℓ e ℓ' são paralelas então f e g são ambas translacções. Caso contrário, f e g são ambas homotetias centradas em $\ell \cap \ell'$. Logo, em todo o caso, pela Proposição 1.8.4, temos $f \circ g = g \circ f$. Seja $h = f \circ g = g \circ f$. Temos $h(B) = g(f(B)) = g(A) = C$ e $h(C') = f(g(C')) = f(A') = B'$. Logo existe uma homotetia ou translacção que envia B em C e C' em B' . Portanto BC' é paralela a $B'C$. \square

§1.9 O Teorema Fundamental da Geometria Afim

Nas últimas secções procurámos convencer o leitor de que transformações afins são objectos dignos de serem estudados. Quando demos a nossa definição inicial (Definição 1.6.1), poderá não ter parecido óbvio porque é que a definição que demos era a “correcta”. As caracterizações equivalentes do Lema 1.6.3 devem ter ajudado a lançar algumas luzes sobre o motivo. Afinal, ao preservarem combinações afins, as transformações afins preservam essencialmente todos os “conceitos afins” que introduzimos neste capítulo. Mas, para o caso de estas explicações não serem suficientemente convincentes, deixamos aqui uma caracterização equivalente das transformações afins bijectivas que deverá convencer o leitor do papel fundamental das transformações afins. Essa caracterização é muito simples: num espaço afim \mathcal{E} de dimensão $k \geq 2$ sobre \mathbb{R} , as transformações afins bijectivas são simplesmente as bijecções que enviam pontos colineares em pontos colineares.

Vamos parar um pouco para reflectir sobre o que isto nos diz. Isto diz-nos, por exemplo, quais são as bijecções de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, ou \mathbb{R}^2 , que preservam as rectas: era uma questão que já nos podíamos ter colocado muito antes de termos introduzido a linguagem da Geometria Afim. E o Teorema desta secção diz-nos que qualquer bijecção de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ que preserve rectas tem que preservar os quocientes $\frac{AC}{CB}$ com pontos A, B, C colineares: de facto, se $C = (1 - \lambda)A + \lambda B$, e f é uma bijecção afim de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, então $f(C) = (1 - \lambda)f(A) + \lambda f(B)$, logo

$$\frac{f(A)f(C)}{f(C)f(B)} = \frac{\lambda}{1 - \lambda} = \frac{AC}{CB}.$$

Sem mais delongas, passemos ao Teorema.

Teorema 1.9.1. (Teorema Fundamental da Geometria Afim) *Sejam \mathcal{E} um espaço afim real de dimensão $k \geq 2$ e $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ uma aplicação bijectiva que transforma quaisquer três pontos colineares em três pontos também colineares. Então f é uma aplicação afim.*

Antes de passarmos à prova do Teorema, precisamos de alguns preparativos, que são as duas proposições abaixo.

Proposição/Definição 1.9.2 (Caracterizações dos paralelogramos). Sejam A, B, C e D pontos distintos num espaço afim, três a três não colineares. As seguintes condições são equivalentes:

- (i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;
- (ii) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;
- (iii) AB é paralela a CD e AD é paralela a BC .

Se alguma destas condições se verifica, dizemos que $ABCD$ é um *paralelogramo*.

Demonstração. Se temos (i), então adicionando \overrightarrow{BD} a ambos os membros obtemos (ii). Analogamente, adicionando \overrightarrow{DB} a ambos os membros de (ii) obtemos (i). Portanto (i) e (ii) são equivalentes. Basta-nos assim provar que (ii) e (iii) são equivalentes.

- Se temos (ii) então claramente AD é paralela a BC . Como (ii) implica (i), também temos que AB é paralela a CD .

- Se temos (iii), então pela Proposição 1.8.5 existe uma homotetia ou translacção que envia A em D e B em C . Se for uma homotetia, o seu centro está nas rectas AD e BC , o que é impossível pois estas são paralelas e distintas. Logo existe uma translacção que envia A em D e B em C . Assim $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (ambos são iguais ao vector da translacção).

Isto completa a prova. \square

A próxima proposição deverá parecer intuitiva; encoraja-se o leitor a tentar prová-la por si antes de ver a demonstração abaixo.

Proposição 1.9.3. *Sejam r e s duas rectas paralelas distintas num espaço afim \mathcal{E} . Então existe um subespaço afim $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ de dimensão 2 que contém r e s .*

Demonstração. Seja \mathcal{U} o espaço vectorial de dimensão 1 associado às rectas r e s . Seja P um ponto arbitrário em r , e seja Q um ponto arbitrário em s . Seja \mathcal{W} o espaço vectorial gerado por \mathcal{U} e pelo vector \overrightarrow{PQ} . Obviamente \mathcal{W} tem dimensão 2. Basta então verificar que r e s estão contidas no subespaço afim $\mathcal{F} = P + \mathcal{W}$.

- Temos $r = P + \mathcal{U}$ e \mathcal{U} é um subespaço de \mathcal{W} por construção. Logo $r \subseteq P + \mathcal{W}$.
- Seja T um ponto de s . Então podemos escrever $T = Q + v$ onde $v \in \mathcal{U}$. Mas então $T = P + \overrightarrow{PQ} + v$, e $\overrightarrow{PQ} + v$ pertence a \mathcal{W} por construção. Logo $s \subseteq P + \mathcal{W}$.

\square

Com isto estamos prontos para passar à prova do Teorema 1.9.1.

Demonstração. A prova é longa, e vamos dividi-la em várias partes. Cada parte é um pequeno Lema em si mesmo. Para simplificar, representaremos por A' a imagem de qualquer ponto A por f .

Lema 1: Sejam A_1, \dots, A_m pontos em \mathcal{E} e seja B um ponto em \mathcal{E} que é combinação afim de A_1, \dots, A_m . Então B' é combinação afim de A'_1, \dots, A'_m .

Demonstração. Utilizamos indução em m . Para $m = 1$ é trivial. Para $m = 2$ o Lema equivale à hipótese do enunciado; note-se que B ser combinação afim de A_1 e A_2 equivale a que A_1, A_2 e B sejam colineares, e tal implica que A'_1, A'_2 e B' também o sejam, pelo que B' é combinação afim de A'_1 e A'_2 . Suponha-se agora $m \geq 3$ e que já provámos a versão do Lema para $m - 1$ pontos. Suponha-se que

$$B = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_m A_m$$

com $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$. Então existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\lambda_i \neq 1$; caso contrário teríamos $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = m \neq 1$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\lambda_m \neq 1$. Considere-se agora o ponto

$$P = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_m} A_1 + \dots + \frac{\lambda_{m-1}}{1 - \lambda_m} A_{m-1}.$$

Então temos $B = (1 - \lambda_m)P + \lambda_m A_m$, logo B, P e A_m são pontos colineares. Portanto B', P' e A'_m são pontos colineares. Assim, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $B' = (1 - \lambda)P' + \lambda A'_m$. Mas como P é combinação afim de A_1, \dots, A_{m-1} , P' é combinação afim de A'_1, \dots, A'_{m-1} ; existem assim $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ tais que $P' = \alpha_1 A'_1 + \dots + \alpha_{m-1} A'_{m-1}$, logo

$$B' = (1 - \lambda)\alpha_1 A'_1 + \dots + (1 - \lambda)\alpha_{m-1} A'_{m-1} + \lambda A'_m$$

estando o Lema provado. \square

Lema 2: Sejam A , B e C pontos não colineares em \mathcal{E} . Então A' , B' e C' também não são colineares.

Demonstração. Seja \mathcal{V} o espaço vectorial associado a \mathcal{E} . Se A , B e C não são colineares, então os vectores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são linearmente independentes e como tal existe uma base de \mathcal{V} que os contém. Seja $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}, \dots, \overrightarrow{AA_{k-2}})$ uma tal base. Então $(A, B, C, A_1, \dots, A_{k-2})$ é referencial afim de \mathcal{E} . Logo todo o ponto de \mathcal{E} se pode escrever como combinação afim destes pontos e, como tal, pela bijectividade de f e pelo Lema anterior, todo o ponto de \mathcal{E} se pode escrever como combinação afim de $A', B', C', A'_1, \dots, A'_{k-2}$.

Assim, os vectores

$$\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'A'_1}, \dots, \overrightarrow{A'A'_{k-2}}$$

formam uma base² de \mathcal{V} . Se A' , B' e C' são colineares, então $\overrightarrow{A'C'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$ para algum λ , o que contradiz a independência linear destes vectores. Isto prova o Lema. \square

Lema 3: Se r é uma recta em \mathcal{E} , então $f(r)$ também é. Além disso, se r_1 e r_2 são rectas paralelas, então $f(r_1)$ e $f(r_2)$ também são.

Demonstração. Seja r uma recta em \mathcal{E} e sejam $A, B \in r$ dois pontos distintos. Para qualquer $X \in r$, os pontos A, B, X são colineares, logo $X' \in A'B'$. Assim $f(r) \subseteq A'B'$; para mostrar que $f(r)$ é uma recta, basta agora mostrar que para qualquer ponto $Y \in A'B'$ existe $X \in AB$ tal que $f(X) = Y$. Suponha-se por absurdo que um tal ponto X não existe para algum Y . Então, como f é bijectiva, existe Z em \mathcal{E} , fora da recta AB , tal que $f(Z) = Y$. Mas então A, B e Z não são pontos colineares, e por outro lado A', B' e Y são-no, o que contradiz o Lema anterior. Assim $f(r)$ é uma recta.

Sejam agora r_1 e r_2 duas rectas paralelas em \mathcal{E} (que supomos distintas; se não o forem, o que pretendemos provar é trivial). Então, pela Proposição 1.9.3, existe um subespaço afim de dimensão 2 de \mathcal{E} que contém r_1 e r_2 . Suponha-se que (A_0, A_1, A_2) é referencial afim desse subespaço. Então todo o ponto de $r_1 \cup r_2$ é combinação afim de A_0, A_1 e A_2 ; logo todo o ponto de $f(r_1) \cup f(r_2)$ é combinação afim de A'_0, A'_1 e A'_2 , pelo **Lema 1**. Logo $f(r_1) \cup f(r_2)$ está contida num subespaço afim de \mathcal{E} de dimensão 2. Assim, se $f(r_1)$ e $f(r_2)$ não são paralelas, têm um ponto P em comum; seja $Q = f^{-1}(P)$. Como $r_1 \cap r_2 = \emptyset$, temos $Q \notin r_1$ ou $Q \notin r_2$; suponha-se sem perda de generalidade que $Q \notin r_1$. Então $f(Q) \notin f(r_1)$, ou seja, P não pertence a $f(r_1)$, uma clara contradição. O Lema está provado. \square

Lema 4: Sejam A e B dois pontos distintos em \mathcal{E} . Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, seja M_λ o ponto de AB que satisfaz $\overrightarrow{AM_\lambda} = \lambda \overrightarrow{AB}$. Seja $\Phi(\lambda)$ o escalar tal que $\overrightarrow{A'M_\lambda} = \Phi(\lambda) \overrightarrow{A'B'}$. Então valem as igualdades

$$\Phi(\lambda + \mu) = \Phi(\lambda) + \Phi(\mu) \text{ e } \Phi(\lambda\mu) = \Phi(\lambda)\Phi(\mu)$$

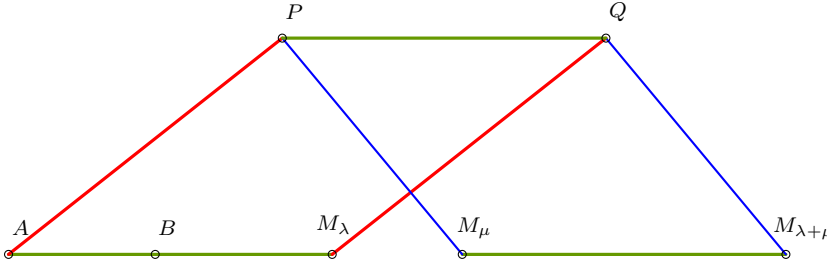
para todos os $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

²Todo o ponto de \mathcal{E} escreve-se como combinação afim de $A', B', C', A'_1, \dots, A'_{k-2}$, logo escreve-se como $A' +$ (uma combinação linear de $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'A'_1}, \dots, \overrightarrow{A'A'_{k-2}}$). Assim todo o vector de \mathcal{V} se pode escrever como uma combinação linear de $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'A'_1}, \dots, \overrightarrow{A'A'_{k-2}}$. Atendendo a que são exactamente $k = \dim \mathcal{V}$ vectores, resulta que formam uma base de \mathcal{V} .

Demonstração. Sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ arbitrários. Escolha-se um ponto P qualquer fora de AB e seja Q o ponto definido por $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AM_\lambda}$. Então PQ é paralela a AB e AP é paralela a $M_\lambda Q$, logo $P'Q'$ é paralela a $A'B'$ e $A'P'$ é paralela a $M'_\lambda Q'$; assim, pela Proposição 1.9.2, $\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{A'M'_\lambda}$. Por outro lado, temos $\overrightarrow{AM_{\lambda+\mu}} = (\lambda + \mu)\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM_\lambda} + \overrightarrow{AM_\mu}$ pelo que $\overrightarrow{AM_\lambda} = \overrightarrow{M_\mu M_{\lambda+\mu}}$. Logo também temos $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{M_\mu M_{\lambda+\mu}}$; então PM_μ é paralela a $QM_{\lambda+\mu}$, logo $P'M'_\mu$ é paralela a $Q'M'_{\lambda+\mu}$; juntamente com o facto de que $P'Q'$ é paralela a $M'_\mu M'_{\lambda+\mu}$, obtemos $\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{M'_\mu M'_{\lambda+\mu}}$. Resulta que $\overrightarrow{A'M'_\lambda} = \overrightarrow{M'_\mu M'_{\lambda+\mu}} = \overrightarrow{A'M'_{\lambda+\mu}} - \overrightarrow{A'M'_\mu}$. Logo,

$$\Phi(\lambda + \mu)\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'M'_{\lambda+\mu}} - \overrightarrow{A'M'_\mu} = \overrightarrow{A'M'_\lambda} + \overrightarrow{A'M'_\mu} = (\Phi(\lambda) + \Phi(\mu))\overrightarrow{A'B'}$$

e como $A \neq B$, temos $\overrightarrow{AB} \neq 0$, logo $\Phi(\lambda + \mu) = \Phi(\lambda) + \Phi(\mu)$, como pretendido.



Provaremos agora a segunda igualdade. Se $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$, a igualdade resulta do facto trivial de que $\Phi(0) = 0$. Suponha-se então que λ e μ são não nulos. Note-se agora que

$$\overrightarrow{AM_{\lambda\mu}} = \lambda\mu\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AM_\mu}$$

pelo que $\frac{AM_{\lambda\mu}}{AM_\mu} = \lambda = \frac{AM_\lambda}{AB}$. Seja R um ponto arbitrário exterior a AB ; seja S o ponto de AP tal que a recta $M_\lambda S$ é paralela a BR . Pelo Teorema de Tales

$$\frac{AS}{AR} = \frac{AM_\lambda}{AB} = \frac{AM_{\lambda\mu}}{AM_\mu}$$

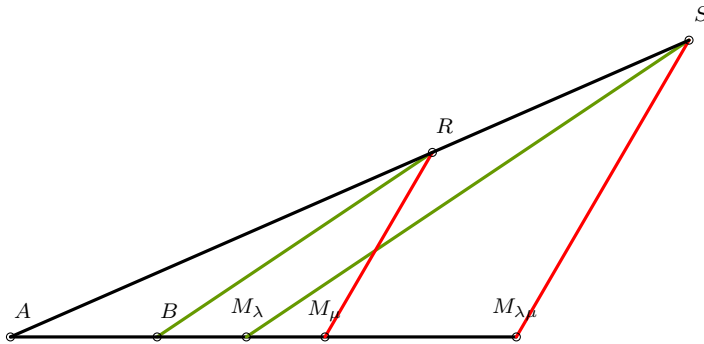
pelo que, pelo Teorema de Tales, as rectas $M_{\lambda\mu}S$ e $M_\mu R$ são paralelas. Temos então³ $M'_\lambda S' \parallel B'R'$ e $M'_{\lambda\mu} S' \parallel M'_\mu R'$. Logo, por Tales, novamente, temos

$$\frac{A'M'_{\lambda\mu}}{A'M'_\mu} = \frac{A'S'}{A'R'} = \frac{A'M'_\lambda}{A'B'}$$

Segue que

$$\frac{\Phi(\lambda\mu)}{\Phi(\mu)} = \Phi(\lambda)$$

equivalendo à igualdade pretendida. (A injectividade de f garante que $\Phi(\mu) \neq 0$ para $\mu \neq 0$.)



□

³A notação $r \parallel s$ significa que a recta r é paralela à recta s .

Lema 5: A única função bijectiva Φ que cumpre as igualdades anteriores é a identidade.

Demonstração. De $\Phi(0+0) = \Phi(0) + \Phi(0)$ segue que $\Phi(0) = 0$. De $\Phi(1^2) = \Phi(1)^2$ segue que $\Phi(1) \in \{0, 1\}$; como $\Phi(1) \neq \Phi(0)$, temos $\Phi(1) = 1$.

Agora note-se que se $\Phi(n) = n$, para algum inteiro $n \geq 0$, então $\Phi(n+1) = \Phi(n) + \Phi(1) = n+1$. Como $\Phi(0) = 0$, por indução segue que $\Phi(n) = n$ para todo o inteiro $n \geq 0$. Além disso, se $n < 0$, então

$$0 = \Phi(0) = \Phi(n + (-n)) = \Phi(n) + \Phi(-n) = \Phi(n) - n$$

pelo que $\Phi(n) = n$. Assim $\Phi(n) = n$ para todo o inteiro n .

Note-se agora que para $x \in \mathbb{R}$ e n inteiro positivo, se tem $\Phi(nx) = n\Phi(x)$; de facto, a igualdade é verdadeira para $n = 1$ e, se $\Phi(nx) = n\Phi(x)$, então $\Phi((n+1)x) = \Phi(nx+x) = \Phi(nx) + \Phi(x) = n\Phi(x) + \Phi(x) = (n+1)\Phi(x)$; logo por indução obtemos o resultado. Agora se p é um inteiro e q é um inteiro positivo, então

$$q\Phi\left(\frac{p}{q}\right) = \Phi(p) = p$$

logo $\Phi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$. Conclui-se que $\Phi(x) = x$ para todo o $x \in \mathbb{Q}$. Como \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} , para concluir que $\Phi = \text{id}$ basta mostrar que f é crescente. Ora, se $a > b$,

$$\Phi(a) = \Phi(b) + \Phi(a-b) = \Phi(b) + \Phi(\sqrt{a-b})^2 \geq \Phi(b)$$

e portanto Φ é de facto crescente, concluindo a prova. \square

Para acabar a prova, note-se que obtivemos que se $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$ então $\overrightarrow{A'M'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$, ou ainda $f((1-\lambda)A + \lambda B) = (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B)$. Isto, pelo Lema 1.6.3, é equivalente a f ser uma transformação afim, e a prova está assim terminada. \square

Digressão: e sobre outros corpos?

No resto desta secção vamos discutir a importância de supormos que \mathcal{E} é um espaço afim sobre \mathbb{R} na prova acima. Leitores que não estejam à vontade com noções básicas sobre corpos, ou que simplesmente já estejam fartos de Geometria Afim, estão à vontade para passar esta parte à frente.

A prova que vimos dependeu de maneira fundamental do Lema 5, que afirmava o seguinte:

Seja $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:

- σ é bijectiva;
- $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;
- $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Então σ é a identidade.

Acontece que esta é uma propriedade muito especial do corpo \mathbb{R} . Começemos por dar uma definição mais geral:

Definição 1.9.4. Seja \mathbb{K} um corpo. Uma função $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ diz-se um *automorfismo de* \mathbb{K} se tem as seguintes propriedades:

- σ é bijectiva;
- $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$;
- $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$.

A aplicação identidade de \mathbb{K} diz-se o *automorfismo trivial*, e o Lema 5 na prova anterior afirma, nesta linguagem, que o corpo \mathbb{R} não tem automorfismos não triviais. Mas existem automorfismos não triviais noutros corpos! Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.9.5 (Automorfismos não triviais).

- (i) A conjugação complexa $z \mapsto \bar{z}$ é um automorfismo não trivial do corpo \mathbb{C} .
- (ii) Seja \mathbb{F}_9 o corpo finito com 9 elementos, que tem característica 3. Vamos ver que a função $\sigma : \mathbb{F}_9 \rightarrow \mathbb{F}_9$ definida por

$$\sigma(x) = x^3$$

é um automorfismo não trivial de \mathbb{F}_9 . De facto, a condição $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ é imediata, e temos

$$\sigma(x + y) = (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 = \sigma(x) + \sigma(y)$$

uma vez que $3 = 0$ em \mathbb{F}_9 . Daqui resulta também que σ é injectiva, uma vez que, se $\sigma(x) = \sigma(y)$, então $\sigma(x - y) = 0$, ou seja $(x - y)^3 = 0$, pelo que $x = y$; como \mathbb{F}_9 é finito, σ é também sobrejectiva. Resta assegurarmo-nos de que σ não é a identidade; ora a equação $\sigma(x) = x$ equivale a $x^3 - x = 0$ e portanto tem no máximo $3 < 9$ soluções em \mathbb{F}_9 , e existe assim pelo menos um $x \in \mathbb{F}_9$ (na verdade, existem exactamente 6) para o qual $\sigma(x) \neq x$.

- (iii) Mais geralmente, considere-se o corpo \mathbb{F}_q com q elementos, onde $q = p^n$ para algum primo p e algum inteiro $n > 1$. Então a função $\sigma : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q$ definida por

$$\sigma(x) = x^p$$

é um automorfismo não trivial de \mathbb{F}_q . Tal como no exemplo anterior, é imediato verificar que $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$, e temos também

$$\sigma(x + y) = (x + y)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^k y^{p-k} = x^p + y^p = \sigma(x) + \sigma(y)$$

uma vez que, para $1 \leq k \leq p - 1$, o coeficiente binomial $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ é divisível por p e portanto é igual a 0 em \mathbb{F}_q . Podemos agora verificar como acima que σ é bijectiva e, como o polinómio $x^p - x$ tem no máximo $p < q$ raízes em \mathbb{F}_q , a aplicação σ não é a identidade, e é portanto um automorfismo não trivial de \mathbb{F}_q .

Acontece que a existência destes automorfismos não triviais faz realmente diferença se quisermos estender o Teorema Fundamental da Geometria Afim para outros corpos. Por exemplo, considere-se a função $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ definida por $f(z, w) = (\bar{z}, \bar{w})$. Então f é uma aplicação bijectiva, envia pontos colineares em pontos colineares mas *não* é uma aplicação afim.

Para estendermos o Teorema Fundamental da Geometria Afim para outros corpos, precisamos de introduzir uma classe mais alargada de transformações, a que chamaremos *transformações σ -afins*, onde σ é um automorfismo.

Definição 1.9.6. Sejam \mathbb{K} um corpo, σ um automorfismo de \mathbb{K} e \mathcal{V} e \mathcal{W} espaços vectoriais sobre \mathbb{K} . Uma aplicação $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ diz-se uma *aplicação σ -linear* se

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ e } \varphi(\lambda x) = \sigma(\lambda)\varphi(x) \text{ para quaisquer } x, y \in \mathcal{V} \text{ e } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Estendemos agora a definição de transformação afim (Definição 1.6.1) do seguinte modo:

Definição 1.9.7. Sejam \mathcal{E} e \mathcal{F} espaços afins associados aos espaços vectoriais \mathcal{V} e \mathcal{W} , sobre o mesmo corpo \mathbb{K} , e seja σ um automorfismo de \mathbb{K} . Uma aplicação $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ diz-se uma *transformação σ -afim* (ou uma *aplicação σ -afim*) se existe uma aplicação σ -linear $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ (que chamamos a *aplicação σ -linear associada*) tal que

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ}) \text{ para quaisquer } P, Q \in \mathcal{E}.$$

A prova do Lema 1.6.3 pode ser adaptada para provar o seguinte:

Lema 1.9.8. (Caracterizações equivalentes de transformações σ -afins) *Sejam \mathcal{E} e \mathcal{F} espaços afins sobre \mathbb{K} , σ um automorfismo de \mathbb{K} e $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ uma aplicação. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) *f é uma transformação σ -afim;*
- (ii) *f σ -respeita combinações afins, isto é, para quaisquer $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ com $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ tem-se*

$$f(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k) = \sigma(\lambda_1)f(A_1) + \dots + \sigma(\lambda_k)f(A_k);$$

- (iii) *f σ -respeita combinações afins com duas parcelas, isto é, para quaisquer $A, B \in \mathcal{E}$ e para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$ tem-se*

$$f((1 - \lambda)A + \lambda B) = (1 - \sigma(\lambda))f(A) + \sigma(\lambda)f(B).$$

E por fim, utilizando essencialmente as mesmas ideias da prova do Teorema 1.9.1, obtemos o seguinte resultado mais geral:

Teorema 1.9.9 (Teorema Fundamental da Geometria Afim). *Sejam \mathcal{E} um espaço afim de dimensão $k \geq 2$ sobre o corpo \mathbb{K} e $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ uma aplicação bijectiva que transforma quaisquer três pontos colineares em três pontos também colineares. Então existe um automorfismo σ de \mathbb{K} tal que f é uma aplicação σ -afim.*

§1.10 Exercícios e Problemas

1.1. Seja (A, B, C) um referencial afim de um plano afim real \mathcal{E} . Sejam P_1 e P_2 pontos distintos de \mathcal{E} com coordenadas afins (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) , respectivamente, neste referencial.

- (a) Mostre que as seguintes condições sobre um ponto P de coordenadas afins (x, y, z) são equivalentes:
- (i) P pertence à recta P_1P_2 ;
 - (ii) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y, z) = (1 - \lambda)(x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2)$;
 - (iii) (x, y, z) é combinação linear de (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) .
- (b) Conclua que, no referencial afim (A, B, C) , a recta P_1P_2 tem equação

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = 0$$

1.2. Seja (A, B, C) um referencial afim de um plano afim real \mathcal{E} . Para que valores reais de a, b, c, d, e, f é que as rectas definidas, em coordenadas afins neste referencial, pelas equações

$$ax + by + cz = 0 \quad \text{e} \quad dx + ey + fz = 0$$

são paralelas?

1.3. Seja ABC um triângulo num plano afim real \mathcal{E} . Determine, no referencial afim (A, B, C) ,

- (a) as coordenadas afins dos pontos médios X, Y e Z dos segmentos BC, AC e AB , respectivamente;
- (b) a equação afim da recta XY ;
- (c) as coordenadas afins do ponto W tal que $YXCW$ é um paralelogramo.

1.4. Seja ABC um triângulo num plano afim real, e sejam M o ponto de AB e N o ponto de BC tais que $\frac{AM}{MB} = 2$ e $\frac{AN}{NC} = 1$. Determine, no referencial afim (A, B, C) , uma equação afim da recta MN .

- 1.5.** (a) Prove directamente o Teorema de Ceva com coordenadas baricêntricas, sem utilizar o Teorema de Menelau.
- (b) Prove o recíproco do Teorema de Ceva: se A, B e C são pontos não colineares num plano afim e X, Y e Z são pontos nas rectas BC, CA e AB tais que

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

então as rectas AX, BY e CZ são paralelas ou concorrentes.

1.6. Seja \mathcal{E} um espaço afim com espaço vectorial associado \mathcal{V} sobre um corpo \mathbb{K} . Suponha-se que \mathcal{B} é um subconjunto de \mathcal{E} tal que, para quaisquer dois pontos distintos $P, Q \in \mathcal{B}$, a recta PQ está contida em \mathcal{B} .

- (a) Dado $P \in \mathcal{B}$, mostre que o conjunto $\mathcal{V}_P = \{\overrightarrow{PQ} : Q \in \mathcal{B}\}$ é um subespaço vectorial de \mathcal{V} .

- (b) Observando que $\mathcal{B} = P + \mathcal{V}_P$, conclua que \mathcal{V}_P não depende da escolha de P em \mathcal{B} .
- (c) Conclua que \mathcal{B} é um espaço afim, e que \mathcal{V}_P é o seu espaço vectorial associado.
- 1.7.** (a) Sejam A, B, A' e B' pontos de um plano afim real \mathcal{E} , tais que não haja três colineares. Suponha que as rectas AA' e BB' se intersectam em V , e

$$V = \lambda A + (1 - \lambda)A' = \mu B + (1 - \mu)B'.$$

Mostre que as rectas AB e $A'B'$ se intersectam se e só se for $\lambda \neq \mu$, e que, caso se intersectem, o ponto de intersecção é

$$R = \frac{\lambda}{\lambda - \mu}A - \frac{\mu}{\lambda - \mu}B = \frac{\lambda - 1}{\lambda - \mu}A' - \frac{\mu - 1}{\lambda - \mu}B'.$$

- (b) Demonstre o *Teorema de Desargues*: sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos em \mathcal{E} tais que as rectas AA' , BB' e CC' se intersectam num ponto V , onde A, B, C, A', B', C', V são todos distintos. Então, caso existam, os pontos $P = BC \cap B'C'$, $Q = AC \cap A'C'$ e $R = AB \cap A'B'$ são colineares.
- 1.8.** Para cada ponto O num espaço afim \mathcal{E} , seja s_O a simetria central de centro O . Prove que, para quaisquer pontos I e J , a composta $s_J \circ s_I$ é a translacção pelo vector $2\vec{IJ}$.
- 1.9.** Dados pontos M_1, \dots, M_n num espaço afim real, pretende-se encontrar pontos A_1, \dots, A_n tais que M_1 é o ponto médio do segmento A_1A_2 , M_2 é o ponto médio do segmento A_2A_3 , e assim sucessivamente, até que M_n é o ponto médio do segmento A_nA_1 .

- (a) Mostre que, se n é ímpar, o problema tem uma única solução (i.e., existe sempre exactamente uma sequência de pontos A_1, \dots, A_n com a propriedade pretendida).
- (b) Mostre que, se n é par, o problema tem solução se e só se

$$\vec{M_1M_2} + \vec{M_3M_4} + \dots + \vec{M_{n-1}M_n} = 0$$

e que, se esta igualdade ocorrer, o ponto A_1 pode ser escolhido arbitrariamente.

- (c) Conclua que, para que quatro pontos sejam os pontos médios dos lados de um quadrilátero, é necessário e suficiente que sejam os vértices de um paralelogramo.
- 1.10.** No plano Euclidiano, seja ABC um triângulo e sejam P e Q pontos no interior do segmento BC tais que os segmentos BP e CQ têm o mesmo comprimento. Sejam M e N pontos no interior dos segmentos AP e AQ , respectivamente, tais que MN é paralela a BC . Sejam $X = BM \cap CN$ e $Y = BN \cap CM$. Prove que A, X e Y estão numa mesma recta.
- 1.11.** Seja ABC um triângulo num plano afim real, e sejam D, E e F pontos nas rectas BC, CA e AB , respectivamente, tais que as rectas AD, BE e CF têm um ponto em comum. A recta que passa por E e é paralela a DF intersecta AD em G . Seja M o ponto médio do segmento DG . Mostre que as rectas EM e BC são paralelas.
- 1.12.** Sejam r e s duas rectas distintas num plano afim \mathcal{E} , O um ponto de \mathcal{E} exterior a r e a s , e $A, B \in r$ dois pontos distintos tais que as rectas OA e OB intersectam s em A' e B' , respectivamente. Prove que, para qualquer ponto $X \in r$ tal que OX intersecta s num ponto X' , tem-se

$$\frac{A'X'}{X'B'} = \frac{AX}{XB} \cdot \frac{OA'}{OA} \cdot \frac{OB}{OB'}.$$

2 Circunferências no plano Euclidiano

Vamos interromper por um pouco a nossa viagem rumo ao plano projectivo para explorarmos mais um pouco do plano euclidiano \mathbb{R}^2 (e não $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, pois desta vez vão-nos interessar propriedades que estão longe de ser “afins”). Isto é essencialmente uma desculpa para introduzir o conceito de inversão, que se relaciona bem com alguns conceitos que introduziremos mais tarde, e portanto será conveniente tê-lo à mão nesse momento.

Uma palavra de aviso: a primeira secção, que começa de seguida, é reconhecidamente um pouco aborrecida, e trata apenas de justificar com contas alguns factos intuitivos sobre intersecções de rectas e circunferências. O material interessante está nas outras secções.

§2.1 Intersecções de rectas e circunferências

A seguinte definição deverá ser familiar:

Definição 2.1.1. A circunferência $\mathcal{C}((a, b), r)$ é o conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}.$$

A equação anterior pode ser reescrita na forma

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

onde $c = a^2 + b^2 - r^2$. Designamos também por $\mathcal{C}(a, b, c)$ o conjunto definido por esta condição.

Note-se que, perante uma equação como a última apresentada em cima, podemos recuperar as coordenadas do centro da circunferência que ela define dividindo por -2 os coeficientes de x e y .

Considere-se uma recta ℓ em \mathbb{R}^2 , que admite equação

$$-\beta x + \alpha y + \gamma = 0 \text{ com } (\alpha, \beta) \neq (0, 0).$$

Vamos determinar as intersecções de ℓ com $\mathcal{C}((a, b), r)$. Sendo (x_0, y_0) um ponto de ℓ , temos que ℓ é o conjunto dos pontos da forma

$$(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

Substituindo assim (x, y) por $(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)$ na equação de $\mathcal{C}((a, b), r)$, obtemos a equação

$$(\alpha^2 + \beta^2)t^2 + 2((x_0 - a)\alpha + (y_0 - b)\beta)t + ((x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2) = 0.$$

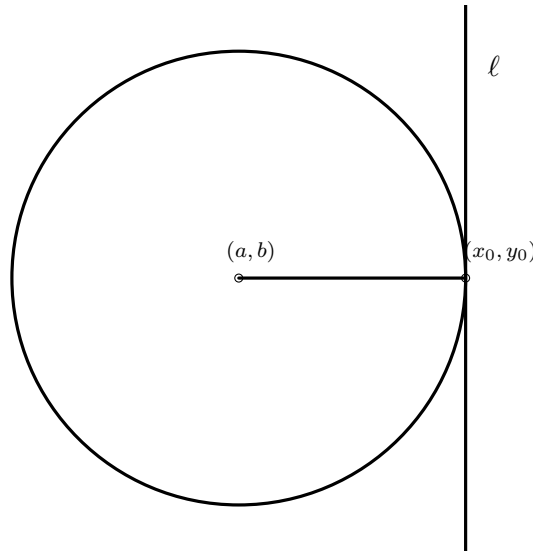
Esta é uma equação de segundo grau em t , e portanto tem no máximo duas soluções. Obtemos:

Proposição 2.1.2. *Se \mathcal{C} e ℓ são, respectivamente, uma circunferência e uma recta em \mathbb{R}^2 , então $\#(\mathcal{C} \cap \ell) \leq 2$.*

No caso em que esta intersecção é não-vazia, como podemos escolher qualquer ponto (x_0, y_0) em ℓ , podemos em particular escolher um ponto de \mathcal{C} . Nesse caso $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 = 0$, e a equação anterior fica

$$(\alpha^2 + \beta^2)t^2 + 2((x_0 - a)\alpha + (y_0 - b)\beta)t = 0.$$

Esta equação admite apenas a solução $t = 0$ precisamente quando $(x_0 - a)\alpha + (y_0 - b)\beta = 0$. Portanto, se esta igualdade se verificar, \mathcal{C} e ℓ têm apenas o ponto (x_0, y_0) em comum; note-se que esta igualdade equivale a que ℓ seja perpendicular à recta que une o centro da circunferência ao ponto (x_0, y_0) .



Usando o facto de que a distância do ponto $O = (a, b)$ à recta ℓ é dada por

$$d(O, \ell) = \frac{|-\beta a + \alpha b + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

e fazendo algumas contas não muito interessantes, provamos o seguinte resultado intuitivo:

Proposição 2.1.3. *Para a circunferência \mathcal{C} de centro O e raio r , tem-se:*

- (i) ℓ é secante \mathcal{C} (isto é, intersecta \mathcal{C} em dois pontos) se e só se $d(O, \ell) < r$;
- (ii) ℓ é tangente a \mathcal{C} se e só se $d(O, \ell) = r$;
- (iii) ℓ é disjunta de \mathcal{C} se e só se $d(O, \ell) > r$.

Vamos agora esboçar brevemente o cenário relativo à intersecção de duas circunferências. Sejam $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(A_1, r_1)$ (onde $A_1 = (a_1, b_1)$) e $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(A_2, r_2)$ (onde $A_2 = (a_2, b_2)$). Começamos por notar que, algebricamente, determinar a intersecção entre as duas circunferências reduz-se automaticamente a determinar a intersecção entre uma das circunferências e uma recta (vamos ver mais tarde que essa recta é o *eixo radical* das duas circunferências). Queremos resolver o sistema

$$\begin{cases} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0 \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0 \end{cases}$$

que equivale, substituindo a segunda equação pela diferença entre a primeira e a segunda, a

$$\begin{cases} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0 \\ 2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2 - r_1^2 + r_2^2 = 0 \end{cases}.$$

Se $A_1 \neq A_2$, a segunda equação é a equação de uma recta ℓ , e conclui-se da equivalência acima que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \cap \ell$. Mas já sabemos como é a intersecção de \mathcal{C}_1 com ℓ . Tem-se

$$d(A_1, \ell) = \frac{|(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + r_1^2 - r_2^2|}{2\sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_1 - b_2)^2}}$$

e a condição $d(A_1, \ell) < r_1$ equivale, após umas contas longas e laboriosas, a

$$|r_1 - r_2| < |A_1A_2| < r_1 + r_2.$$

Analogamente, $d(A_1, \ell) = r_1$ se e só se $|A_1A_2| \in \{|r_1 - r_2|, r_1 + r_2\}$, e $d(A_1, \ell) > r_1$ se e só se $|A_1A_2| < |r_1 - r_2|$ ou $|A_1A_2| > r_1 + r_2$. Logo, conclui-se:

Proposição 2.1.4. *Para as circunferências \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 de centros A_1 e A_2 e raios r_1 e r_2 , respectivamente, tem-se:*

- (i) $\#(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) = 2$ (\mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 são secantes) se e só se $|r_1 - r_2| < |A_1A_2| < r_1 + r_2$;
- (ii) $\#(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) = 1$ (\mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 são tangentes) se e só se $|A_1A_2| = |r_1 - r_2|$ ou $|A_1A_2| = r_1 + r_2$.

Observação 2.1.5. A Proposição anterior não é inesperada; a condição $|r_1 - r_2| < |A_1A_2| < r_1 + r_2$ equivale a que $|A_1A_2|$, r_1 e r_2 sejam os comprimentos dos lados de um triângulo. Ora, se P é um ponto de intersecção de \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , então A_1A_2P é um triângulo cujos lados têm esses comprimentos.

§2.2 Potência de Ponto e circunferências ortogonais

Vamos agora avançar para Geometria mais interessante. O próximo conceito que vamos introduzir é fundamental na Geometria Euclidiana, e é decerto muito conhecido de todos os que já passaram muito tempo a brincar com a mesma.

Potência de um ponto em relação a uma circunferência

Definição 2.2.1. Seja \mathcal{C} uma circunferência em \mathbb{R}^2 de centro O e raio r . Dado um ponto P , a *potência de P em relação a \mathcal{C}* , denotada por $\text{Pot}(P, \mathcal{C})$ ou $\mathcal{C}(P)$, é definida como

$$|OP|^2 - r^2.$$

Se O for o ponto de coordenadas (a, b) e P o ponto de coordenadas (x_0, y_0) , então tem-se

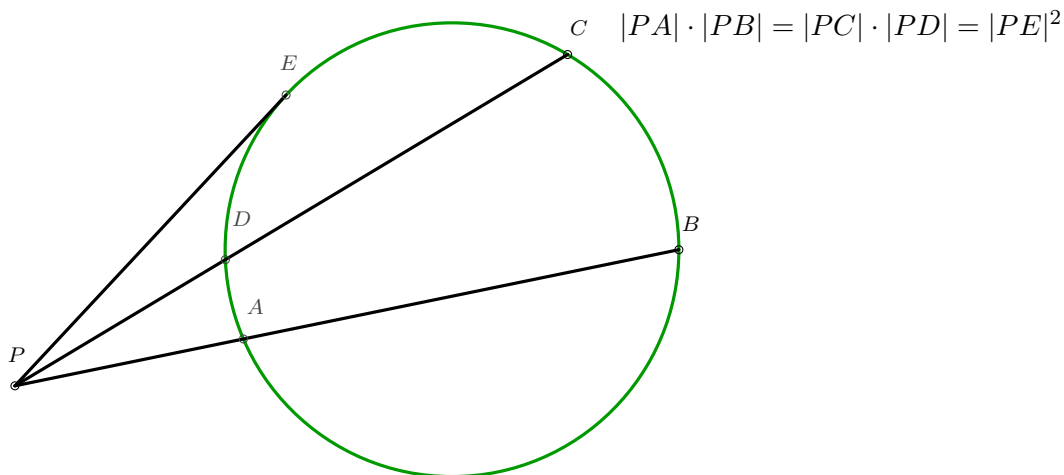
$$\mathcal{C}(P) = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2.$$

O interesse desta definição está essencialmente no seguinte resultado:

Teorema 2.2.2 (Teorema das Cordas). *Seja \mathcal{C} uma circunferência e seja P um ponto. Considere-se uma recta ℓ que passa por P e intersecta \mathcal{C} em pontos X_1 e X_2 . (Se ℓ é tangente a \mathcal{C} , consideramos X_1 e X_2 ambos iguais ao ponto de tangência.) Então o produto escalar*

$$\overrightarrow{PX_1} \cdot \overrightarrow{PX_2}$$

(que é igual ao produto das distâncias $|PX_1|$ e $|PX_2|$ caso os vectores $\overrightarrow{PX_1}$ e $\overrightarrow{PX_2}$ tenham o mesmo sentido, e igual ao seu simétrico caso contrário) não depende da recta ℓ considerada, e é igual a $\text{Pot}(P, \mathcal{C})$.



Demonstração. É possível dar uma prova que utiliza apenas Geometria Sintética, mas aqui vamos dar uma demonstração algébrica. Seja $P = (x_0, y_0)$ e seja

$$c : t \mapsto (x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)$$

uma parametrização da recta ℓ , onde α e β são números reais não ambos nulos. Note-se que α e β só estão determinados a menos da multiplicação por um mesmo factor não nulo, e portanto podemos escolher α e β de modo que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Esta escolha tem a vantagem de que a distância do ponto P_0 ao ponto $c(t)$ é igual a $|t|$ (esta parametrização percorre a recta ℓ com “velocidade 1”), e estamos interessados no produto $t_1 t_2$ onde t_1 e t_2 são os reais para os quais $c(t_1)$ e $c(t_2)$ pertencem a \mathcal{C} .

A equação que nos dá que $c(t)$ está em \mathcal{C} é

$$(x_0 + \alpha t - a)^2 + (y_0 + \beta t - b)^2 - r^2 = 0$$

que, expandindo e usando que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, equivale a

$$t^2 + 2((x_0 - a)\alpha + (y_0 - b)\beta)t + ((x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2) = 0.$$

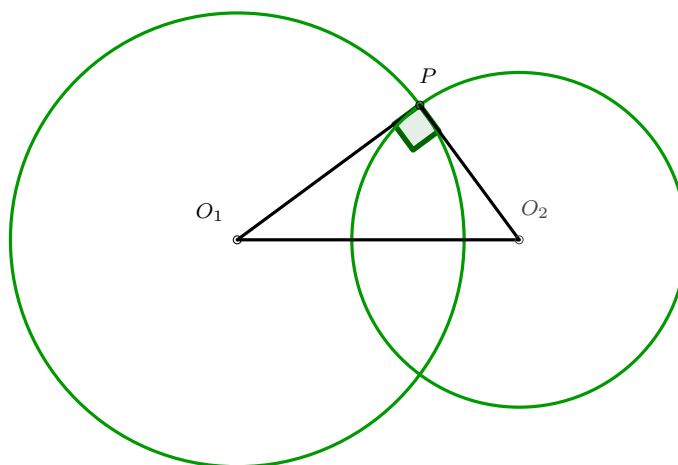
Estamos interessados no produto $t_1 t_2$ das raízes do polinómio quadrático em t do lado esquerdo. Ora, pelas fórmulas de Viète, esse produto é igual ao termo constante do polinómio. Este, por sua vez, é igual a $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$, que não é nada mais nada menos do que $\text{Pot}(P_0, \mathcal{C})$, e a demonstração terminou. \square

Observação 2.2.3. É evidente a partir da definição de Potência que, para um ponto P_0 e uma circunferência \mathcal{C} , se tem

- $\text{Pot}(P_0, \mathcal{C}) > 0$ se e só se P_0 não pertence ao círculo delimitado por \mathcal{C} ;
- $\text{Pot}(P_0, \mathcal{C}) = 0$ se e só se $P_0 \in \mathcal{C}$;
- $\text{Pot}(P_0, \mathcal{C}) < 0$ se e só se P_0 pertence ao interior do círculo delimitado por \mathcal{C} .

Circunferências ortogonais

Definição 2.2.4. Duas circunferências \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 de centros O_1 e O_2 dizem-se *ortogonais* (notação: $\mathcal{C}_1 \perp \mathcal{C}_2$) se são secantes e, sendo P um dos pontos de intersecção, o triângulo $O_1 O_2 P$ é rectângulo com hipotenusa $O_1 O_2$.



Vamos ver algumas formas equivalentes de caracterizar circunferências ortogonais.

Lema 2.2.5. *Sejam \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 duas circunferências de centros O_1 e O_2 e raios r_1 e r_2 . As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\mathcal{C}_1 \perp \mathcal{C}_2$;

(ii) $|O_1O_2|^2 = r_1^2 + r_2^2$;

(iii) $\text{Pot}(O_2, \mathcal{C}_1) = r_2^2$;

(iv) $\text{Pot}(O_1, \mathcal{C}_2) = r_1^2$.

Demonstração. Comece-se por notar que, como por definição $\text{Pot}(O_2, \mathcal{C}_1) = |O_1O_2|^2 - r_1^2$, (ii) e (iii) são claramente equivalentes entre si; analogamente (ii) e (iv) também o são. Basta-nos assim provar que (i) e (ii) são equivalentes.

- Se $\mathcal{C}_1 \perp \mathcal{C}_2$, seja P um ponto de intersecção de \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , de modo que o triângulo O_1O_2P é rectângulo com o ângulo recto em P . Então, pelo Teorema de Pitágoras em O_1O_2P ,

$$|O_1O_2|^2 = |O_1P|^2 + |O_2P|^2.$$

Como P pertence a \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , tem-se $|O_1P| = r_1$ e $|O_2P| = r_2$, e (ii) segue.

- Se $|O_1O_2|^2 = r_1^2 + r_2^2$, como $(r_1 - r_2)^2 < r_1^2 + r_2^2 < (r_1 + r_2)^2$ resulta que $|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$. Pela Proposição 2.1.4, \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 têm um ponto P em comum. Ora, temos $|O_1O_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 = |O_1P|^2 + |O_2P|^2$, logo, pelo recíproco do Teorema de Pitágoras, O_1O_2P é rectângulo em P , e $\mathcal{C}_1 \perp \mathcal{C}_2$.

□

Observação 2.2.6. Do Lema anterior decorre que, se \mathcal{C} é uma circunferência e O é um ponto exterior ao círculo delimitado por \mathcal{C} , então a única circunferência de centro O que é ortogonal a \mathcal{C} é a que tem raio $\sqrt{\text{Pot}(O, \mathcal{C})}$.

Eixo radical de duas circunferências

Definição 2.2.7. Sejam \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 duas circunferências não concêntricas (isto é, com centros diferentes). O *eixo radical* de \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , representado por $[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$, é o lugar geométrico dos pontos que têm a mesma potência em relação a \mathcal{C}_1 e a \mathcal{C}_2 :

$$[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2] = \{P : \mathcal{C}_1(P) = \mathcal{C}_2(P)\}.$$

(Recorde-se que $\mathcal{C}(P)$ é uma notação alternativa para a potência de P em relação a \mathcal{C} .)

Suponhamos que \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 têm, respectivamente, equações

$$x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = 0 \text{ e } x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 = 0.$$

Então temos

$$\mathcal{C}_j(x, y) = x^2 + y^2 - 2a_jx - 2b_jy + c_j$$

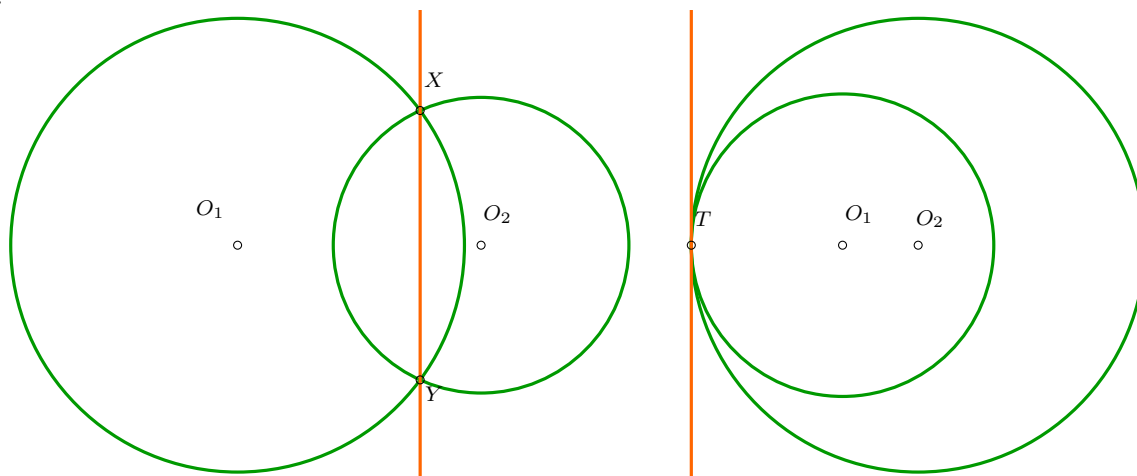
para todo o ponto (x, y) e $j = 1, 2$. A equação que define o eixo radical de \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 é, assim, $\mathcal{C}_1(x, y) - \mathcal{C}_2(x, y) = 0$, ou seja,

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + c_1 - c_2 = 0.$$

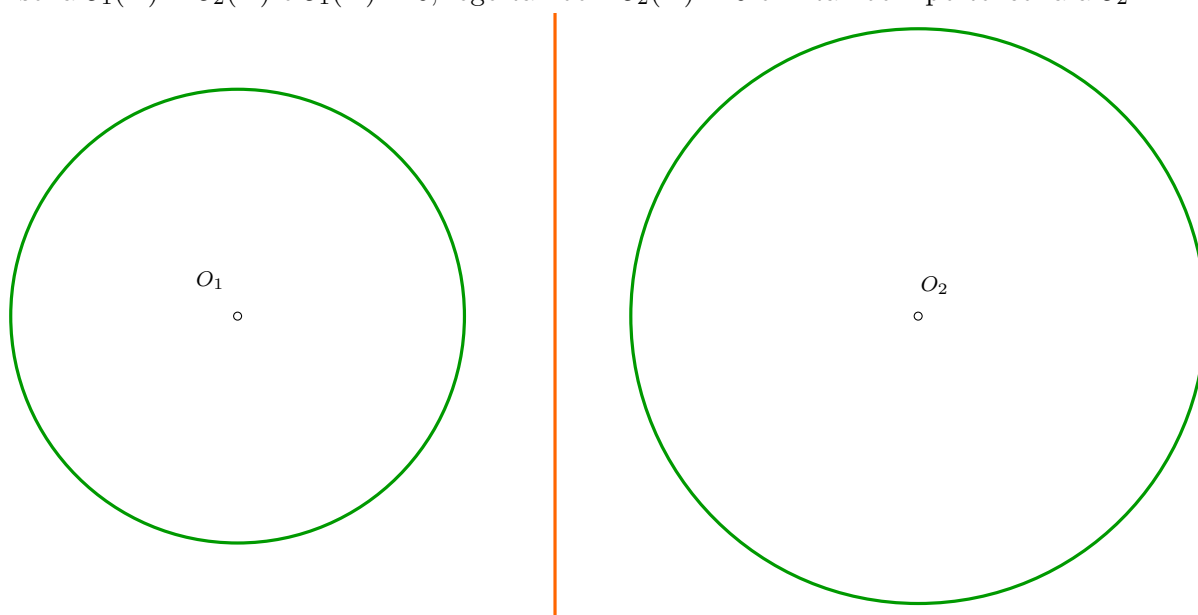
Daqui decorre, uma vez que os centros de \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 têm coordenadas (a_1, b_1) e (a_2, b_2) respectivamente, que o eixo radical de \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 é uma recta perpendicular à recta que contém os centros de \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 :

Proposição 2.2.8. *O eixo radical de duas circunferências não concêntricas é uma recta perpendicular à recta que contém os centros das duas circunferências.*

Podemos dizer melhor no caso em que as circunferências \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 não são disjuntas. De facto, se \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 se intersectam em dois pontos X e Y , ambos esses pontos de intersecção têm potência 0 em relação às duas circunferências. Portanto o eixo radical contém X e Y , e, como já sabemos que é uma recta, é a recta XY . E se \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 são tangentes num ponto T , então analogamente o eixo radical contém T , e, como é perpendicular à recta que contém os centros das duas circunferências, decorre facilmente que é a recta tangente comum às duas circunferências por T .



Se \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 não se intersectam, então o eixo radical de \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 não intersecta nenhuma das circunferências. De facto, se P fosse um ponto de intersecção de $[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$, digamos, com \mathcal{C}_1 , ter-se-ia $\mathcal{C}_1(P) = \mathcal{C}_2(P)$ e $\mathcal{C}_1(P) = 0$, logo também $\mathcal{C}_2(P) = 0$ e P também pertenceria a \mathcal{C}_2 .

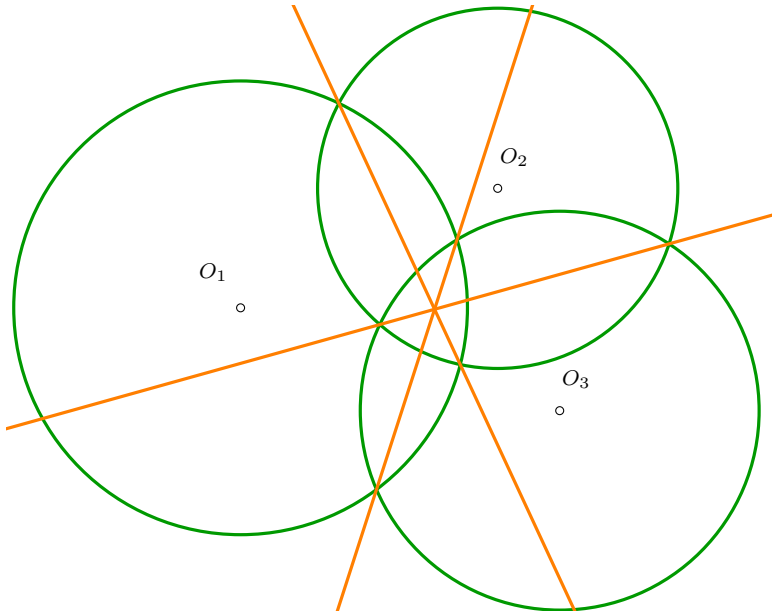


Aproveitamos para constatar um facto simples que será útil mais tarde:

Proposição 2.2.9. *A parte do eixo radical $[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$ no exterior dos círculos delimitados por \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 é o lugar geométrico dos centros das circunferências simultaneamente ortogonais a \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 .*

Demonstração. É uma consequência imediata da Observação 2.2.6. □

Proposição/Definição 2.2.10. Sejam \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 e \mathcal{C}_3 circunferências de centros não colineares. Então os eixos radicais $[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$, $[\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3]$ e $[\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_1]$ são concorrentes. O seu ponto de intersecção é designado o *centro radical* de \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 e \mathcal{C}_3 .



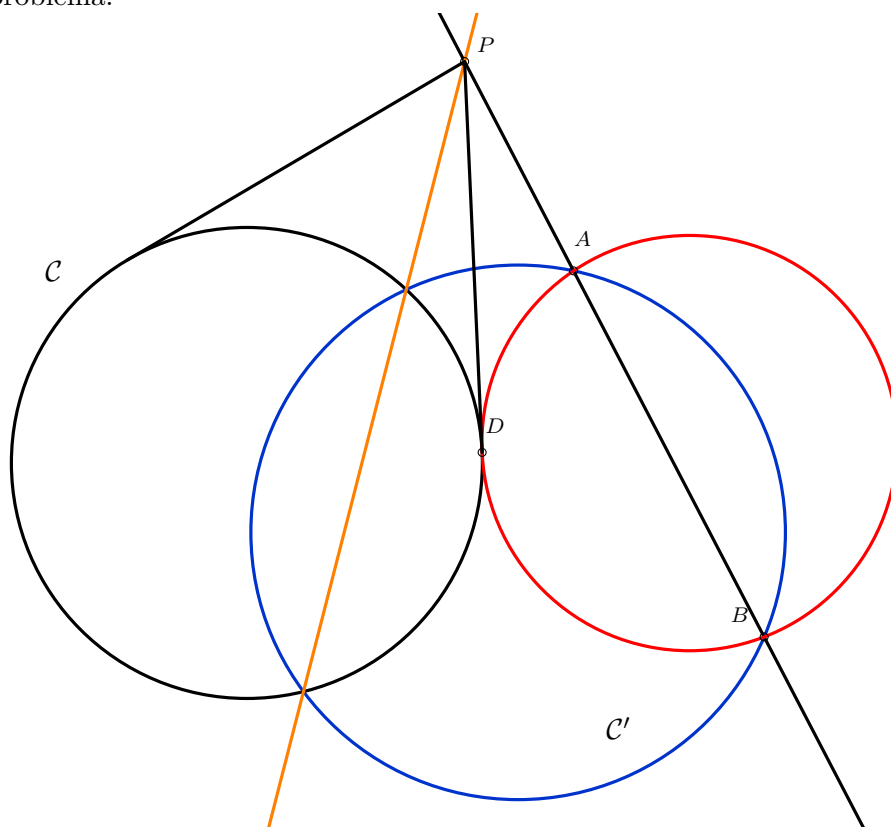
Demonstração. Como os centros O_1 , O_2 e O_3 não são colineares, as rectas O_1O_2 e O_2O_3 não são paralelas, logo os eixos radicais $[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$ e $[\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3]$, que são perpendiculares a estas duas rectas, também não são paralelos, e portanto têm um ponto P em comum. Mas então $\mathcal{C}_1(P) = \mathcal{C}_2(P)$ e $\mathcal{C}_2(P) = \mathcal{C}_3(P)$, logo por transitividade $\mathcal{C}_1(P) = \mathcal{C}_3(P)$ e $P \in [\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3]$. Assim os três eixos radicais concorrem em P . □

Isto dá-nos um método para determinar geometricamente o eixo radical de duas circunferências que não se intersectam. Se \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 são disjuntas, tomamos uma circunferência \mathcal{D} que seja secante a ambas e cujo centro não seja colinear com os centros O_1 e O_2 de \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 ; a intersecção dos eixos radicais $[\mathcal{C}_1, \mathcal{D}]$ e $[\mathcal{C}_2, \mathcal{D}]$ dá-nos um ponto no eixo radical de \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , e basta-nos então traçar a perpendicular a O_1O_2 por esse ponto.

Vamos agora ver uma aplicação interessante da teoria que desenvolvemos até agora. Trata-se de um problema de construtibilidade com régua e compasso que tem as suas origens na Grécia Antiga (é um caso particular do clássico *Problema de Apolónio*), e que tem uma solução elegante utilizando potência de ponto e circunferências ortogonais.

Problema. Dada uma circunferência \mathcal{C} e dois pontos A e B no plano, construir com régua e compasso uma circunferência que passe por A e B e seja tangente a \mathcal{C} .

Resolução. Constrói-se uma circunferência \mathcal{C}' que passe por A e B e seja secante a \mathcal{C} . Intersecta-se o eixo radical $[\mathcal{C}, \mathcal{C}']$ com a recta AB em P . Constroem-se as tangentes a \mathcal{C} por P . Se D for um dos pontos de tangência, então a circunferência que passa por A , B e D é solução do problema.



Justificação. Seja Γ a circunferência que passa por A , B e D . Considere-se a circunferência Ω centrada em P e que passa por D , com raio r . Esta circunferência é ortogonal a \mathcal{C} , já que, sendo O o centro de \mathcal{C} , o triângulo POD é rectângulo em D (uma vez que PD é tangente a \mathcal{C} em D). Portanto (foi um dos critérios de ortogonalidade que vimos) $\text{Pot}(P, \mathcal{C}) = r^2$. Como P pertence ao eixo radical de \mathcal{C} e \mathcal{C}' , também $\text{Pot}(P, \mathcal{C}) = r^2$ e Ω é ortogonal a \mathcal{C}' . Como P pertence ao eixo radical de \mathcal{C}' e Γ , outra aplicação deste argumento mostra que Ω é ortogonal a Γ . Mas então, sendo U o centro de Γ , o triângulo PUD é rectângulo com ângulo recto em D , logo PD é tangente a Γ em D . Como a mesma recta é tangente a Γ e \mathcal{C} em D , conclui-se que as duas circunferências são tangentes em D . \square

§2.3 Feixes de circunferências

Como já vimos, a equação de qualquer circunferência \mathcal{C} em \mathbb{R}^2 pode escrever-se na forma

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

onde (a, b) é o centro de \mathcal{C} e $c = a^2 + b^2 - r^2$, onde r é o raio de \mathcal{C} , e em particular $c \leq a^2 + b^2$. Fazendo corresponder a \mathcal{C} o ponto $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, obtemos uma correspondência bijectiva entre circunferências no plano Euclidiano e pontos de \mathbb{R}^3 na região \mathcal{J} definida por

$$\mathcal{J} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a^2 + b^2 - c \geq 0\}.$$

Dada uma recta em \mathbb{R}^3 , os pontos nela contidos (e no interior de \mathcal{J}) correspondem assim, através desta bijecção, a circunferências em \mathbb{R}^2 . Obtemos assim, para cada recta de \mathbb{R}^3 , uma família de circunferências no plano Euclidiano. Essas famílias chamam-se *feixes de circunferências*. O objectivo desta secção é estudar propriedades geométricas dos feixes; vamos ver que, no mínimo, nos fornecem figuras elegantes de um ponto de vista estético.

Como por dois pontos distintos de \mathcal{J} passa exactamente uma recta, quaisquer duas circunferências distintas em \mathbb{R}^2 pertencem a um único feixe. Vamos utilizar esta observação para dar uma definição formal de feixe de circunferências.

Definição 2.3.1. Sejam \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 duas circunferências distintas em \mathbb{R}^2 , definidas por equações

$$\mathcal{C}_0(x, y) = x^2 + y^2 - 2a_0x - 2b_0y + c_0 = 0 \text{ e } \mathcal{C}_1(x, y) = x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = 0.$$

O feixe de circunferências gerado por \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 , denotado por $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$, é a família de circunferências $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$, onde \mathcal{C}_λ é definida pela equação

$$(1 - \lambda)\mathcal{C}_0(x, y) + \lambda\mathcal{C}_1(x, y) = 0.$$

Ainda na notação da definição anterior, observe-se que $\mathcal{C}_\lambda(x, y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$, onde $(a, b, c) = (1 - \lambda)(a_0, b_0, c_0) + \lambda(a_1, b_1, c_1)$; ou seja, quando variamos λ , o ponto (a, b, c) percorre as combinações afins de (a_0, b_0, c_0) e (a_1, b_1, c_1) , isto é, percorre a recta que passa por esses dois pontos. Isto bate certo com a nossa intenção original ao definir feixes de circunferências.

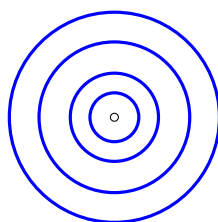
Desta observação concluímos ainda que o centro de \mathcal{C}_λ é $(a, b) = (1 - \lambda)(a_0, b_0) + \lambda(a_1, b_1)$, e assim o centro de \mathcal{C}_λ é combinação afim dos centros de \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 . Obtemos assim uma primeira propriedade geométrica dos feixes de circunferências:

Proposição 2.3.2. Sejam \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 duas circunferências distintas em \mathbb{R}^2 .

- Se \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 têm o mesmo centro O , então todas as circunferências de $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$ têm centro O .
- Se \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 não são concêntricas, então os centros das circunferências de $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$ pertencem à recta que passa pelos centros de \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 .

De facto, no primeiro caso, é fácil ver que o feixe de circunferências gerado por \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 é o conjunto de *todas* as circunferências centradas no centro comum de \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 , e obtemos o primeiro

dos vários tipos de feixes que vamos encontrar: um **feixe de circunferências concêntricas**.



Feixes de pontos fixos

Vamos agora tentar descrever o feixe gerado por duas circunferências cuja intersecção não é vazia. Começamos com uma observação:

Proposição 2.3.3. *Sejam \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 circunferências distintas em \mathbb{R}^2 . Então por cada ponto do plano exterior ao eixo radical $[\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1]$ passa exactamente uma circunferência do feixe $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$.*

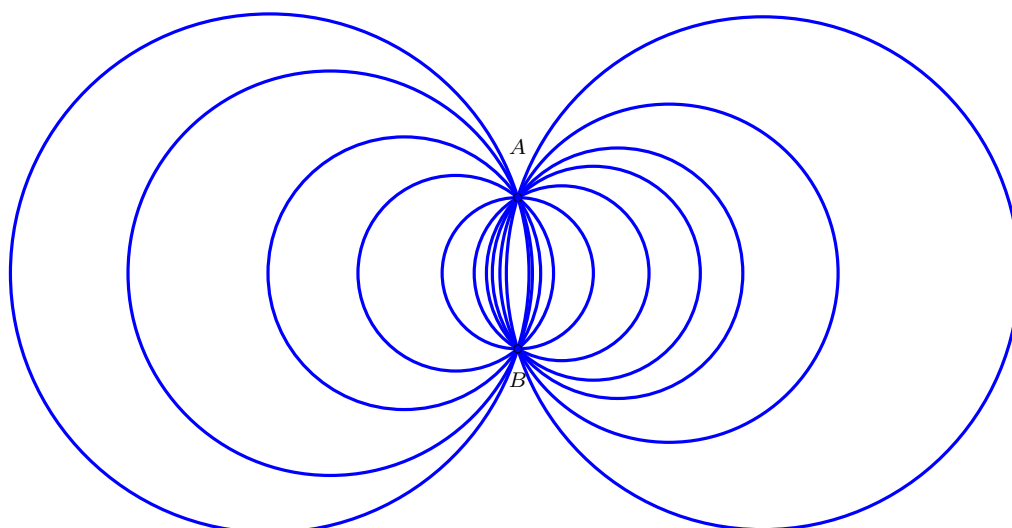
Demonstração. Seja P um ponto no exterior do eixo radical de \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 ; queremos provar que existe exactamente um real λ para o qual $(1 - \lambda)\mathcal{C}_0(P) + \lambda\mathcal{C}_1(P) = 0$. Isto equivale a ter-se

$$\lambda = \frac{\mathcal{C}_0(P)}{\mathcal{C}_0(P) - \mathcal{C}_1(P)}$$

o que mostra que λ existe e é único (note-se que o denominador é não nulo pois $P \notin [\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1]$). \square

Considerem-se agora duas circunferências distintas \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 que se intersectam em dois pontos distintos A e B . Então qualquer circunferência em $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$ passa por A e B ; de facto, para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se $(1 - \lambda)\mathcal{C}_0(A) + \lambda\mathcal{C}_0(A) = 0 + 0 = 0$ uma vez que $\mathcal{C}_0(A) = \mathcal{C}_1(A) = 0$, o que mostra que A pertence a todas as circunferências do feixe, e analogamente B também pertence. Reciprocamente, considere-se uma circunferência \mathcal{C} que passe por A e por B ; seja P um ponto de \mathcal{C} , diferente de A e B . Então P não pertence ao eixo radical AB , logo, pela Proposição 2.3.3, existe uma única circunferência de $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$ que passa por P . Como todas as circunferências de $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$ passam por A e B , essa circunferência passa por A , B e P e portanto é igual a \mathcal{C} ; conclui-se que $\mathcal{C} \in \mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$.

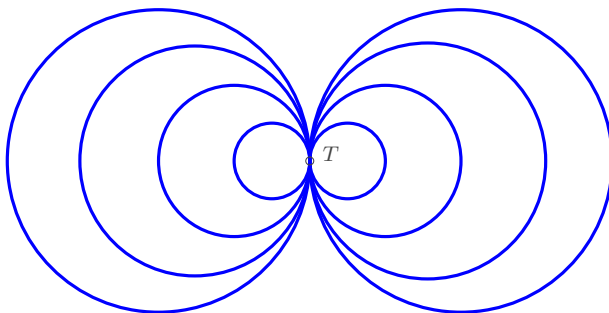
Em suma, o feixe $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$ é constituído precisamente pelas circunferências que passam por A e B . Chamamos a este feixe o **feixe de pontos fixos A e B** .



No caso em que \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 se intersectam apenas num ponto T , todas as circunferências do feixe $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$ passam por T ; além disso, dada uma circunferência $\mathcal{C}_\lambda = \{P : (1-\lambda)\mathcal{C}_0(P) + \lambda\mathcal{C}_1(P) = 0\} \in \mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$, com $\lambda \neq 0$, temos $\mathcal{C}_\lambda \cap \mathcal{C}_0 = \{T\}$. De facto, se \mathcal{C}_λ e \mathcal{C}_0 tivessem outro ponto de intersecção, digamos P , então ter-se-ia $(1-\lambda)\mathcal{C}_0(P) + \lambda\mathcal{C}_1(P) = 0$; como $\mathcal{C}_0(P) = 0$ e $\lambda \neq 0$, resultaria que $\mathcal{C}_1(P) = 0$, o que é absurdo pois, por hipótese, \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 são tangentes em T . Obtemos, assim, que todas as circunferências de $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$ são tangentes a \mathcal{C}_0 em T .

Reciprocamente, dada uma circunferência \mathcal{C} tangente a \mathcal{C}_0 em T , considere-se um ponto $P \in \mathcal{C} \setminus \{T\}$; pela Proposição 2.3.3, existe uma circunferência que passa por P e pertence a $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$; essa circunferência passa por P e é tangente a \mathcal{C}_0 em T , logo é igual a \mathcal{C} (porquê?).

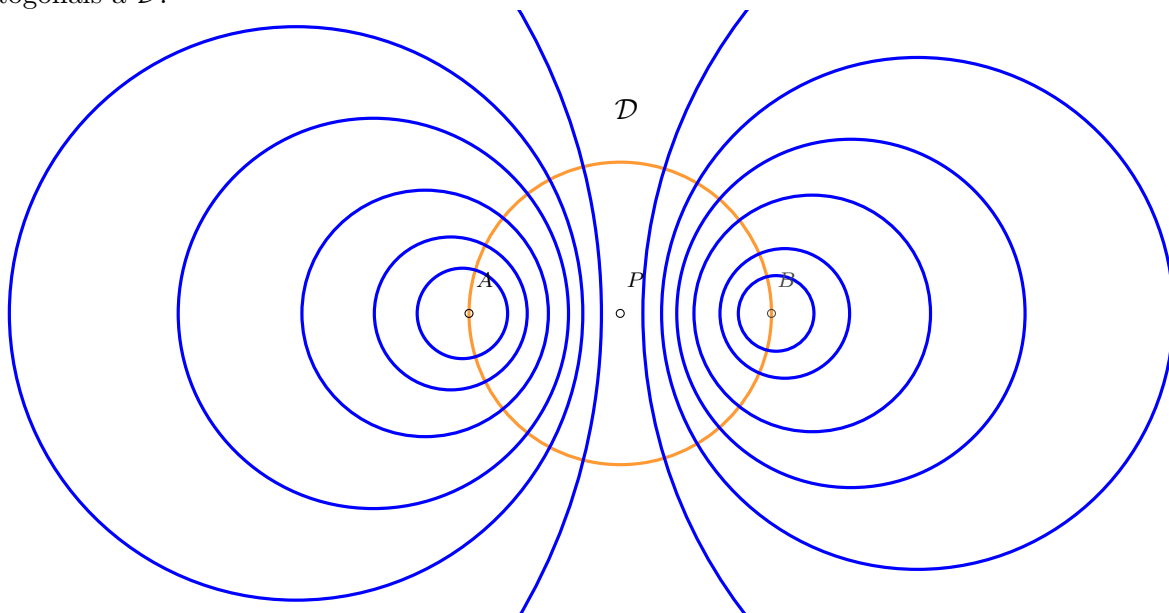
Conclui-se que as circunferências de $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$ são precisamente as circunferências tangentes a \mathcal{C}_0 em T . Obtemos um **feixe de circunferências tangentes**.



Feixes de pontos limite

Os feixes gerados por circunferências disjuntas não concêntricas são aqueles em que nos teremos de contentar com uma descrição geométrica mais “estranha”. No entanto, tal descrição existe, como vamos ver de seguida.

Considerem-se quaisquer duas circunferências disjuntas \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 , de centros O_0 e O_1 distintos; então o eixo radical $[\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1]$ é uma recta perpendicular a O_0O_1 disjunta de \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 , e portanto intersecta O_0O_1 num ponto P exterior aos círculos delimitados por \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 . Centrada em P , existe uma circunferência \mathcal{D} ortogonal a \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 (ver Proposição 2.2.9). Vamos ver que o feixe $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$ é constituído precisamente pelas circunferências de centro na recta O_0O_1 que são ortogonais a \mathcal{D} .



Para provar que esta descrição é correcta, precisamos de um Lema auxiliar que pode, aliás, ser utilizado para uma dedução alternativa simples da descrição dos feixes gerados por circunferências que se intersectam.

Lema 2.3.4. *Sejam \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 circunferências não concêntricas. Então uma circunferência $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}_0$ pertence ao feixe $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$ se e só se o eixo radical de \mathcal{C}_0 e \mathcal{C} coincide com o eixo radical de \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 :*

$$[\mathcal{C}_0, \mathcal{C}] = [\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1].$$

Demonstração. Tem-se $[\mathcal{C}_0, \mathcal{C}] = [\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1]$ se e só se as equações

$$\mathcal{C}(x, y) - \mathcal{C}_0(x, y) = 0 \text{ e } \mathcal{C}_1(x, y) - \mathcal{C}_0(x, y) = 0$$

definirem a mesma recta. Tal acontece se e só se os polinómios lineares $\mathcal{C}(x, y) - \mathcal{C}_0(x, y)$ e $\mathcal{C}_1(x, y) - \mathcal{C}_0(x, y)$ forem iguais a menos de multiplicação por um escalar não nulo. Isso equivale a ter-se

$$\mathcal{C}(x, y) - \mathcal{C}_0(x, y) = \lambda(\mathcal{C}_1(x, y) - \mathcal{C}_0(x, y))$$

para algum $\lambda \neq 0$. Como a igualdade anterior se reescreve na forma $\mathcal{C}(x, y) = (1 - \lambda)\mathcal{C}_0(x, y) + \lambda\mathcal{C}_1(x, y)$, com $\lambda \neq 0$, conclui-se que a mesma tem lugar se e só se \mathcal{C} é uma circunferência diferente de \mathcal{C}_0 no feixe $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$, o que mostra o pretendido. \square

Com isto, voltemos a considerar duas circunferências disjuntas não concêntricas \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 de centros O_0 e O_1 , respectivamente, e o ponto P e a circunferência \mathcal{D} introduzidos atrás.

- Suponha-se que $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}_0$ é uma circunferência de centro $O \in O_0O_1$ ortogonal a \mathcal{D} . Como \mathcal{D} , centrada em P , é ortogonal a \mathcal{C} e a \mathcal{C}_0 , conclui-se da Proposição 2.2.9 que o eixo radical de \mathcal{C}_0 e \mathcal{C} passa por P ; assim o eixo radical de \mathcal{C}_0 e \mathcal{C} é a recta perpendicular a O_0O (ou seja, a O_0O_1) que passa por P . Mas, por construção, essa recta é o eixo radical de \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 . Pelo Lema 2.3.4 conclui-se que $\mathcal{C} \in \mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$.
- Reciprocamente, suponha-se agora que \mathcal{C} é uma circunferência (que podemos supor diferente de \mathcal{C}_0) no feixe $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$. Então P , que pertence ao eixo radical de \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 , também pertence ao eixo radical de \mathcal{C}_0 e \mathcal{C} pelo Lema 2.3.4. Assim, como P é exterior a \mathcal{C}_0 , também é exterior a \mathcal{C} , e assim existe, pela Proposição 2.2.9, uma (única) circunferência centrada em P ortogonal a \mathcal{C}_0 e \mathcal{C} . Mas a única circunferência centrada em P e ortogonal a \mathcal{C}_0 é \mathcal{D} , logo conclui-se que \mathcal{C} é ortogonal a \mathcal{D} . Como \mathcal{C} tem centro em O_0O_1 pela Proposição 2.3.2, conclui-se que \mathcal{C} é uma circunferência de centro na recta O_0O_1 ortogonal a \mathcal{D} , como afirmado.

Note-se que o feixe $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$ contém duas circunferências de raio 0 (formadas pelas intersecções A e B de \mathcal{D} com O_0O_1). Chamamos a este feixe o **feixe de pontos limite A e B** ; é constituído pelas circunferências de centro na recta AB ortogonais à circunferência de diâmetro AB .

Feixes ortogonais

Voltemos a considerar a identificação da circunferência $\mathcal{C}(a, b, c)$ com o ponto $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Considerem-se duas circunferências $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}(a_0, b_0, c_0)$ e $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(a_1, b_1, c_1)$. Vejamos que condições é que os pontos (a_0, b_0, c_0) e (a_1, b_1, c_1) devem satisfazer para que \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 sejam ortogonais.

Sendo r_0 e r_1 os raios de \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 , respectivamente, sabemos pelo Lema 2.2.5 que $\mathcal{C}_0 \perp \mathcal{C}_1$ se e só se o quadrado da distância entre os centros (a_0, b_0) e (a_1, b_1) é igual a $r_0^2 + r_1^2$. Usando que $r_j^2 = a_j^2 + b_j^2 - c_j$ para $j = 0, 1$, tal equivale a ter-se

$$(a_0 - b_0)^2 + (a_1 - b_1)^2 = (a_0^2 + b_0^2 - c_0) + (a_1^2 + b_1^2 - c_1),$$

que, após simplificação, equivale a

$$2a_0a_1 + 2b_0b_1 - c_0 - c_1 = 0.$$

De forma análoga, vemos quando é que a circunferência $\mathcal{C}(a, b, c)$ é simultaneamente ortogonal a \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 . De facto, pela relação anterior, tal equivale a que (a, b, c) pertença aos planos definidos pelas equações

$$2a_0x + 2b_0y - z = c_0 \text{ e } 2a_1x + 2b_1y - z = c_1.$$

Se os centros (a_0, b_0) e (a_1, b_1) são distintos, estes planos não são paralelos, e como tal intersectam-se numa recta! Conclui-se que os pontos (a, b, c) correspondentes a circunferências simultaneamente ortogonais a \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 pertencem a uma recta. E os pontos de uma recta correspondem precisamente a um feixe de circunferências, obtendo-se:

Lema 2.3.5. *Dadas duas circunferências não concêntricas \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 , o conjunto das circunferências simultaneamente ortogonais a \mathcal{C}_0 e a \mathcal{C}_1 é um feixe de circunferências.*

Podemos dizer ainda melhor. Considere-se uma circunferência $\mathcal{C} \in \mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$ diferente de \mathcal{C}_0 , e seja \mathcal{D} uma circunferência de centro O ortogonal a \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 . Então O pertence ao eixo radical de \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 , que é também o eixo radical de \mathcal{C}_0 e \mathcal{C} pelo Lema 2.3.4. Mas então a (única) circunferência de centro O ortogonal a \mathcal{C}_0 também é ortogonal a \mathcal{C} ; ou seja, \mathcal{D} é ortogonal a \mathcal{C} ! Conclui-se que as circunferências ortogonais a \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_1 (que, pelo Lema 2.3.5, formam um feixe) são ortogonais a *todas* as circunferências de $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$. A seguinte definição parece portanto razoável:

Definição 2.3.6. Dois feixes de circunferências \mathcal{F} e \mathcal{F}' dizem-se *ortogonais* se toda a circunferência de \mathcal{F} é ortogonal a toda a circunferência de \mathcal{F}' .

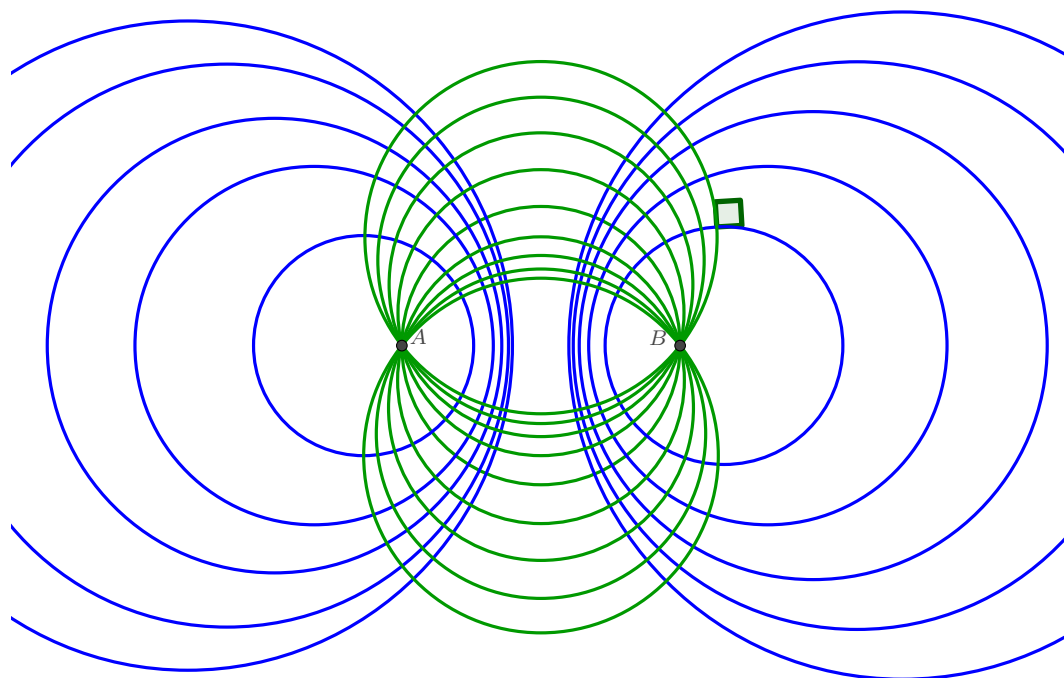
Decorre, assim, do que vimos até agora que dado qualquer feixe de circunferências não concêntricas existe exactamente um feixe ortogonal a esse.

Impõe-se agora a questão de caracterizar os feixes ortogonais aos vários tipos de feixes (de circunferências não concêntricas) que fomos introduzindo. Vamos deixar o caso fácil dos feixes de circunferências tangentes como exercício e responder de uma só vez à questão para os outros dois tipos de feixes de circunferências não concêntricas.

Proposição 2.3.7. *Dados dois pontos A e B , o feixe de pontos fixos A e B e o feixe de pontos limite A e B são ortogonais.*

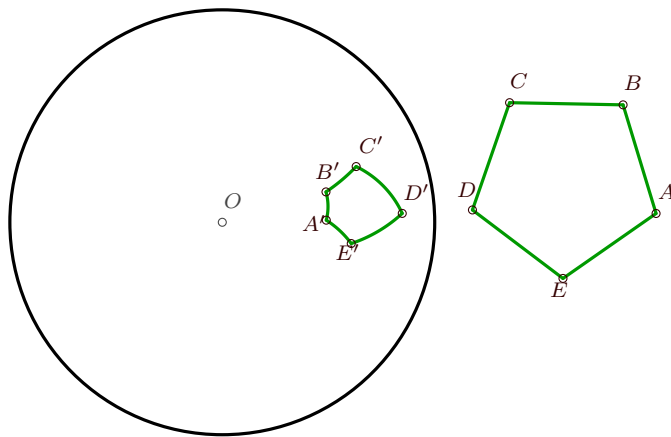
Demonstração. Seja \mathcal{D} a circunferência de diâmetro AB . Considere-se uma circunferência \mathcal{C} de centro O no feixe de pontos limite A e B . Então O pertence à recta AB e \mathcal{C} é ortogonal a \mathcal{D} . Dada qualquer circunferência $\mathcal{C}' \neq \mathcal{D}$ no feixe de pontos fixos A e B , o eixo radical de \mathcal{C}' e \mathcal{D} é a recta AB . Como O está nessa recta, a única circunferência de centro O ortogonal a \mathcal{D} é

ortogonal a \mathcal{C}' , ou seja, \mathcal{C} é ortogonal a \mathcal{C}' . Conclui-se que toda a circunferência no feixe de pontos limite A e B é ortogonal a toda a circunferência no feixe de pontos fixos A e B , logo os dois feixes são ortogonais. \square



§2.4 Inversão

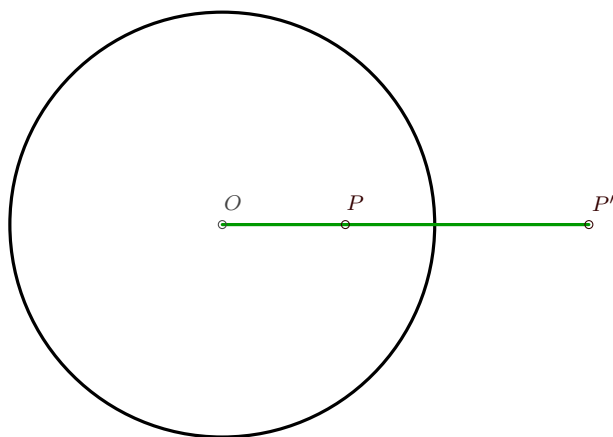
Dada uma circunferência C no plano euclidiano \mathbb{R}^2 , a inversão em C é uma transformação geométrica que pode ser pensada como a “reflexão em C ”: a intuição é que, dado um espelho curvo unidimensional com forma de circunferência, o inverso de um ponto é obtido reflectindo o ponto nesse espelho.



Não é de todo óbvio, num primeiro momento, porque é que a definição formal que daremos de seguida concretiza esta intuição, e de facto é difícil dar a definição de inversão sem a fazer parecer, à primeira vista, pouco motivada e “caída do céu”. Mas nas páginas que se seguem vamos explorar algumas propriedades geométricas da inversão, e, esperamos, convencer o leitor do seu poder.

Definição 2.4.1 (Inversão numa circunferência). A *inversão* na circunferência em \mathbb{R}^2 de centro O e raio r é a aplicação que a cada ponto $P \neq O$ faz corresponder o único ponto P' na semi-recta de origem em O e que passa por P tal que

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2.$$



Mais geralmente, dada uma hiper-esfera \mathcal{S} em \mathbb{R}^n de centro O e raio r (ou seja, $\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{R}^n : \|X - O\| = r\}$), podemos definir a inversão em \mathcal{S} de maneira análoga.

Definição 2.4.2. (*Inversão numa hiper-esfera*) A inversão na hiper-esfera em \mathbb{R}^n de centro O e raio r é a aplicação que a cada ponto $P \neq O$ faz corresponder o único ponto P' na semi-recta de origem em O e que passa por P tal que

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2.$$

Observação 2.4.3. A inversão numa circunferência \mathcal{C} em \mathbb{R}^2 (ou, mais geralmente, numa hiper-esfera \mathcal{S} em \mathbb{R}^n) tem as seguintes propriedades imediatas:

- Pontos em \mathcal{C} (ou em \mathcal{S}) são enviados em si próprios;
- Pontos fora do círculo delimitado por \mathcal{C} (ou da bola delimitada por \mathcal{S}) são enviados em pontos dentro do círculo delimitado por \mathcal{C} (ou da bola delimitada por \mathcal{S}) e vice-versa;
- A inversão é involutiva, ou seja, se a inversão envia P em P' então envia P' em P .

Note-se que a inversão não está definida para o centro da hiper-esfera em que é feita a inversão. Chamamos a esse ponto o *centro de inversão*.

O nosso próximo objectivo será descrever as imagens por inversão de hiperplanos e hiper-esferas (que no caso plano correspondem a rectas e circunferências). Perante o aspecto da definição de inversão, poder-se-ia esperar que essas imagens fossem, em geral, superfícies pouco naturais geometricamente. Surpreendentemente, na verdade as imagens por inversão de hiperplanos e hiper-esferas são também hiperplanos e hiper-esferas. Mais precisamente, temos o seguinte:

Lema 2.4.4. Em \mathbb{R}^n , qualquer inversão de centro O tem as seguintes propriedades:

- (i) Hiperplanos que não passam por O são enviados em hiper-esferas que passam por O , e vice-versa^a;
- (ii) Hiperplanos que passam por O são enviados em si mesmos;
- (iii) Hiper-esferas que não passam por O são enviadas em hiper-esferas que não passam por O .

^aComo a inversão não está definida para O , se quisermos ser totalmente rigorosos devemos dizer que hiperplanos que não passam por O são enviados no complementar de $\{O\}$ em hiper-esferas que passam por O , e vice-versa. Mas vamos ignorar sensatamente estes preciosismos de linguagem.

Demonstração. Começamos por estudar a imagem por inversão de uma hiper-esfera. Sem perda de generalidade, suponhamos que o centro de inversão O é a origem de \mathbb{R}^n . Utilizando a notação \cdot para o produto escalar usual em \mathbb{R}^n , a hiper-esfera \mathcal{S} em \mathbb{R}^n de centro A e raio d é o conjunto dos pontos X em \mathbb{R}^n para os quais se tem

$$(X - A) \cdot (X - A) = d^2, \text{ ou ainda } \|X\|^2 - 2A \cdot X + C = 0$$

onde $C = \|A\|^2 - d^2$.

A imagem do ponto X pela inversão de centro na origem e raio r é o ponto

$$X' = \frac{r^2}{\|X\|^2} X.$$

Multiplicando a igualdade $\|X\|^2 - 2A \cdot X + C = 0$ por $\frac{r^2}{\|X\|^2}$, obtém-se

$$r^2 - 2A \cdot X' + \frac{Cr^2}{\|X\|^2} = 0.$$

Como $\|X\| = \frac{r^2}{\|X'\|}$ por definição de inversão, podemos utilizar esta relação na última parcela e obtemos que o ponto X' satisfaz a equação

$$r^2 - 2A \cdot X' + \frac{C}{r^2} \|X'\|^2 = 0.$$

Agora temos dois casos:

- Se $C \neq 0$, esta equação define uma hiper-esfera \mathcal{S}' , tal que $X \in \mathcal{S}$ se e só se $X' \in \mathcal{S}'$. Mas $c \neq 0$ significa precisamente que \mathcal{S} não passa pela origem (que é o centro de inversão) e portanto conclui-se que a imagem de uma hiper-esfera que não passa pelo centro de inversão é uma hiper-esfera que não passa pelo centro de inversão.
- Se $C = 0$ (isto é, se \mathcal{S} passa pelo centro de inversão), esta equação define um hiperplano Π ortogonal ao vector \overrightarrow{OA} , e conclui-se que a imagem de uma hiper-esfera que passa pelo centro de inversão é um hiperplano ortogonal à recta que une o centro de inversão ao centro da esfera invertida.

Vamos agora estudar a imagem por inversão de um hiperplano. A equação de um hiperplano Π em \mathbb{R}^n pode ser escrita na forma

$$A \cdot X + c = 0$$

onde $A \neq \underbrace{(0, \dots, 0)}_n$. Supondo novamente que estamos a inverter com centro na origem e raio r , de modo que o inverso de X é $X' = \frac{r^2}{\|X\|^2} X$, obtemos multiplicando a equação anterior por $\frac{r^2}{\|X\|^2}$

$$A \cdot X' + \frac{cr^2}{\|X\|^2} = 0$$

o que, usando que $\|X\| = \frac{r^2}{\|X'\|}$, equivale a

$$A \cdot X' + \frac{c}{r^2} \|X'\|^2 = 0.$$

Novamente, temos dois casos:

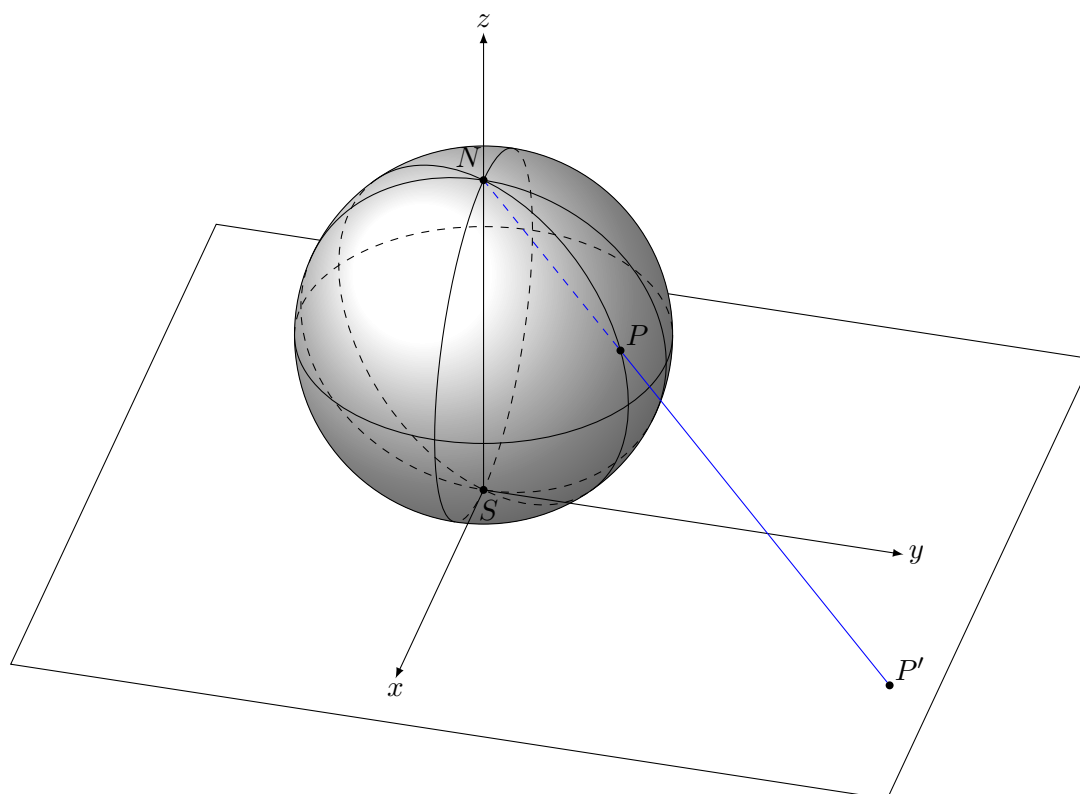
- Se $c \neq 0$, que acontece precisamente quando Π não passa pela origem, que é o centro de inversão, esta equação define uma hiper-esfera \mathcal{S} que passa pela origem, tal que um ponto está em Π se e só se o seu inverso está em \mathcal{S} .
- Se $c = 0$ (isto é, se Π passa pelo centro de inversão), esta equação é novamente a equação de Π , e conclui-se que Π é enviado em si próprio pela inversão.

Isto conclui a prova. □

Projectão estereográfica

Vamos agora estudar uma situação em que o conceito de inversão aparece de maneira mais ou menos natural, e onde a teoria que já desenvolvemos sobre ele vai ter a sua utilidade.

Definição 2.4.5. Seja \mathcal{E} uma superfície esférica em \mathbb{R}^3 e seja Π um plano tangente a \mathcal{E} num ponto S . Seja N o ponto diametralmente oposto a S . A *projectão estereográfica de \mathcal{E} sobre Π* é a aplicação que a cada ponto $P \in \mathcal{E} \setminus \{N\}$ faz corresponder o ponto P' de intersecção de NP com Π .



O que é que isto tem a ver com inversão? A resposta está na seguinte proposição:

Proposição 2.4.6. Na notação da definição anterior, a *projectão estereográfica de \mathcal{E} sobre Π* é a restrição a \mathcal{E} da *inversão na superfície esférica de centro N e raio $|NS|$* .

Demonstração. Seja O o centro de \mathcal{E} , e seja i a inversão na superfície esférica de centro N e raio $|NS|$. Na prova do Lema 2.4.4 vimos que uma superfície esférica que passa pelo centro de inversão é enviada pela inversão num plano ortogonal à recta que une o centro de inversão ao centro da superfície esférica. Portanto i envia \mathcal{E} num plano ortogonal à recta NO . Como i fixa S , conclui-se que esse plano é o plano ortogonal a NO que passa por S , ou seja, é Π .

Dado um ponto $P \in \mathcal{E}$, temos $i(P) \in \Pi$ e ainda $i(P) \in NP$ por definição de inversão. Logo $i(P)$ é a intersecção de NP com Π , que por definição é a imagem de P pela projectão estereográfica de \mathcal{E} sobre Π , concluindo a prova. \square

Com isto, podemos utilizar o que já sabemos sobre inversão para deduzir algumas propriedades interessantes da projectão estereográfica. É o caso do seguinte corolário.

Corolário 2.4.7. A *imagem pela projectão estereográfica de uma circunferência γ em \mathcal{E} é uma recta ou uma circunferência, dependendo de se γ passa ou não por N , respectivamente.*

Demonstração. Uma tal circunferência γ é a intersecção de \mathcal{E} com um plano $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$. A imagem de γ pela inversão de centro N e raio $|NS|$ é, portanto, a intersecção de Π (que é a imagem de \mathcal{E}) com a imagem de Σ . Mas, pelo Lema 2.4.4, a imagem de Σ é um plano se Σ passar por N (que equivale a $\gamma = \mathcal{E} \cap \Sigma$ passar por N) e é uma superfície esférica caso contrário. Logo, se γ passar por N , a sua imagem pela inversão de centro N e raio $|NS|$, e portanto pela projecção estereográfica, é a intersecção de Π com outro plano (ou seja, uma recta) e, se γ não passar por N , é a intersecção de Π com uma superfície esférica (ou seja, uma circunferência). \square

Observação 2.4.8. É possível dar uma “fórmula explícita” para a projecção estereográfica. Suponha-se que \mathcal{E} é a superfície esférica definida por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

e que N e S são os pontos de coordenadas $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$, respectivamente. Então a imagem do ponto de coordenadas (x, y, z) pela projecção estereográfica associada é o ponto de coordenadas

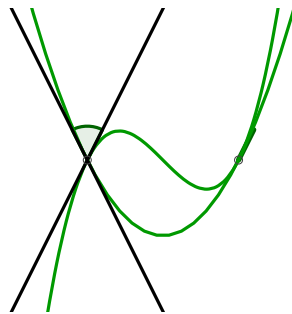
$$\left(\frac{2x}{1-z}, \frac{2y}{1-z}, -1 \right).$$

Inversão e ângulos

A próxima ideia a reter é a seguinte:

Inversão preserva ângulos.

Não é óbvio o que é que isto significa, uma vez que estamos habituados a pensar em ângulos entre rectas e inversão está longe de preservar rectas. De facto, para dar sentido à afirmação anterior, é necessário generalizar a noção de ângulo; precisamos de decidir o que entendemos por ângulo entre duas curvas que se intersectam, não necessariamente rectas. A ideia é muito simples: tomamos as rectas que melhor aproximam as curvas no ponto de intersecção, que são as rectas tangentes às curvas nesse ponto, e definimos o ângulo entre as duas curvas nesse ponto como o ângulo entre essas rectas tangentes.

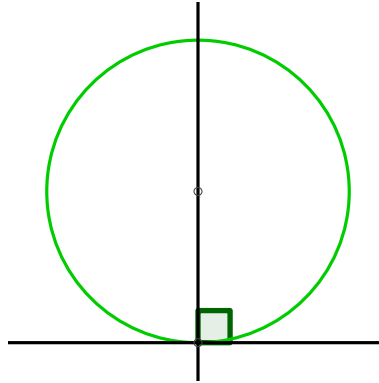


Definição 2.4.9. Sejam γ e η duas curvas parametrizadas diferenciáveis injectivas em \mathbb{R}^n , e seja P um ponto comum aos traços de γ e η . O *ângulo entre γ e η em P* é o ângulo formado pelos vectores unitários tangentes a γ e η em P .

Observação 2.4.10. A condição de γ e η serem curvas diferenciáveis é imposta para que os vectores unitários tangentes estejam bem definidos. A condição de γ e η serem injectivas garante que, dado um ponto P no traço das duas curvas, existe exactamente um $s \in \mathbb{R}$ e exactamente um $t \in \mathbb{R}$ para os quais $\gamma(s) = \eta(t) = P$, e podemos assim definir o ângulo entre γ e η em P como o ângulo entre os vectores $\frac{\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|}$ e $\frac{\eta'(t)}{\|\eta'(t)\|}$ (que é simplesmente o ângulo entre $\gamma'(s)$ e $\eta'(t)$). Se, por exemplo, γ não fosse injectiva, poderia haver mais do que uma escolha possível para s , e o vector tangente unitário a γ em P não seria único.

Exemplo 2.4.11. O ângulo entre duas circunferências num ponto de intersecção é recto precisamente quando as duas circunferências são ortogonais.

Exemplo 2.4.12. Vejamos quando é que o ângulo entre uma recta r e uma circunferência \mathcal{C} num ponto de intersecção P é recto. A recta tangente a r em P é a própria recta r . Portanto isso acontece se e só se r é perpendicular à tangente a \mathcal{C} em P . Tal é equivalente a que r passe pelo centro de \mathcal{C} .



Estamos agora prontos para enunciar (e provar) a propriedade mais importante da inversão no que respeita a ângulos.

Proposição 2.4.13. *Sejam γ e η curvas diferenciáveis injectivas em \mathbb{R}^n cujos traços contêm um ponto comum P . Sejam γ^* , η^* e P^* as imagens de γ , η e P , respectivamente, por uma inversão de centro O . Então o ângulo entre γ e η em P é igual ao ângulo entre γ^* e η^* em P^* .*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos que O é a origem de \mathbb{R}^n , e seja r o raio da inversão. Para cada t no domínio de γ , podemos escrever

$$\gamma(s) = \rho(s)v(s)$$

onde $\rho(s)$ é um número real positivo e $v(s)$ tem norma 1. Observe-se que, como a norma de v é constante, tem-se $\frac{d}{ds}v(s) \cdot v(s) = 0$ (onde \cdot é o produto escalar usual) e portanto, utilizando a regra de derivação do produto, vem que

$$2v(s) \cdot v'(s) = 0, \text{ ou seja, } v(s) \cdot v'(s) = 0.$$

Conclui-se que para qualquer s no domínio de γ os vectores $v(s)$ e $v'(s)$ são ortogonais.

Temos ainda

$$\gamma'(s) = \rho'(s)v(s) + \rho(s)v'(s)$$

e também, como $\gamma^*(s) = \frac{r^2}{\rho(s)}v(s)$,

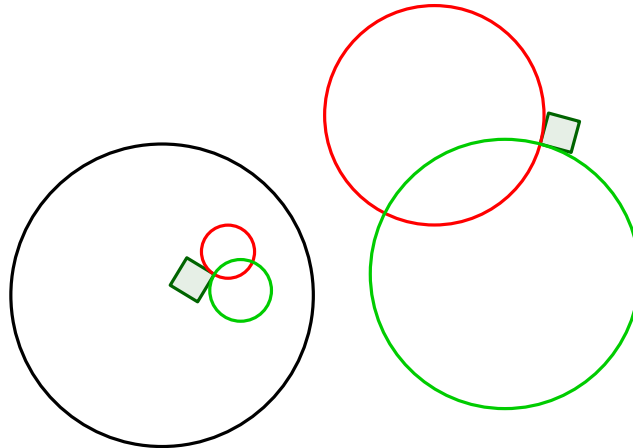
$$(\gamma^*)'(s) = \frac{r^2}{\rho(s)^2}(-\rho'(s)v(s) + \rho(s)v'(s)).$$

Seja agora s tal que $\gamma(s) = P$ e $\gamma^*(s) = P^*$. Observe-se que, sendo V o subespaço vectorial de \mathbb{R}^n gerado pelo vector $v(s)$ (ou pelo vector \overrightarrow{OP}), tem-se a decomposição em soma directa

$$\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$$

e, dado um vector v de \mathbb{R}^n na forma $u + w$, com $u \in V$ e $w \in V^\perp$, o seu simétrico em relação a V^\perp (o hiperplano que passa pela origem e é perpendicular a OP) é o vector $-u + w$. Tendo em conta as expressões calculadas para $\gamma'(s)$ e $(\gamma^*)'(s)$ (e o facto de que $v'(s) \in V^\perp$), conclui-se que $(\gamma^*)'(s)$ é obtido reflectindo $\gamma'(s)$ no hiperplano perpendicular a OP que passa pela origem e multiplicando o resultado por $\frac{r^2}{|OP|^2}$. Analogamente, sendo t tal que $\eta(t) = P$, temos que $(\eta^*)'(t)$ é obtido da mesma forma a partir de $\eta'(t)$. Como a operação de reflectir num hiperplano e multiplicar por um escalar preserva ângulos, conclui-se que o ângulo entre $\gamma'(s)$ e $\eta'(t)$ é igual ao ângulo entre $(\gamma^*)'(s)$ e $(\eta^*)'(t)$, que equivale ao pretendido. \square

Corolário 2.4.14. *As imagens por inversão de duas circunferências ortogonais em \mathbb{R}^2 que não passam pelo centro de inversão são duas circunferências ortogonais.*



Demonstração. Pelo Lema 2.4.4, a condição de as circunferências não passarem pelo centro de inversão garante que são enviadas em circunferências. O resultado então segue da conservação dos ângulos por inversão (tendo em conta o observado no Exemplo 2.4.11). \square

Observação 2.4.15. Vamos esboçar brevemente uma relação curiosa entre feixes de circunferências e inversão no plano. Recorde-se que na secção 2.4.3 vimos que qualquer feixe pode ser descrito como o conjunto das circunferências ortogonais a duas circunferências dadas. Desta forma, a imagem por inversão de um tal feixe é, em geral, o conjunto das circunferências ortogonais às duas circunferências inversas, e portanto é também um feixe de circunferências.

Note-se o “em geral”: pode acontecer que alguma das circunferências envolvidas seja enviada numa recta. Para corrigir este defeito, temos de admitir rectas nos feixes, do seguinte modo:

- A cada feixe de circunferências não concêntricas acrescenta-se uma recta: o eixo radical comum de todas as circunferências do feixe.

- Passam-se a considerar também feixes de rectas: o conjunto de todas as rectas que passam por um mesmo ponto (**feixe de rectas concorrentes**) e o conjunto de todas as rectas paralelas a uma recta dada (**feixe de rectas paralelas**).

Com esta “correção”, passa a ser sempre verdade que a imagem por inversão de um feixe é também um feixe.

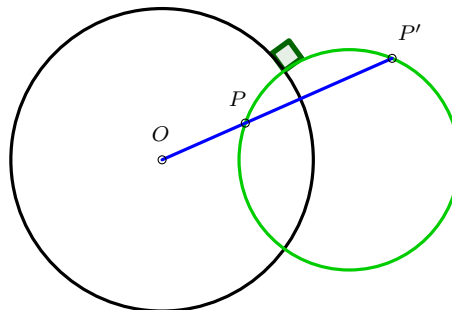
Inversão e circunferências ortogonais

Seja \mathcal{C} uma circunferência em \mathbb{R}^2 de centro O e raio r . Como sabemos, a imagem de uma circunferência $\mathcal{D} \neq \mathcal{C}$ por inversão em \mathcal{C} é também uma circunferência, desde que \mathcal{D} não passe por O . Uma questão natural a colocar é a seguinte: para que circunferências \mathcal{D} é que a imagem de \mathcal{D} por inversão em \mathcal{C} é a própria \mathcal{D} ? A resposta é simples e elegante: são as circunferências ortogonais a \mathcal{C} .

Proposição 2.4.16. *Sejam \mathcal{D} e \mathcal{C} circunferências distintas no plano Euclidiano, e sejam O e r o centro e o raio de \mathcal{C} , respectivamente. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) \mathcal{D} contém um par de pontos distintos, inversos um do outro em relação a \mathcal{C} ;
- (ii) $\text{Pot}(O, \mathcal{D}) = r^2$;
- (iii) \mathcal{D} é invariante por inversão em \mathcal{C} ;
- (iv) $\mathcal{C} \perp \mathcal{D}$.

Demonstração. Primeiro notemos que já sabemos (ii) \Leftrightarrow (iv) pelo Lema 2.2.5. Basta assim provar que (i), (ii) e (iii) são equivalentes entre si. Vamos provar (i) \Rightarrow (ii), (ii) \Rightarrow (iii) e (iii) \Rightarrow (i).



- (i) \Rightarrow (ii): Sejam P e P' pontos em \mathcal{D} , inversos em relação a \mathcal{C} . Então O , P e P' são colineares, logo, pelo Teorema das Cordas (Teorema 2.2.2), temos

$$\text{Pot}(O, \mathcal{D}) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'}.$$

Mas como P e P' são inversos em relação a \mathcal{C} temos $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = r^2$, e obtivemos (ii).

- (ii) \Rightarrow (iii): Suponha-se que $\text{Pot}(O, \mathcal{D}) = r^2$. Seja P um ponto arbitrário em \mathcal{D} , e seja P' a segunda intersecção de OP com \mathcal{D} (se OP for tangente a \mathcal{D} , tomamos $P' = P$). Então, pelo Teorema das Cordas,

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \text{Pot}(O, \mathcal{D}) = r^2.$$

Logo o inverso de P em relação a \mathcal{C} é P' , que está em \mathcal{D} . Conclui-se que o inverso em relação a \mathcal{C} de qualquer ponto de \mathcal{D} está em \mathcal{D} , que é o mesmo que dizer que a inversão em \mathcal{C} deixa \mathcal{D} invariante.

- (iii) \Rightarrow (i) é trivial.

□

Observação 2.4.17 (Inversão sem distâncias). Podemos utilizar a Proposição 2.4.16 para dar uma caracterização do inverso de um ponto em relação a uma circunferência sem usar distâncias. De facto, é imediato a partir da Proposição 2.4.16 o seguinte:

Dado um ponto P e uma circunferência \mathcal{C} , o inverso de P em relação a \mathcal{C} é o único ponto P' com a propriedade de que qualquer circunferência que passe por P e P' é ortogonal a \mathcal{C} .

Isto legitima a analogia entre inversão numa circunferência e reflexão numa recta a que aludimos no início desta secção: de facto, a reflexão numa recta tem essencialmente a mesma propriedade.

Dado um ponto P e uma recta r , o simétrico de P em relação a r é o único ponto P' com a propriedade de que qualquer circunferência que passe por P e P' é ortogonal a r .

Aqui (ver exemplo 2.4.12) dizemos que uma recta é ortogonal a uma circunferência se contém o seu centro.

Aplicações da Inversão

Nesta parte final vamos tentar responder à inevitável pergunta “Mas para que é que isto serve?”. Vamos ver dois exemplos: a Desigualdade de Ptolomeu e o Teorema de Steiner. O primeiro mostra como podemos utilizar inversão para transformar resultados “triviais” em resultados duais muito menos imediatos. A segunda lembra o uso que fizemos das transformações afins no Lema 1.6.6: utilizamos inversão para reduzir a nossa configuração geral a um caso concreto em que o que pretendemos provar é trivial por simetria.

Mas precisamos de um preparativo:

Lema 2.4.18 (Fórmula da distância). *Seja \mathcal{C} uma circunferência em \mathbb{R}^2 de centro O e raio r . Sejam X e Y pontos em \mathbb{R}^2 , e sejam X' e Y' os seus inversos em relação a \mathcal{C} . Então tem-se*

$$|X'Y'| = \frac{r^2}{|OX| \cdot |OY|} |XY|.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha-se que O é a origem. Então $X' = \frac{r^2}{\|X\|^2} X$

e $Y' = \frac{r^2}{\|Y\|^2}Y$. Logo,

$$\begin{aligned} |X'Y'|^2 &= \left(\frac{r^2}{\|X\|^2}X - \frac{r^2}{\|Y\|^2}Y \right) \cdot \left(\frac{r^2}{\|X\|^2}X - \frac{r^2}{\|Y\|^2}Y \right) \\ &= \frac{r^4}{\|X\|^4}\|X\|^2 - 2\frac{r^4}{\|X\|^2\|Y\|^2}X \cdot Y + \frac{r^4}{\|Y\|^4}\|Y\|^2 \\ &= \frac{r^4}{\|X\|^2\|Y\|^2}(\|X\|^2 - 2X \cdot Y + \|Y\|^2) \\ &= \frac{r^4}{\|X\|^2\|Y\|^2}(X - Y) \cdot (X - Y) \\ &= \frac{r^4}{|OX|^2|OY|^2}|XY|^2. \end{aligned}$$

O resultado segue. □

Com isto, estamos prontos para passar à Desigualdade de Ptolomeu.

Teorema 2.4.19 (Desigualdade de Ptolomeu). *Sejam A, B, C e D pontos em \mathbb{R}^2 . Então*

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| \geq |AC| \cdot |BD|.$$

Além disso, se houver igualdade então A, B, C e D estão sobre uma circunferência.

Demonstração. O resumo da prova é:

A Desigualdade de Ptolomeu é a Desigualdade Triangular invertida.

Considere-se uma circunferência qualquer de centro A e raio r , e sejam B', C' e D' os inversos de B, C e D em relação a essa circunferência. Pela Desigualdade Triangular temos

$$|B'C'| + |C'D'| \geq |B'D'|.$$

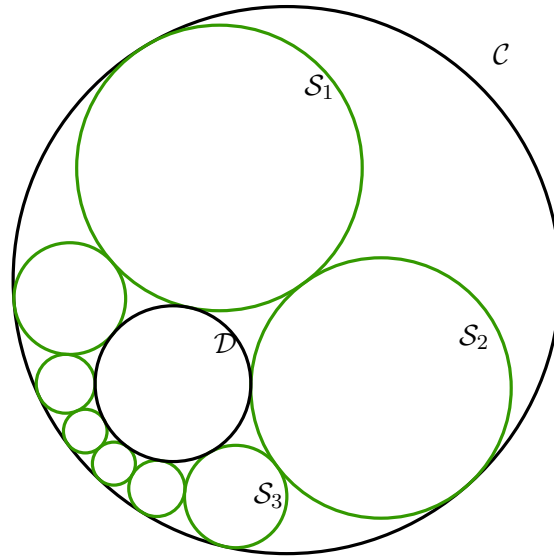
Agora é só reescrever estas distâncias utilizando o Lema 2.4.18: obtemos

$$\frac{r^2}{|AB| \cdot |AC|}|BC| + \frac{r^2}{|AC| \cdot |AD|}|CD| \geq \frac{r^2}{|AB| \cdot |AD|}|BD|.$$

Cancelando r^2 e limpando denominadores, obtemos a Desigualdade pretendida. Além disso, vemos que se houver igualdade deve ter-se $|B'C'| + |C'D'| = |B'D'|$, e portanto B', C' e D' estão sobre uma recta r . Logo, B, C e D estão na imagem de r por uma inversão de centro A , que é uma circunferência que passa por A , e portanto A, B, C e D estão sobre uma mesma circunferência. □

Passemos à próxima aplicação, o Teorema de Steiner. Suponhamos que temos duas circunferências disjuntas \mathcal{C} e \mathcal{D} no plano Euclidiano, e realizamos o seguinte procedimento: começamos por desenhar uma circunferência \mathcal{S}_1 simultaneamente tangente a \mathcal{C} e a \mathcal{D} . Depois desenhamos uma circunferência \mathcal{S}_2 tangente a \mathcal{C} , \mathcal{D} e \mathcal{S}_1 ; uma circunferência \mathcal{S}_3 tangente a \mathcal{C} , \mathcal{D} e \mathcal{S}_2 ; e assim

sucessivamente, enquanto nenhuma das circunferências novas for secante a alguma das circunferências \mathcal{S}_k previamente desenhadas. Paramos quando já não “cabem” mais circunferências.

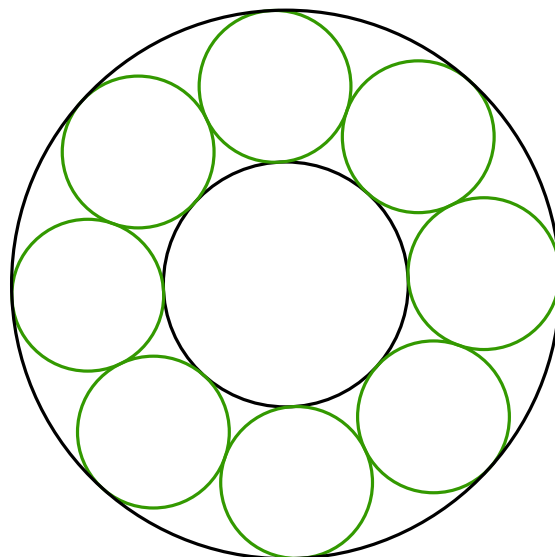


Quando acabamos o desenho, podemos ter duas situações. É possível que a última circunferência seja tangente à primeira, como acontece na figura em cima, em que as circunferências “encaixam” bem. Mas também pode “sobrar” algum espaço vazio entre a última circunferência e a primeira, em que já não “cabe” mais nenhuma circunferência.

Se, para uma escolha da circunferência \mathcal{S}_1 , obtivermos uma figura como acima, em que a última circunferência é tangente à primeira, dizemos que \mathcal{S}_1 é *encaixante*. Poder-se-ia esperar que, fixadas as circunferências \mathcal{C} e \mathcal{D} , uma circunferência ser ou não encaixante dependesse da escolha da circunferência. Mas não! É precisamente isso que afirma o Teorema de Steiner.

Teorema 2.4.20 (Teorema de Steiner). *Se uma circunferência tangente a \mathcal{C} e \mathcal{D} é encaixante, então qualquer circunferência tangente a \mathcal{C} e \mathcal{D} é encaixante.*

Demonstração. A ideia da prova é muito simples: repare-se que no caso em que \mathcal{C} e \mathcal{D} são concêntricas o resultado é trivial por simetria, claramente “não interessa” onde desenhamos a primeira circunferência.



Portanto, como inversão preserva tangências de circunferências (porquê?), basta-nos arranjar uma inversão que envie \mathcal{C} e \mathcal{D} em circunferências concêntricas! Se provarmos que existe uma inversão com essa propriedade, este resultado inesperado fica assim provado.

Como provar que existe uma inversão que envia \mathcal{C} e \mathcal{D} em circunferências concêntricas? Mais uma vez, a teoria que já desenvolvemos até agora vai fornecer-nos uma prova simples e elegante. Se \mathcal{C} e \mathcal{D} já são concêntricas não há nada a provar. Caso contrário, considere-se o feixe de circunferências $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Como \mathcal{C} e \mathcal{D} são disjuntas e não concêntricas, este feixe é o feixe de pontos limite A e B para alguns pontos A e B .

Considere-se qualquer inversão de centro A . Afirmamos que essa inversão envia \mathcal{C} e \mathcal{D} em circunferências concêntricas. Para justificar isso, recorde-se que, pela Proposição 2.3.7, o feixe ortogonal a $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ é o feixe de pontos fixos A e B . Esse feixe é enviado pela inversão de centro A no conjunto das rectas que passam pelo inverso B' de B . Mas então \mathcal{C} e \mathcal{D} são enviadas em circunferências \mathcal{C}' e \mathcal{D}' ortogonais a todas essas rectas, o que significa (Exemplo 2.4.12) que todas essas rectas passam pelo centro de \mathcal{C}' e pelo centro de \mathcal{D}' . Mas o único ponto comum dessas rectas é B' , logo tanto \mathcal{C}' como \mathcal{D}' têm centro B' ! E com isto provámos que existe uma inversão que envia \mathcal{C} e \mathcal{D} em circunferências concêntricas, e o Teorema de Steiner está provado. \square

§2.5 Exercícios e Problemas

2.1. Sejam \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 circunferências com centros distintos O_1 e O_2 no plano Euclidiano, e seja H o ponto de intersecção do eixo radical de \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 com O_1O_2 . Mostre que, para qualquer ponto X no plano,

$$\text{Pot}(X, \mathcal{C}_2) - \text{Pot}(X, \mathcal{C}_1) = 2\overrightarrow{O_2O_1} \cdot \overrightarrow{HX}$$

onde \cdot designa o produto escalar usual. Conclua que a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(X) = \text{Pot}(X, \mathcal{C}_2) - \text{Pot}(X, \mathcal{C}_1)$ é uma aplicação afim.

2.2. Seja ABC um triângulo com circuncentro O e incentro I , e sejam R e r os raios da circunferência circunscrita a ABC e da circunferência inscrita em ABC , respectivamente. A recta AI intersecta a circunferência circunscrita num ponto $D \neq A$.

- Mostre que a circunferência de centro D e raio $|DI|$ passa por B e C .
- Mostre que $|OI|^2 = R^2 - 2Rr$. (*Sugestão:* Aplique o exercício 2.1 à circunferência circunscrita e à circunferência de centro D e raio $|DI|$.)

2.3. Sejam A e B dois pontos distintos no plano Euclidiano. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$, seja \mathcal{C}_λ o conjunto dos pontos P do plano tais que $\frac{|PA|}{|PB|} = \lambda$.

- Mostre que \mathcal{C}_λ é uma circunferência com centro na recta AB .
- Sejam P e Q as intersecções de \mathcal{C}_λ com a recta AB . Mostre que P e Q são inversos um do outro em relação à circunferência \mathcal{C} de diâmetro AB .
- Mostre que \mathcal{C}_λ é ortogonal a \mathcal{C} .
- Mostre que a família de circunferências $\{\mathcal{C}_\lambda : \lambda > 0, \lambda \neq 1\}$ é o feixe de pontos limite A e B .

2.4. Seja \mathcal{C} uma circunferência no plano Euclidiano e seja P um ponto em \mathcal{C} . Sejam A e B dois pontos diametralmente opostos em \mathcal{C} e diferentes de P , e sejam X e X' as intersecções de PA e PB com o diâmetro de \mathcal{C} perpendicular a AB (ou com o seu prolongamento). Mostre que X e X' são inversos em relação a \mathcal{C} .

2.5. Mostre que o inverso em relação a \mathcal{C} de uma circunferência \mathcal{D} passando pelo centro de \mathcal{C} é o eixo radical de \mathcal{C} e \mathcal{D} .

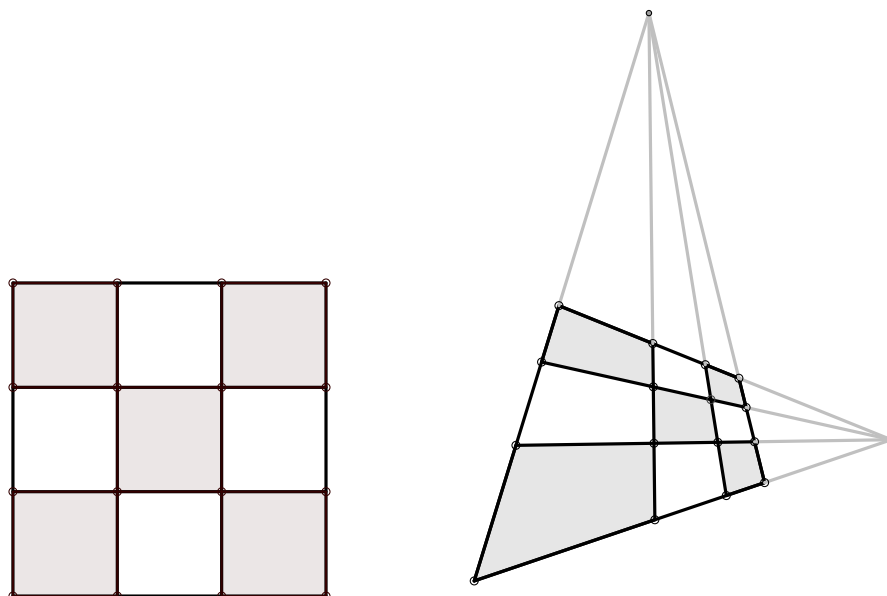
2.6. Sejam $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ e \mathcal{C}_4 quatro circunferências no plano. Suponha-se que \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 se intersectam em A e A' , \mathcal{C}_2 e \mathcal{C}_3 se intersectam em B e B' , \mathcal{C}_3 e \mathcal{C}_4 se intersectam em C e C' e \mathcal{C}_4 e \mathcal{C}_1 se intersectam em D e D' . Mostre que A, C, A' e C' estão sobre uma mesma recta ou circunferência se e só se B, D, B' e D' estão sobre uma mesma recta ou circunferência.

2.7. Sejam A_1, A_2, A_3 e A_4 pontos no plano que não estão todos numa circunferência. Sejam O_1, O_2, O_3 e O_4 os circuncentros dos triângulos $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4$ e $A_1A_2A_3$, e sejam r_1, r_2, r_3 e r_4 os raios das circunferências circunscritas a esses triângulos. Mostre que

$$\frac{1}{|O_1A_1|^2 - r_1^2} + \frac{1}{|O_2A_2|^2 - r_2^2} + \frac{1}{|O_3A_3|^2 - r_3^2} + \frac{1}{|O_4A_4|^2 - r_4^2} = 0.$$

3 Geometria Projectiva

Num plano afim, dadas duas rectas distintas, temos uma de duas situações: ou as duas rectas são concorrentes num (único) ponto; ou as duas rectas são paralelas e não se intersectam. A Geometria Projectiva é uma modificação da Geometria Afim que transforma o segundo caso num caso particular do primeiro, acrescentando aos espaços afins alguns pontos, os chamados *pontos do infinito*, em que rectas paralelas se intersectam. A Geometria Projectiva trata do mesmo modo ambas as figuras seguintes:



Os pontos do infinito que vamos precisar de acrescentar são poucos: o plano projectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, que estende o nosso já bem conhecido plano afim $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, é obtido juntando-lhe uma única recta, a *recta do infinito*, onde se intersectam as rectas que eram paralelas em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Portanto, num certo sentido, nós já conhecemos quase todo o plano projectivo, e, num primeiro momento, a ideia da Geometria Projectiva pode parecer apenas uma questão de “economia de linguagem”: gastamos menos tinta ao escrever “estas rectas são concorrentes” do que ao escrever “estas rectas são paralelas ou concorrentes”, pelo que os enunciados dos resultados ficam mais compactos e elegantes, mas podemos pensar que a Geometria Projectiva não nos oferece realmente nenhuma ferramenta nova. Isto, porém, não é verdade: o facto de passarmos a poder tratar pontos do infinito como pontos “normais”, iguais a todos os outros, vai-nos permitir acrescentar à já conhecida classe das transformações afins uma variedade de transformações novas que enviam pontos clássicos em pontos do infinito e vice-versa, e essas transformações vão-nos permitir obter de maneira simples resultados geométricos elementares, do tipo que Euclides já teria sido capaz de entender e apreciar. No caso das figuras acima, vamos ter uma *transformação projectiva* que envia a figura da esquerda na figura da direita, embora não tenhamos nenhuma transformação afim com essa propriedade.

Claro que tudo vem a um preço. Dados pontos A e B num plano afim, sabemos que as transformações afins preservam as razões $\frac{AC}{CB}$ para pontos C na recta AB . As transformações projectivas não as preservam em geral, mas preservam algo próximo: as razões entre duas dessas razões, do tipo $(\frac{AC}{CB})/(\frac{AD}{DB})$, as chamadas *razões duplas* ou *razões cruzadas*. As propriedades das razões duplas são também um presente apreciado que a Geometria Projectiva dá à Geometria mais clássica.

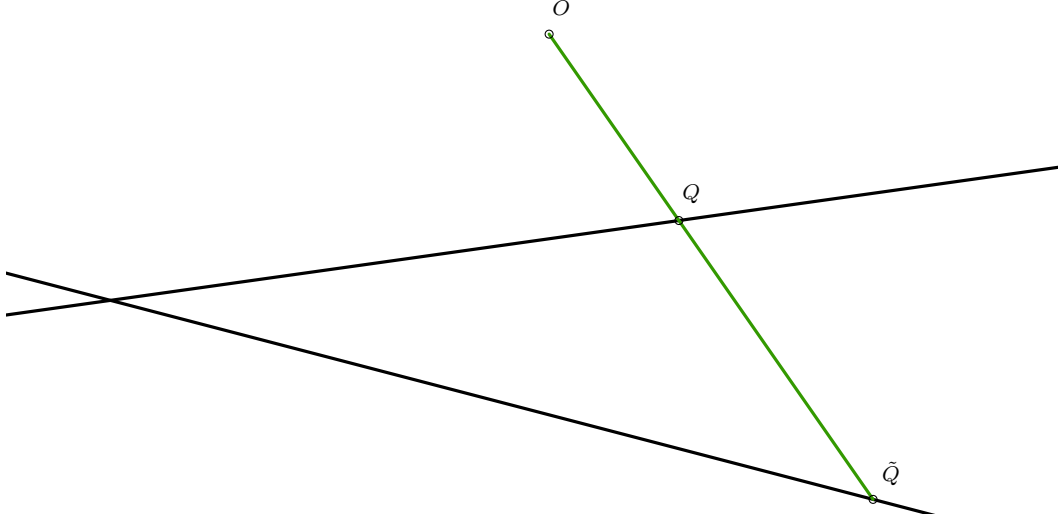
Na próxima secção vamos estudar o caso unidimensional, as chamadas *rectas projectivas*, que são obtidas a partir das rectas afins acrescentando um único ponto no infinito. Claro que não há muita Geometria que se possa fazer numa recta, e de facto os resultados mais interessantes aparecem nas secções posteriores, mas os conceitos e resultados desta secção vão ter a sua utilidade quando começarmos a trabalhar no plano projectivo.

§3.1 Rectas projectivas e Transformações de Möbius

Para dar alguma motivação inicial, vamos estudar uma questão natural: suponhamos que temos duas rectas r e \tilde{r} em \mathbb{R}^2 , parametrizadas por

$$r(t) = (t, \alpha t + \beta) \text{ e } \tilde{r}(t) = (t, \tilde{\alpha} t + \tilde{\beta}).$$

Suponhamos que projectamos r sobre \tilde{r} , isto é, consideramos um ponto O exterior a ambas as rectas e a aplicação que a um ponto $Q \in r$ associa o ponto de intersecção \tilde{Q} de intersecção de OQ com \tilde{r} .



Dado um ponto $(t, \alpha t + \beta)$, a sua imagem é o ponto $(t', \tilde{\alpha} t' + \tilde{\beta})$ para um certo t' , e queremos saber como é que t' se exprime como função de t .

Suponha-se que O tem coordenadas (p, q) . Dado $t \in \mathbb{R}$, estamos à procura do $t' \in \mathbb{R}$ para o qual os pontos O , $Q = (t, \alpha t + \beta)$ e $\tilde{Q} = (t', \tilde{\alpha} t' + \tilde{\beta})$ são colineares, ou seja, tal que os vectores

$$\overrightarrow{OQ} = (t - p, \alpha t + \beta - q) \text{ e } \overrightarrow{O\tilde{Q}} = (t' - p, \tilde{\alpha} t' + \tilde{\beta} - q)$$

são múltiplos um do outro. Isso equivale a ter-se

$$\det \begin{pmatrix} t - p & t' - p \\ \alpha t + \beta - q & \tilde{\alpha} t' + \tilde{\beta} - q \end{pmatrix} = 0.$$

Expandindo o determinante anterior, chegamos à relação

$$(\tilde{\alpha} - \alpha)tt' + (\tilde{\beta} - q + \alpha p)t + (-\beta + q - \tilde{\alpha}p)t' + p(\beta - \tilde{\beta}) = 0$$

que, resolvida em ordem a t' , dá

$$t' = \frac{(\alpha p + \tilde{\beta} - q)t + p(\beta - \tilde{\beta})}{(\alpha - \tilde{\alpha})t + (\tilde{\alpha}p + \beta - q)}.$$

Conclui-se que a relação procurada entre t' e t é da forma

$$t' = \frac{at + b}{ct + d}$$

onde neste caso temos $a = \alpha p + \tilde{\beta} - q$, $b = p(\beta - \tilde{\beta})$, $c = \alpha - \tilde{\alpha}$ e $d = \tilde{\alpha}p + \beta - q$. Observe-se que, para estes valores de a , b , c e d , temos

$$ad - bc = (\alpha p + \beta - q)(\tilde{\alpha}p + \tilde{\beta} - q) \neq 0$$

uma vez que $\alpha p + \beta - q$ e $\tilde{\alpha} p + \tilde{\beta} - q$ são diferentes de 0, já que o ponto O de coordenadas (p, q) não pertence à recta r nem à recta \tilde{r} . Isto motiva a seguinte definição:

Definição 3.1.1 (Transformações de Möbius). Uma *transformação de Möbius* é uma aplicação da forma

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$$

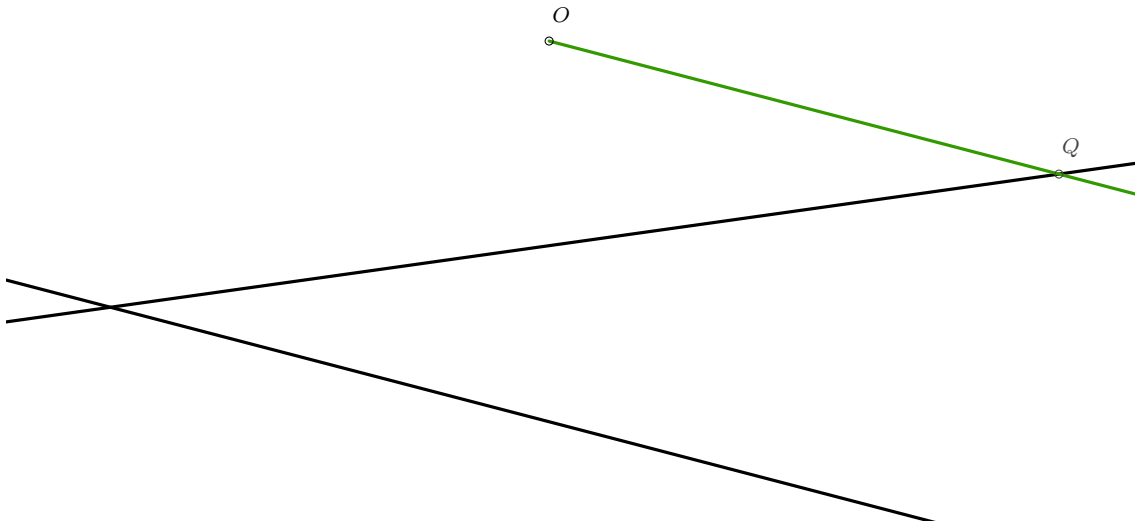
onde a, b, c e d são tais que $ad - bc \neq 0$. Sendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, designamos a transformação de Möbius anterior por f_A .

Note-se que deixámos propositadamente por especificar o domínio e o conjunto de chegada das transformações de Möbius: para já podemos pensar neles como sendo \mathbb{R} , mas vamos ver mais adiante que existe uma escolha mais indicada.

Observação 3.1.2. A Definição anterior fornece uma correspondência $A \mapsto f_A$ que associa a cada matriz invertível 2×2 A uma transformação de Möbius f_A . No entanto, essa correspondência está longe de ser injectiva: dado qualquer escalar $\lambda \neq 0$, tem-se $f_{\lambda A} = f_A$.

Exemplo 3.1.3. Qualquer transformação afim não constante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser vista como uma transformação de Möbius. De facto, sendo f definida por $x \mapsto ax + b$, com $a \neq 0$, temos $f = f_A$ onde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Acontece que uma transformação de Möbius $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ não está inteiramente bem definida em geral; se $c \neq 0$, temos problemas ao tentar avaliar f em $-\frac{d}{c}$. De facto, isto não é surpreendente: sabemos que as transformações de Möbius estão associadas a projecções entre rectas. Ora, se estamos a projectar r em \tilde{r} a partir de O , então existe, em geral, um ponto de r cuja imagem por esta projecção não está bem definida: o ponto $Q \in r$ tal que OQ é paralela a \tilde{r} .



Quando x se aproxima de $-\frac{d}{c}$, $\frac{ax+b}{cx+d}$ tende para infinito (mais uma vez, isto bate certo com a analogia com projecções entre rectas: quando Q varia em r e a recta OQ se aproxima da recta paralela a \tilde{r} que passa por O , o ponto \tilde{Q} de intersecção de OQ com \tilde{r} “vai ficando cada vez mais longe”). Assim, remediamos este defeito acrescentando a \mathbb{R} um novo ponto, denotado por ∞ , e passando a ver as transformações de Möbius como funções $\overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, onde $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Sendo

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

com $ad - bc \neq 0$, define-se então $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ caso $c \neq 0$. No entanto, agora precisamos também de decidir o valor de $f(\infty)$. Se $c \neq 0$, como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c}$$

faz sentido definir $f(\infty) = \frac{a}{c}$. Se $c = 0$, a expressão anterior tende para infinito e portanto definimos $f(\infty) = \infty$. Pode-se verificar facilmente que qualquer transformação de Möbius induz uma bijecção de $\overline{\mathbb{R}}$.

Um fenómeno curioso acontece quando tentamos compor transformações de Möbius. Sejam $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ matrizes invertíveis, e considerem-se as transformações de Möbius associadas f_A e f_B . Vejamos o que é a composta $f_A \circ f_B$. Tem-se

$$\begin{aligned} (f_A \circ f_B)(x) &= f_A(f_B(x)) \\ &= f_A\left(\frac{a'x + b'}{c'x + d'}\right) \\ &= \frac{a\frac{a'x+b'}{c'x+d'} + b}{c\frac{a'x+b'}{c'x+d'} + d} \\ &= \frac{(aa' + bc')x + (ab' + bd')}{(ca' + dc')x + (cb' + dd')}. \end{aligned}$$

Ou seja, a composta $f_A \circ f_B$ é também uma transformação de Möbius, e uma matriz que a induz é

$$\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

Mas esta matriz é precisamente a matriz AB ! Conclui-se o seguinte resultado inesperado:

Proposição 3.1.4. *Dadas duas matrizes invertíveis 2×2 A e B , tem-se $f_{AB} = f_A \circ f_B$.*

Parece uma grande coincidência, mas não é. A estrutura multiplicativa das matrizes foi inventada para bater certo com a composição de aplicações lineares; se também bate certo com a composição de transformações de Möbius, isso deve ser uma manifestação de alguma relação entre transformações de Möbius e aplicações lineares. Para iluminar essa relação, precisamos de uma maneira diferente de olhar para $\overline{\mathbb{R}}$, e é isso que faremos de seguida.

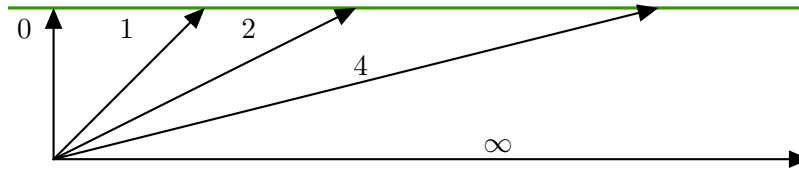
Coordenadas homogêneas

Imaginemos a recta afim $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ mergulhada em \mathbb{R}^2 , onde, para um real x , mergulhamos o ponto $x \in \mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ como o ponto de coordenadas $(x, 1)$. Tendo em conta esse mergulho, existe uma correspondência bijectiva natural entre pontos de $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ e algumas rectas de \mathbb{R}^2 que passam pela origem. De facto, dado um $x \in \mathbb{A}^1(\mathbb{R})$, podemos associar-lhe a recta que une a origem ao ponto $(x, 1)$.

Mas há uma recta que fica de fora: o eixo das abcissas, que é a única recta pela origem em \mathbb{R}^2 que não contém nenhum ponto da forma $(x, 1)$. De maneira a obter uma correspondência

com todas as rectas pela origem em \mathbb{R}^2 , podemos acrescentar um “ponto do infinito” a $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ e declarar que esse ponto corresponde ao eixo das abcissas.

Deste modo, temos uma forma de ver $\overline{\mathbb{R}}$ como o conjunto das rectas que passam pela origem em \mathbb{R}^2 .



Isto motiva a seguinte definição:

Definição 3.1.5. A *recta projectiva real* $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ é o conjunto $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) / \sim$ das classes de equivalência para a relação \sim em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definida por

$$(x, y) \sim (x', y') \text{ se e só se existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } (x', y') = \lambda(x, y).$$

(Esta condição diz que (x, y) e (x', y') estão na mesma recta que passa pela origem, logo as classes de equivalência são as rectas que passam pela origem.)

Dado um vector $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, denotamos a sua classe de equivalência módulo \sim por $[v]$, e dizemos que v é um par de coordenadas homogêneas para $[v]$.

A “maneira correcta” de pensar em $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ é como a recta afim $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ completada com um ponto no infinito, ou seja, essencialmente como $\overline{\mathbb{R}}$. De facto, qualquer ponto em $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ admite um par de coordenadas homogêneas da forma $(x, 1)$, e nesse caso imaginamo-lo como o ponto $x \in \mathbb{A}^1(\mathbb{R})$, ou é o ponto de coordenadas homogêneas $(1, 0)$, que imaginamos como ∞ . A mesma bijecção entre $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e $\overline{\mathbb{R}}$ pode ser escrita explicitamente assim:

$$[(x, y)] \mapsto \frac{x}{y} \text{ se } y \neq 0$$

$$[(x, 0)] \mapsto \infty.$$

Mas porquê tanto trabalho, qual é a vantagem de ver a recta real completada $\overline{\mathbb{R}}$ desta maneira tão rebuscada? Porque as transformações de Möbius se exprimem de maneira muito mais agradável na sua versão $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ do que na sua versão $\overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Considere-se uma matriz invertível 2×2 A , e $T_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear cuja matriz em relação à base canónica é A . Então a aplicação linear T_A “passa ao quociente”.

Proposição/Definição 3.1.6. Seja A uma matriz invertível 2×2 , e seja T_A a aplicação linear de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 cuja matriz em relação à base canónica é A . Então a aplicação $h_A : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dada por

$$h_A([v]) = [T_A(v)] \text{ para todo o } v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

está bem definida. Uma aplicação $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ da forma h_A diz-se uma *transformação projectiva* ou uma *homografia* de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Observação 3.1.7. Resulta da definição que a composta de duas homografias é uma homografia, e que a inversa de uma homografia é também uma homografia, sendo a inversa de h_A a homografia $h_{A^{-1}}$.

Demonstração. Para provar que h_A está bem definida, precisamos de nos assegurar de que:

- Se $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, então $T_A(v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: é imediato pois, sendo T_A injectiva, tem-se $\ker T_A = \{(0,0)\}$, e portanto $T_A(v) \neq (0,0)$ para $v \neq (0,0)$.
- Se $[v] = [w]$, então $[T_A(v)] = [T_A(w)]$: a condição $[v] = [w]$ diz-nos que $w = \lambda v$ para algum escalar λ , e portanto $T_A(w) = \lambda T_A(v)$, pelo que $[T_A(v)] = [T_A(w)]$.

E está provado. □

Suponha-se agora que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, com $c \neq 0$. A que aplicação $f : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ corresponde a aplicação $h_A : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ através da bijecção natural $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$? Bem, sendo $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ é o elemento de $\overline{\mathbb{R}}$ correspondente a

$$h_A([(x, 1)]) = [(ax + b, cx + d)]$$

mas isto, pelo menos quando $x \neq -\frac{d}{c}$, corresponde a $\frac{ax+b}{cx+d}$ em $\overline{\mathbb{R}}$! E se $x = -\frac{d}{c}$ então $h_A([(x, 1)]) = [(ax + b, 0)] = [(1, 0)]$, que corresponde a ∞ em $\overline{\mathbb{R}}$! Por fim, $f(\infty)$ corresponde a $h_A([(1, 0)]) = [(a, c)]$, pelo que $f(\infty) = \frac{a}{c}$! Portanto h_A não é mais do que f_A na sua versão $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. E uma verificação análoga mostra que o mesmo acontece quando $c = 0$. Em resumo,

Transformações de Möbius são essencialmente aplicações lineares invertíveis de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 após passagem a um quociente.

O fenómeno da Proposição 3.1.4 está portanto explicado. Vamos agora provar um Lema que nos diz essencialmente quantos “graus de liberdade” temos ao definir uma homografia de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ (ou uma transformação de Möbius).

Lema 3.1.8. *Sejam $B, C, D \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ pontos distintos e sejam $E, F, G \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ pontos distintos. Então existe uma única homografia h de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tal que $h(B) = E$, $h(C) = F$ e $h(D) = G$. Em particular, uma homografia de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ que fixe três pontos distintos é a identidade.*

Para a prova, precisamos de um preparativo (que é na verdade um caso particular):

Proposição 3.1.9. *Seja h uma homografia de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ que fixe os pontos de coordenadas homogêneas $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$. Então h é a identidade.*

Demonstração. Seja A uma matriz 2×2 tal que $h = h_A$. Então, como h_A fixa $[(1, 0)]$, temos $[T_A(1, 0)] = [(1, 0)]$, ou seja, $T_A(1, 0) = (a, 0)$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Analogamente, como h_A fixa $[(0, 1)]$, temos $T_A(0, 1) = (0, b)$ para algum $b \in \mathbb{R}$. Isto diz-nos que a matriz A é

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Logo $T_A(1, 1) = (a, b)$. Mas, como $[(1, 1)]$ é fixo por h , $T_A(1, 1)$ é da forma $\lambda(1, 1) = (\lambda, \lambda)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Portanto $a = b$. Mas então $A = a\text{Id}_{2 \times 2}$, e portanto $h_A([v]) = [T_A(v)] = [av] = [v]$ para todo o $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Logo $h = h_A$ é a identidade. \square

Passemos à prova do Lema 3.1.8.

Demonstração. Começamos por provar um caso particular: dados quaisquer pontos distintos $B, C, D \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, existe uma homografia h de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tal que $h([(1, 0)]) = B$, $h([(0, 1)]) = C$ e $h([(1, 1)]) = D$. Sejam $B = [u]$, $C = [v]$ e $D = [w]$. A condição de B e C serem distintos diz-nos que u e v são linearmente independentes, e portanto formam uma base de \mathbb{R}^2 . Logo existem reais a e b tais que $au + bv = w$. Consideramos a (única) matriz A tal que $T_A(1, 0) = au$ e $T_A(0, 1) = bv$. Então é imediato que $h_A([(1, 0)]) = [u] = B$ e $h_A([(0, 1)]) = [v] = C$. Além disso,

$$T_A(1, 1) = T_A(1, 0) + T_A(0, 1) = au + bv = w$$

pelo que $h_A([(1, 1)]) = D$.

Passamos à prova do caso geral do Lema 3.1.8.

- Existência: Consideramos uma homografia i tal que $i([(1, 0)]) = B$, $i([(0, 1)]) = C$ e $i([(1, 1)]) = D$, e uma homografia j tal que $j([(1, 0)]) = E$, $j([(0, 1)]) = F$ e $j([(1, 1)]) = G$. Então a homografia

$$h = j \circ i^{-1}$$

envia B em E , C em F e D em G , como pretendido.

- Unicidade: Suponha-se que h e h' são duas homografias que enviam B em E , C em F e D em G . Consideremos i e j definidas como atrás, e sejam

$$l = j^{-1} \circ h \circ i \text{ e } l' = j^{-1} \circ h' \circ i.$$

Então l e l' são ambas homografias que fixam os pontos de coordenadas homogêneas $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$, pelo que, pela Proposição 3.1.9, se tem $l = l'$. Portanto $j \circ l \circ i^{-1} = j \circ l' \circ i^{-1}$, ou seja, $h = h'$.

O Lema está provado. \square

Razão dupla

Dados pontos P, Q e R na recta afim real $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$, com $Q \neq R$, o quociente $\frac{PR}{RQ}$ está definido, e, pelo Corolário 1.4.5, quando R varia em $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$, esse quociente percorre todos os reais com excepção de -1 . Quando R se afasta cada vez mais de P e Q , esse quociente aproxima-se de -1 , e portanto faz sentido estendê-lo à recta afim real completada declarando que $\frac{P\infty}{\infty Q} = -1$.

Acontece que estes quocientes, embora sejam preservados por transformações afins de $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$, não são preservados em geral por homografias. Para remediar esta situação, vamos introduzir outra quantidade que é, num certo sentido, a quantidade mais próxima preservada por homografias. Essa quantidade é essencialmente o quociente entre dois destes quocientes: expressões do tipo

$$\left(\frac{PR}{RQ} \right) / \left(\frac{PS}{SQ} \right),$$

com P, Q, R e S pontos distintos, a que vamos chamar a *razão dupla* de P, Q, R, S . Correspondendo os pontos P, Q, R e S a quatro reais p, q, r e s , poderíamos definir a sua razão dupla como sendo a expressão

$$\left(\frac{p-r}{r-q}\right) \Big/ \left(\frac{p-s}{s-q}\right)$$

mas agora estamos interessados em definir esta quantidade para quaisquer pontos em $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, e portanto temos de entrar em conta com a possibilidade de p, q, r ou s serem ∞ . Para abranger este caso, utilizamos o seguinte truque: supomos que P, Q, R e S admitem coordenadas homogéneas $(p_1, p_2), (q_1, q_2), (r_1, r_2)$ e (s_1, s_2) , respectivamente. Sabemos que, no caso em que p_2, q_2, r_2, s_2 são diferentes de 0, estes pontos correspondem aos reais $\frac{p_1}{p_2}, \frac{q_1}{q_2}, \frac{r_1}{r_2}, \frac{s_1}{s_2}$, e portanto estamos interessados em que a sua razão dupla seja

$$\left(\frac{\frac{p_1}{p_2} - \frac{r_1}{r_2}}{\frac{r_1}{r_2} - \frac{q_1}{q_2}}\right) \Big/ \left(\frac{\frac{p_1}{p_2} - \frac{s_1}{s_2}}{\frac{s_1}{s_2} - \frac{q_1}{q_2}}\right).$$

Mas, limpando denominadores, isto reescreve-se como

$$\left(\frac{p_1 r_2 - p_2 r_1}{r_1 q_2 - r_2 q_1}\right) \Big/ \left(\frac{p_1 s_2 - p_2 s_1}{s_1 q_2 - s_2 q_1}\right)$$

e, escrita desta forma, a expressão está bem definida mesmo no caso em que algum dos pontos P, Q, R e S é o ponto do infinito (desde que os quatro pontos sejam distintos). Portanto usamos esta expressão para a definição formal de razão dupla.

Definição 3.1.10. Sejam P, Q, R e S quatro pontos distintos na recta projectiva real $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, que admitem coordenadas homogéneas $(p_1, p_2), (q_1, q_2), (r_1, r_2)$ e (s_1, s_2) , respectivamente. A *razão dupla* ou *razão cruzada* de P, Q, R e S é definida por

$$[P, Q; R, S] = \frac{(p_1 r_2 - p_2 r_1)(s_1 q_2 - s_2 q_1)}{(r_1 q_2 - r_2 q_1)(p_1 s_2 - p_2 s_1)}.$$

Mas, para enfatizar:

A razão dupla $[P, Q; R, S]$ deve ser pensada como a razão entre os quocientes $\frac{PR}{RQ}$ e $\frac{PS}{SQ}$, e é de facto igual a essa razão se P, Q, R e S não são ∞ .

Vamos agora provar uma propriedade prometida da razão dupla que justifica grande parte do seu interesse.

Proposição 3.1.11. *Seja $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ uma função. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) f é uma homografia;

(ii) f preserva a razão dupla, isto é, para quaisquer pontos distintos $P, Q, R, S \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, os pontos $f(P), f(Q), f(R), f(S)$ também são distintos e satisfazem

$$[f(P), f(Q); f(R), f(S)] = [P, Q; R, S].$$

Demonstração. Vamos provar as duas implicações em separado.

- (i) \Rightarrow (ii): Suponha-se que $f = h_A$. Sejam (p_1, p_2) , (q_1, q_2) , (r_1, r_2) e (s_1, s_2) coordenadas homogéneas para P , Q , R e S , respectivamente, e sejam (p'_1, p'_2) , (q'_1, q'_2) , (r'_1, r'_2) e (s'_1, s'_2) coordenadas homogéneas para $f(P)$, $f(Q)$, $f(R)$ e $f(S)$ de tal modo que

$$A \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s'_1 \\ s'_2 \end{pmatrix}.$$

Então

$$\begin{aligned} [f(P), f(Q); f(R), f(S)] &= \frac{(p'_1 r'_2 - p'_2 r'_1)(s'_1 q'_2 - s'_2 q'_1)}{(r'_1 q'_2 - r'_2 q'_1)(p'_1 s'_2 - p'_2 s'_1)} \\ &= \frac{\det \begin{pmatrix} p'_1 & r'_1 \\ p'_2 & r'_2 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} s'_1 & q'_1 \\ s'_2 & q'_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} r'_1 & q'_1 \\ r'_2 & q'_2 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} p'_1 & s'_1 \\ p'_2 & s'_2 \end{pmatrix}} \\ &= \frac{\det A \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \det A \begin{pmatrix} s_1 & q_1 \\ s_2 & q_2 \end{pmatrix}}{\det A \begin{pmatrix} r_1 & q_1 \\ r_2 & q_2 \end{pmatrix} \det A \begin{pmatrix} p_1 & s_1 \\ p_2 & s_2 \end{pmatrix}} \\ &= \frac{(\det A)^2 \det \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} s_1 & q_1 \\ s_2 & q_2 \end{pmatrix}}{(\det A)^2 \det \begin{pmatrix} r_1 & q_1 \\ r_2 & q_2 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} p_1 & s_1 \\ p_2 & s_2 \end{pmatrix}} \\ &= \frac{\det \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} s_1 & q_1 \\ s_2 & q_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} r_1 & q_1 \\ r_2 & q_2 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} p_1 & s_1 \\ p_2 & s_2 \end{pmatrix}} \\ &= [P, Q; R, S]. \end{aligned}$$

- (ii) \Rightarrow (i): Suponha-se agora que f preserva a razão dupla. Afirmamos que esta condição determina unicamente f se conhecidas as imagens de três pontos distintos P , Q e R . De facto, suponha-se que P , Q e R são distintos e admitem coordenadas homogéneas (p_1, p_2) , (q_1, q_2) e (r_1, r_2) , respectivamente, e que $f(P)$, $f(Q)$ e $f(R)$ são distintos e admitem coordenadas homogéneas (p'_1, p'_2) , (q'_1, q'_2) e (r'_1, r'_2) , respectivamente. A igualdade de razões duplas $[f(P), f(Q); f(R), f(X)] = [P, Q; R, X]$, para um ponto X de coordenadas homogéneas (x_1, x_2) diferente de P , Q e R , dá que

$$\frac{(p'_1 r'_2 - p'_2 r'_1)(x'_1 q'_2 - x'_2 q'_1)}{(r'_1 q'_2 - r'_2 q'_1)(p'_1 x'_2 - p'_2 x'_1)} = \frac{(p_1 r_2 - p_2 r_1)(x_1 q_2 - x_2 q_1)}{(r_1 q_2 - r_2 q_1)(p_1 x_2 - p_2 x_1)}$$

sendo (x'_1, x'_2) coordenadas homogéneas de $f(X)$. Acontece que esta relação é suficiente para determinar $[(x'_1, x'_2)]$ em função das restantes variáveis (porquê?). Logo $f(X)$ é unicamente determinado e existe uma única transformação de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ que envia P , Q e R

em $f(P), f(Q)$ e $f(R)$ e preserva a razão dupla. Mas tanto f como a única homografia que envia P em $f(P)$, Q em $f(Q)$ e R em $f(R)$ têm essa propriedade, logo estas funções têm de coincidir e f é uma homografia.

□

Estrutura de recta projectiva

Para finalizar a discussão sobre a recta projectiva real, vamos formalizar aqui uma ideia que será útil mais tarde; infelizmente, vamos ter de apresentar essa ideia de forma muito abstracta, pois ainda não dispomos de exemplos concretos onde ela se aplique. A ideia ficará mais clara quando esses exemplos aparecerem.

Nós chamámos a $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ a recta projectiva real, mas mais à frente vamos encontrar conjuntos que se comportam como “cópias” de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$; os exemplos mais típicos são as rectas e os feixes de rectas no plano projectivo real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Dado um tal conjunto ℓ , temos uma bijecção entre ℓ e $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ que nos permite, por exemplo, definir a razão dupla de quatro pontos de ℓ como a razão dupla dos quatro pontos correspondentes em $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Poderíamos, portanto, definir uma estrutura de recta projectiva num conjunto ℓ como sendo uma bijecção entre ℓ e $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Acontece que, nas situações que vamos encontrar mais à frente, existem em geral várias bijecções que “fazem sentido”; e nós queremos que todas elas definam a mesma estrutura de recta projectiva em ℓ . A “informação” que uma estrutura de recta projectiva nos deve dar é a seguinte:

Se temos uma estrutura de recta projectiva em ℓ , então dados quaisquer quatro pontos distintos de ℓ devemos ser capazes de calcular a sua razão dupla.

Mas quaisquer duas bijecções que diferem por uma homografia de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ induzem a mesma noção de razão dupla em ℓ . Por isso vamos convencionar que quaisquer duas tais bijecções definem a mesma estrutura de recta projectiva.

Definição 3.1.12. Uma *estrutura de recta projectiva real* em ℓ é um elemento do conjunto

$$\{\text{bijecções } \ell \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})\} / \sim$$

das classes de equivalência para a relação de equivalência definida no conjunto das bijecções $\ell \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ por $f \sim g$ se e só se $g \circ f^{-1}$ é uma homografia de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Denotamos por $[f]$ a classe de equivalência de f .

Proposição/Definição 3.1.13. Dada uma estrutura de recta projectiva $[f]$ em ℓ , definimos a *razão dupla* ou *razão cruzada* de quatro pontos distintos $P, Q, R, S \in \ell$ como sendo

$$[P, Q; R, S] = [f(P), f(Q); f(R), f(S)].$$

Prova de que isto está bem definido. Precisamos de verificar que se $[f] = [g]$ então

$$[f(P), f(Q); f(R), f(S)] = [g(P), g(Q); g(R), g(S)].$$

Mas temos

$$[f(P), f(Q); f(R), f(S)] = [(g \circ f^{-1})(f(P)), (g \circ f^{-1})(f(Q)); (g \circ f^{-1})(f(R)), (g \circ f^{-1})(f(S))]$$

pela Proposição 3.1.11, uma vez que $g \circ f^{-1}$ é uma homografia. O lado direito é igual a $[g(P), g(Q); g(R), g(S)]$, mostrando a igualdade pretendida. \square

De facto, essencialmente do argumento da prova anterior decorre algo mais forte:

Proposição 3.1.14. *Duas bijecções $f, g : \ell \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ induzem a mesma estrutura de recta projectiva em ℓ (isto é, $[f] = [g]$) se e só se f e g induzem a mesma noção de razão dupla em ℓ (isto é, tem-se $[f(P), f(Q); f(R), f(S)] = [g(P), g(Q); g(R), g(S)]$ para quaisquer quatro pontos distintos $P, Q, R, S \in \ell$).*

Demonstração. O “só se” acabamos de provar; vamos provar o “se”. Sabemos que para quaisquer pontos $A, B, C, D \in \ell$ se tem

$$\begin{aligned} [A, B, C, D] &= [f(f^{-1}(A)), f(f^{-1}(B)), f(f^{-1}(C)), f(f^{-1}(D))] \\ &= [g(f^{-1}(A)), g(f^{-1}(B)), g(f^{-1}(C)), g(f^{-1}(D))]. \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 3.1.11, $g \circ f^{-1}$ é uma homografia de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, e $[f] = [g]$. \square

Se temos estruturas de recta projectiva $[f_1]$ e $[f_2]$ em conjuntos ℓ_1 e ℓ_2 , podemos definir homografias entre ℓ_1 e ℓ_2 de maneira natural: dada uma função $\ell_1 \rightarrow \ell_2$, “transportamo-la” para uma função $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ usando as bijecções f_1 e f_2 , e definimo-la como uma homografia se a função transportada o for.

Definição 3.1.15. Dados dois conjuntos ℓ_1 e ℓ_2 com estruturas de recta projectiva $[f_1]$ e $[f_2]$, dizemos que uma função $f : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ é uma homografia se a função

$$f_2 \circ f \circ f_1^{-1} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

é uma homografia de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Fica como exercício verificar que isto está bem definido, no sentido de que não depende das escolhas dos representantes f_1 e f_2 . Sendo as homografias de ℓ_1 em ℓ_2 simples transportadas de homografias de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ através de bijecções (as mesmas bijecções que induzem a noção de razão dupla em ℓ_1 e ℓ_2), é intuitivo (e deixamos como exercício escrever uma prova formal) que se tem a seguinte adaptação do Lema 3.1.8 e da Proposição 3.1.11:

Proposição 3.1.16. *Dada uma função $f : \ell_1 \rightarrow \ell_2$, onde ℓ_1 e ℓ_2 estão munidas de estruturas de recta projectiva, e dados três pontos distintos $B, C, D \in \ell_1$ e três pontos distintos $E, F, G \in \ell_2$, tem-se:*

- f é uma homografia se e só se f preserva a razão dupla;
- Existe uma única homografia $h : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ tal que $h(B) = E$, $h(C) = F$ e $h(D) = G$.

§3.2 O plano projectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Estamos finalmente prontos para deixar o caso unidimensional e conhecer o plano projectivo. A ideia para completar o plano afim $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ com pontos do infinito é em tudo análoga à ideia para completar a recta afim $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ com (um único ponto) do infinito. Obtemos uma bijecção natural entre $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ e algumas rectas que passam pela origem em \mathbb{R}^3 associando ao ponto de coordenadas (x, y) a recta que passa pela origem e pelo ponto $(x, y, 1)$. Isto deixa de fora apenas as rectas contidas no plano $z = 0$, e completamos a correspondência “inventando” pontos do infinito para corresponder a essas rectas.

Definição 3.2.1. O plano projectivo real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ é o conjunto $(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}) / \sim$ das classes de equivalência para a relação \sim em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ definida por

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \text{ se e só se existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } (x', y', z') = \lambda(x, y, z).$$

(Esta condição diz que (x, y, z) e (x', y', z') estão na mesma recta que passa pela origem, logo as classes de equivalência são as rectas que passam pela origem.)

Dado um vector $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, denotamos a sua classe de equivalência módulo \sim por $[v]$, e dizemos que v é um triplete de coordenadas homogéneas para $[v]$.

Os pontos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ que admitem coordenadas homogéneas (x, y, z) com $z \neq 0$ devem ser pensados como os pontos do nosso já conhecido $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$; esse ponto corresponde simplesmente ao ponto em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ de coordenadas $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$. Só os pontos que admitem coordenadas homogéneas da forma $(x, y, 0)$ é que são novos. Identificamos daqui em diante o plano afim $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ com o conjunto dos pontos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ que não são pontos do infinito (os *pontos finitos*), não distinguindo de agora em diante o ponto $[(x, y, 1)] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ do ponto $(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

Rectas no plano projectivo

Agora que acrescentámos alguns pontos ao plano afim $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, precisamos de decidir o que entendemos por uma recta em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Uma recta em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ admite equação $ax + by + c = 0$, para alguns $a, b, c \in \mathbb{R}$ com a e b não ambos nulos. Um ponto em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ que admite coordenadas homogéneas (x, y, z) com $z \neq 0$ pertence a essa recta se e só se

$$a\frac{x}{z} + b\frac{y}{z} + c = 0, \text{ ou seja, } ax + by + cz = 0.$$

Portanto a seguinte definição de recta no plano projectivo parece razoável.

Definição 3.2.2. Uma recta no plano projectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ é o conjunto dos pontos que admitem coordenadas homogéneas (x, y, z) que satisfazem

$$ax + by + cz = 0$$

para alguns reais a, b e c , não todos nulos.

Fica como exercício mostrar que duas rectas de equações $ax + by + cz = 0$ e $a'x + b'y + c'z = 0$ são iguais se e só se $(a', b', c') = \lambda(a, b, c)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vejamos “como são” as rectas de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Considere-se a recta r de equação $ax + by + cz = 0$, onde $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Temos dois casos possíveis:

- Se a e b não são ambos nulos, os pontos do plano afim $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ que pertencem a r são os pontos $(x, y) = [(x, y, 1)]$ que satisfazem

$$ax + by + c \cdot 1 = 0, \text{ ou seja, } ax + by + c = 0.$$

Ou seja, os pontos finitos de r formam uma recta das clássicas. Para obter os pontos do infinito em r , substituímos $z = 0$ na equação, obtendo $ax + by = 0$. Como a e b não são ambos nulos, isto acontece se e só se $(x, y) = \lambda(-b, a)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, e obtemos que o único ponto do infinito de r é o ponto de coordenadas homogéneas $(-b, a, 0)$.

- Se a e b são ambos nulos, a recta r tem equação $cz = 0$ para algum $c \neq 0$, ou seja, tem equação $z = 0$. Esta recta claramente não intersecta $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, e contém precisamente os pontos do infinito.

Concluimos o seguinte:

Proposição 3.2.3 (Descrição das rectas em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$). *Cada recta em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ é de um (e um só) dos seguintes tipos:*

- Uma recta afim em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ completada com um ponto do infinito;
- A recta de equação $z = 0$, que contém precisamente os pontos do infinito.

Vamos ver quando é que duas rectas afins em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ se completam com o mesmo ponto do infinito. Consideremos duas rectas afins de equações $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$, onde $(a, b) \neq (0, 0) \neq (a', b')$. Já vimos que estas rectas em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ são completadas com os pontos do infinito de coordenadas homogéneas $(-b, a, 0)$ e $(-b', a', 0)$. Estes pontos são o mesmo se e só se $(-b, a, 0)$ e $(-b', a', 0)$ são múltiplos um do outro, o que acontece precisamente quando (a, b) e (a', b') são múltiplos um do outro. Mas isto é precisamente uma condição necessária e suficiente para que as duas rectas sejam paralelas em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$! Conclui-se que rectas paralelas em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ são precisamente as rectas que são completadas com o mesmo ponto do infinito. E daqui decorre facilmente uma propriedade fundamental de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, que corrige um “defeito” de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$:

Lema 3.2.4. *Quaisquer duas rectas distintas em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ têm exactamente um ponto em comum.*

Demonstração. Suponha-se inicialmente que as duas rectas são rectas afins completadas. Se as duas não são paralelas em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, têm um único ponto em comum em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, que também é único em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ porque, não sendo paralelas em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, as duas rectas não são completadas com o mesmo ponto do infinito. Se as duas são paralelas em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, então não têm pontos em comum em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ e têm um ponto do infinito em comum.

Se uma das rectas for a recta do infinito, a outra é uma recta afim completada com exactamente um ponto do infinito, e o resultado está demonstrado. \square

Temos também o Lema dual:

Lema 3.2.5. *Por quaisquer dois pontos distintos em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passa exactamente uma recta.*

Demonstração. Se ambos os pontos são finitos, então a recta afim que os contém completada é a única recta que passa por eles. Se ambos os pontos são pontos do infinito, a recta do infinito é a única recta que os contém. Suponha-se agora que um dos pontos é finito e o outro é um

ponto do infinito, admitindo coordenadas homogéneas $(-b, a, 0)$. Então uma recta que passe por ambos tem que ser uma recta afim completada, que para passar pelo ponto de coordenadas homogéneas $(-b, a, 0)$ deve ser paralela à recta de equação $ax + by = 0$, e existe exactamente uma recta em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ paralela a essa recta que passa pelo ponto finito considerado. \square

Observação 3.2.6. Podemos arranjar “fórmulas” para determinar quando é que três pontos em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ estão sobre uma mesma recta e quando é que três rectas em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passam por um mesmo ponto. Considerem-se três pontos distintos de coordenadas homogéneas (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) e (x_3, y_3, z_3) . Esses pontos estarem contidos numa recta equivale a que o sistema

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 = 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 = 0 \end{cases}$$

em (a, b, c) tenha uma solução em que a , b e c não são todos nulos. Isso equivale a ter-se

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Considerem-se agora quaisquer três rectas de equações $a_1x + b_1y + c_1z = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z = 0$ e $a_3x + b_3y + c_3z = 0$. Estas rectas têm um ponto em comum se e só se o sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

tem uma solução com (x, y, z) não todos nulos. Isso equivale a ter-se

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Como aludimos na secção anterior, qualquer recta no plano projectivo pode ser vista essencialmente como uma cópia de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ (o que não é surpreendente; afinal, em geral, uma recta no plano projectivo é uma recta afim completada com um ponto). Vamos agora definir formalmente uma estrutura de recta projectiva numa recta r em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Seja $mx + ny + pz = 0$ uma equação da recta r em coordenadas homogéneas. Os vectores $v \in \mathbb{R}^3$ que são coordenadas homogéneas de pontos de r estão num subespaço de dimensão 2 de \mathbb{R}^3 , definido precisamente pela equação $mx + ny + pz = 0$. Assim, quaisquer dois vectores linearmente independentes nesse espaço (ou seja, quaisquer dois tripletos de coordenadas homogéneas para pontos distintos de r) formam uma base desse espaço. Logo, se A e B são dois pontos distintos em r , e u e v são tripletos de coordenadas homogéneas para A e B respectivamente, então a recta r é precisamente o conjunto dos pontos da forma

$$[au + bv] \text{ com } (a, b) \neq (0, 0).$$

Além disso, sendo u e v linearmente independentes, os vectores $au + bv$ e $a'u + b'v$ são múltiplos um do outro (isto é, representam o mesmo ponto em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$) se e só se $(a', b') = \lambda(a, b)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Obtemos assim uma bijecção bem definida de r em $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$:

$$[au + bv] \mapsto [(a, b)].$$

Claro que esta bijecção depende dos pontos A e B (ou dos vectores u e v) escolhidos. Mas a estrutura de recta projectiva que ela induz não depende, e é isso que afirma o próximo lema.

Lema 3.2.7. *A estrutura de recta projectiva induzida em r pela bijecção $f : r \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ definida por*

$$[au + bv] \mapsto [(a, b)]$$

onde $[u]$ e $[v]$ são pontos distintos de r não depende da escolha de $[u]$ e $[v]$.

Demonstração. Suponhamos que temos um segundo par de vectores linearmente independentes, digamos u' e v' , tais que $[u']$ e $[v']$ são pontos diferentes de r , e seja $g : r \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ a bijecção definida por

$$[au' + bv'] \mapsto [(a, b)].$$

Como $[u]$ e $[v]$ pertencem a r , podemos escrever $u = \alpha u' + \beta v'$ e $v = \gamma u' + \delta v'$. Como a matriz $M = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ é uma matriz de mudança de base, é a matriz de uma aplicação linear invertível.

Vamos determinar a transformação $g \circ f^{-1} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. A função f^{-1} envia $[(a, b)]$ em

$$[au + bv] = [a(\alpha u' + \beta v') + b(\gamma u' + \delta v')] = [(\alpha a + \gamma b)u' + (\beta a + \delta b)v'].$$

A função g envia $[(\alpha a + \gamma b)u' + (\beta a + \delta b)v']$ em $[(\alpha a + \gamma b, \beta a + \delta b)]$. Portanto a composta $g \circ f^{-1}$ é a aplicação $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ definida por

$$[(a, b)] \mapsto [(\alpha a + \gamma b, \beta a + \delta b)].$$

Logo $g \circ f^{-1} = h_M$ é uma homografia, e portanto f e g induzem a mesma estrutura de recta projectiva em r . \square

Exemplo 3.2.8. Vamos ver que (como seria de esperar, tendo em conta o espírito original da definição de razão cruzada), para quaisquer quatro pontos colineares distintos A, B, C, D em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, tem-se

$$[A, B; C, D] = \frac{\left(\frac{AC}{CB}\right)}{\left(\frac{AD}{DB}\right)}$$

(onde a razão cruzada é considerada em relação à estrutura de recta projectiva definida atrás na recta r que passa por A, B, C e D). Sejam (a_1, a_2) e (b_1, b_2) coordenadas de A e B em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, de modo que $(a_1, a_2, 1)$ e $(b_1, b_2, 1)$ são coordenadas homogéneas de A e B . O ponto C tem coordenadas em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ da forma

$$(1 - \lambda)(a_1, a_2) + \lambda(b_1, b_2)$$

onde $\frac{AC}{CB} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$, e portanto admite coordenadas homogéneas

$$(1 - \lambda)(a_1, a_2, 1) + \lambda(b_1, b_2, 1).$$

Analogamente D admite coordenadas homogéneas da forma

$$(1 - \mu)(a_1, a_2, 1) + \mu(b_1, b_2, 1)$$

onde $\frac{AD}{DB} = \frac{\mu}{1-\mu}$. Sendo $u = (a_1, a_2, 1)$ e $v = (b_1, b_2, 1)$, a bijecção $r \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dada por $[au + bv] \mapsto [(a, b)]$ envia A em $P = [(1, 0)]$, B em $Q = [(0, 1)]$, C em $R = [(1 - \lambda, \lambda)]$ e D em $S = [(1 - \mu, \mu)]$. Ora, temos

$$[A, B; C, D] = [P, Q; R, S]$$

e calculando a segunda razão cruzada usando directamente a Definição 3.1.10, obtém-se

$$[A, B; C, D] = \frac{\lambda(1 - \mu)}{(1 - \lambda)\mu} = \frac{\left(\frac{AC}{CB}\right)}{\left(\frac{AD}{DB}\right)}$$

como pretendido.

§3.3 Divisão harmónica

O assunto que vamos expor agora já podia ter sido exposto quando estudámos em detalhe a recta projectiva real (é essencialmente unidimensional) mas ao expô-lo agora estamos mais em condições de dar exemplos que o iluminem. Começamos com um Lema simples.

Lema 3.3.1. *Sejam P, Q e R pontos distintos em ℓ , onde ℓ está munida de uma estrutura de recta projectiva. Então a correspondência $\ell \setminus \{P, Q, R\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$S \mapsto [P, Q; R, S]$$

é injectiva e a sua imagem é $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Demonstração. Existe uma homografia que envia P, Q e R nos pontos de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ de coordenadas homogéneas $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$; como homografias preservam a razão dupla, podemos supor sem perda de generalidade que $\ell = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e que P, Q e R são esses três pontos. Para um ponto S de coordenadas homogéneas (α, β) , podemos agora calcular

$$[P, Q; R, S] = \frac{\alpha}{\beta}$$

usando directamente a Definição 3.1.10. O facto de S ser distinto de P, Q e R garante que $\alpha, \beta \neq 0$ e $\alpha \neq \beta$, e são estas as únicas restrições que temos sobre α e β . Assim $\frac{\alpha}{\beta}$ pode tomar todos os valores reais diferentes de 0 e 1; a injectividade é óbvia. \square

Tendo isto provado, podemos introduzir o conceito central desta secção, que aparece com uma frequência curiosamente elevada em Geometria Projectiva.

Definição 3.3.2. Um quarteto (P, Q, R, S) de pontos distintos num conjunto ℓ com uma estrutura de recta projectiva é um *quarteto harmónico* (diz-se também que os quatro pontos estão em *divisão harmónica*) se

$$[P, Q; R, S] = -1.$$

Observação 3.3.3. Usando que $[P, Q; R, S] = \frac{1}{[P, Q; S, R]}$ (o que decorre directamente da Definição 3.1.10), vemos que o quarteto $[P, Q; R, S]$ é harmónico se e só se $[P, Q; S, R]$ o for. Usando que $[P, Q; R, S] = [R, S; P, Q]$ (o que também decorre directamente da Definição 3.1.10) vemos que $[P, Q; R, S]$ é harmónico se e só se $[R, S; P, Q]$ o for.

Definição 3.3.4. Sejam P, Q e R pontos distintos em ℓ . Então, pelo Lema 3.3.1, existe um único ponto $S \in \ell$ tal que (P, Q, R, S) é harmónico. Chamamos a esse ponto o *conjugado harmónico de R em relação ao par (P, Q)* .

Brevemente vamos ver uma maneira de construir geometricamente o conjugado harmónico quando ℓ é uma recta em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$; na verdade, já estamos essencialmente em condições de provar que esse método funciona, mas há um pequeno detalhe técnico que torna preferível adiá-lo para a próxima secção. Para já vamos contentar-nos com alguns exemplos de quartetos harmónicos, em particular alguns que aparecem de forma bastante natural.

Exemplo 3.3.5 (Exemplos de quartetos harmónicos).

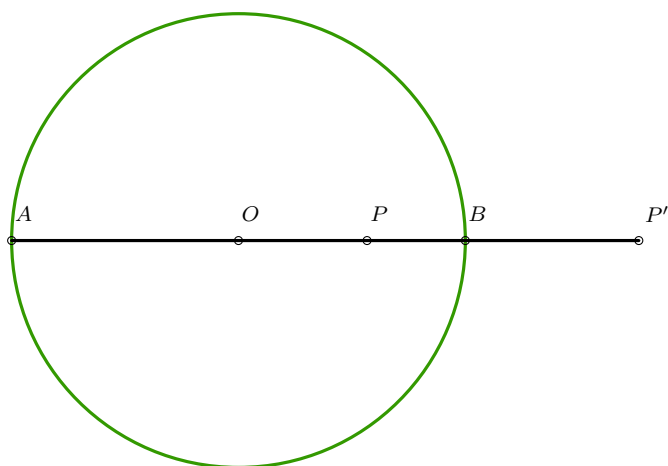
- (i) Em $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, o conjugado harmónico do ponto de coordenadas homogéneas $(1, 1)$ em relação ao par de pontos de coordenadas homogéneas $(1, 0)$ e $(0, 1)$ é o ponto de coordenadas homogéneas $(1, -1)$; isto é directo a partir da prova do Lema 3.3.1.

- (ii) Considerem-se três pontos distintos A , B e M sobre uma recta r no plano afim $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tais que M é o ponto médio do segmento AB . Em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, r é completada com um ponto do infinito. O conjugado harmónico de M em relação ao par (A, B) é o ponto do infinito de r . Para justificar isto, basta provar que para nenhum ponto finito N de r se tem $[A, B; M, N] = -1$. Ora, se N fosse um tal ponto, teríamos, pelo Exemplo 3.2.8,

$$\frac{\left(\frac{AM}{MB}\right)}{\left(\frac{AN}{NB}\right)} = -1$$

o que, como $\frac{AM}{MB} = 1$, implica $\frac{AN}{NB} = -1$. Mas isto é impossível pelo Corolário 1.4.5. Logo o conjugado harmónico de M é de facto o ponto do infinito com que completamos r .

- (iii) Considere-se, no plano Euclidiano (visto também como subconjunto do plano projectivo, tendo em conta que \mathbb{R}^2 e $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ são iguais como conjuntos), uma circunferência \mathcal{C} e dois pontos diametralmente opostos $A, B \in \mathcal{C}$. Seja P um ponto de AB , diferente do centro de \mathcal{C} , e seja P' o inverso de P em relação a \mathcal{C} . Então P' é o conjugado harmónico de P em relação ao par (A, B) .



De facto, considere-se, para cada ponto, a sua distância orientada ao centro O de \mathcal{C} ; se r é o raio de \mathcal{C} , podemos escolher a orientação de forma que a distância de A a O seja $-r$ e a distância de B a O seja r . Se x for a distância de P a O , a distância de P' a O é $\frac{r^2}{x}$. Resulta que

$$\begin{aligned} [A, B; P, P'] &= \left(\frac{AP}{PB}\right) \bigg/ \left(\frac{AP'}{P'B}\right) \\ &= \left(\frac{x+r}{r-x}\right) \bigg/ \left(\frac{\frac{r^2}{x}+r}{r-\frac{r^2}{x}}\right) \\ &= \frac{x+r}{r-x} \cdot \frac{x-r}{r+x} \\ &= -1. \end{aligned}$$

§3.4 Homografias e os Teoremas de Desargues e Pappus

Estamos quase prontos para ver finalmente alguma Geometria a acontecer. Para isso precisamos de introduzir as homografias do plano projectivo, que generalizam as transformações afins de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. De facto, vamos ver que as transformações afins de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ são essencialmente as homografias de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ que enviam pontos do infinito em pontos do infinito e pontos finitos em pontos finitos; o que faz sentido pois, enquanto só tínhamos a parte afim, não tínhamos pontos do infinito em que pudéssemos enviar os pontos finitos.

A ideia para definir estas transformações de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ é análoga à construção das homografias de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$; $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ apareceu como quociente do espaço vectorial \mathbb{R}^3 , e nesse espaço temos uma classe de transformações já conhecidas, que são as aplicações lineares, que se passarem ao quociente nos dão transformações de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Proposição/Definição 3.4.1. Seja M uma matriz invertível 3×3 , e seja T_M a aplicação linear de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 cuja matriz em relação à base canónica é M . Então a aplicação $h_M : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dada por

$$h_M([v]) = [T_M(v)] \text{ para todo o } v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

está bem definida. Uma aplicação $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ da forma h_M diz-se uma *transformação projectiva* ou uma *homografia* de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Observação 3.4.2. Resulta da definição que a composta de duas homografias é uma homografia, e que a inversa de uma homografia é também uma homografia, sendo a inversa de h_M a homografia $h_{M^{-1}}$.

Demonstração. Para provar que h_M está bem definida, precisamos de nos assegurar de que:

- Se $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, então $T_M(v) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$: é imediato pois, sendo T_M injectiva, tem-se $\ker T_M = \{(0, 0, 0)\}$, e portanto $T_M(v) \neq (0, 0, 0)$ para $v \neq (0, 0, 0)$.
- Se $[v] = [w]$, então $[T_M(v)] = [T_M(w)]$: a condição $[v] = [w]$ diz-nos que $w = \lambda v$ para algum escalar λ , e portanto $T_M(w) = \lambda T_M(v)$, pelo que $[T_M(v)] = [T_M(w)]$.

E está provado. □

Precisamos, antes de passar às aplicações, de ver algumas propriedades das homografias de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, muitas das quais são análogas às propriedades que vimos das homografias de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. A propriedade que nos vai ser mais importante é a próxima, que afirma essencialmente que uma homografia de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ é determinada pelas imagens de quatro pontos em posição geral.

Lema 3.4.3. *Sejam $A, B, C, D \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ quatro pontos tais que entre eles não há três colineares, e sejam $E, F, G, H \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ outros quatro pontos tais que entre eles não há três colineares. Então existe uma única homografia h de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tal que*

$$h(A) = E, \quad h(B) = F, \quad h(C) = G \text{ e } h(D) = H.$$

Em particular, uma homografia de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ que fixe quatro pontos distintos é a identidade.

Para a prova, precisamos de um preparativo (que é na verdade um caso particular):

Proposição 3.4.4. *Seja h uma homografia de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ que fixa os pontos de coordenadas homogêneas $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(1, 1, 1)$. Então h é a identidade.*

Demonstração. Seja M uma matriz 3×3 tal que $h = h_M$. Então, como h_M fixa $[(1, 0, 0)]$, temos $[T_M(1, 0, 0)] = [(1, 0, 0)]$, ou seja, $T_M(1, 0, 0) = (a, 0, 0)$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Analogamente, como h_M fixa $[(0, 1, 0)]$, temos $T_M(0, 1, 0) = (0, b, 0)$ para algum $b \in \mathbb{R}$, e como h_M fixa $[(0, 0, 1)]$, temos $T_M(0, 0, 1) = (0, 0, c)$ para algum $c \in \mathbb{R}$. Isto diz-nos que a matriz M é

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Logo $T_M(1, 1, 1) = (a, b, c)$. Mas como $[(1, 1, 1)]$ é fixo por h , $T_M(1, 1, 1)$ é da forma $\lambda(1, 1, 1) = (\lambda, \lambda, \lambda)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Portanto $a = b = c$. Mas então $M = a\text{Id}_{3 \times 3}$, e portanto $h_M([v]) = [T_M(v)] = [av] = [v]$ para todo o $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Logo $h = h_M$ é a identidade. \square

Passemos à prova do Lema 3.4.3.

Demonstração. Começamos por provar um caso particular: dados quaisquer pontos $A, B, C, D \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, três a três não colineares, existe uma homografia h de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tal que $h([(1, 0, 0)]) = A$, $h([(0, 1, 0)]) = B$, $h([(0, 0, 1)]) = C$ e $h([(1, 1, 1)]) = D$. Sejam $A = [u]$, $B = [v]$, $C = [w]$ e $D = [z]$. A condição de A, B e C não serem colineares diz-nos que u, v e w são linearmente independentes, e portanto formam uma base de \mathbb{R}^3 . Logo existem reais a, b e c tais que $au + bv + cw = z$. Nenhum dos escalares a, b, c é 0; se, por exemplo, se tivesse $a = 0$, obteríamos $bv + cw = z$, o que é impossível porque, como B, C e D não são colineares, v, w e z são linearmente independentes. Consideramos a (única) matriz M tal que $T_M(1, 0, 0) = au$, $T_M(0, 1, 0) = bv$ e $T_M(0, 0, 1) = cw$. Então é imediato que $h_M([(1, 0, 0)]) = [u] = A$, $h_M([(0, 1, 0)]) = [v] = B$ e $h_M([(0, 0, 1)]) = [w] = C$. Além disso,

$$T_M(1, 1, 1) = T_M(1, 0, 0) + T_M(0, 1, 0) + T_M(0, 0, 1) = au + bv + cw = z$$

pelo que $h_M([(1, 1, 1)]) = D$.

Passamos à prova do caso geral do Lema 3.4.3.

- Existência: Consideramos uma homografia i tal que $i([(1, 0, 0)]) = A$, $i([(0, 1, 0)]) = B$, $i([(0, 0, 1)]) = C$ e $i([(1, 1, 1)]) = D$, e uma homografia j tal que $j([(1, 0, 0)]) = E$, $j([(0, 1, 0)]) = F$, $j([(0, 0, 1)]) = G$ e $j([(1, 1, 1)]) = H$. Então a homografia

$$h = j \circ i^{-1}$$

envia A em E , B em F , C em G e D em H , como pretendido.

- Unicidade: Suponha-se que h e h' são duas homografias que enviam A em E , B em F , C em G e D em H . Consideremos i e j definidas como atrás, e sejam

$$l = j^{-1} \circ h \circ i \text{ e } l' = j^{-1} \circ h' \circ i.$$

Então l e l' são ambas homografias que fixam os pontos de coordenadas homogêneas $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(1, 1, 1)$, pelo que, pela Proposição 3.4.4, se tem $l = l'$. Portanto $j \circ l \circ i^{-1} = j \circ l' \circ i^{-1}$, ou seja, $h = h'$.

O Lema está provado. \square

Considere-se agora uma recta r em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, cuja equação em coordenadas homogéneas pode ser escrita na forma

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

com a, b, c não todos nulos. Qual é a imagem de r pela homografia de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ induzida pela matriz invertível M ? A equação anterior reescreve-se como

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} M^{-1} M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

e, sendo $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, temos que (x', y', z') são coordenadas homogéneas da imagem por h_M do ponto de coordenadas homogéneas (x, y, z) . Vemos, portanto, que $h_M(r)$ é uma recta (sendo os coeficientes de uma sua equação homogénea os a', b', c' tais que $\begin{pmatrix} a' & b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} M^{-1}$).

Tanto na recta r como na sua imagem r' por h temos uma estrutura de recta projectiva, e portanto uma noção de razão dupla. Sejam $A = [u]$ e $B = [v]$ pontos distintos em r , de tal maneira que a estrutura de recta projectiva em r é induzida pela bijecção $f : r \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dada por $[au + bv] \mapsto [(a, b)]$. A estrutura de recta projectiva em r' é induzida pela bijecção $g : r' \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dada por $[aT_M(u) + bT_M(v)] \mapsto [(a, b)]$. Mas h_M envia $[au + bv]$ em $[aT_M(u) + bT_M(v)]$, e portanto a composta

$$g \circ h_M|_r \circ f^{-1} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

é a identidade. Pela Definição 3.1.15, obtemos que

$$h_M|_r : r \rightarrow r'$$

é uma homografia. Conclui-se o seguinte:

Lema 3.4.5. *As homografias de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ enviam rectas em rectas, preservando a razão dupla.*

Considere-se agora uma transformação afim bijectiva de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, dada por

$$(x, y) \mapsto (ax + by + c, dx + ey + f).$$

Uma tal transformação é essencialmente uma homografia (o “essencialmente” é necessário porque formalmente f ainda não está definida nos pontos do infinito). Um ponto de coordenadas homogéneas (x, y, z) , com $z \neq 0$, é o ponto finito $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$, e portanto é enviado no ponto de coordenadas homogéneas

$$\left(a \frac{x}{z} + b \frac{y}{z} + c, d \frac{x}{z} + e \frac{y}{z} + f, 1 \right)$$

que também admite coordenadas homogéneas $(ax + by + cz, dx + ey + fz, z)$. Portanto f não é mais do que h_M (restrita a $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$), onde

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mas isto não é mais do que a matriz M_f definida na Proposição 1.7.2! Está assim explicado porque é que as matrizes dessa forma representam tão bem transformações afins; são simplesmente matrizes das transformações afins vistas como homografias!

De facto, podemos dar uma caracterização das transformações afins enquanto homografias da seguinte forma:

Proposição 3.4.6. *As homografias de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ que estendem transformações afins de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ (ou seja, as homografias induzidas por matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$$

são precisamente as homografias que enviam a recta do infinito na recta do infinito.

Demonstração. Se h é a homografia induzida pela matriz

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

então h envia o ponto de coordenadas homogéneas $(x, y, 0)$ no ponto de coordenadas homogéneas $(ax + by, dx + ey, 0)$, que também está na recta do infinito. Reciprocamente, considere-se uma homografia induzida pela matriz

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

que supomos deixar a recta do infinito invariante. Esta homografia envia o ponto de coordenadas homogéneas $(x, y, 0)$ no ponto de coordenadas homogéneas $(ax + by, dx + ey, gx + hy)$, e queremos portanto que $gx + hy$ seja sempre igual a 0 desde que x e y não sejam ambos nulos. Isto implica $g = h = 0$; para que a matriz que induz a homografia seja invertível, devemos então ter $i \neq 0$. A matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{i} & \frac{b}{i} & \frac{c}{i} \\ \frac{d}{i} & \frac{e}{i} & \frac{f}{i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

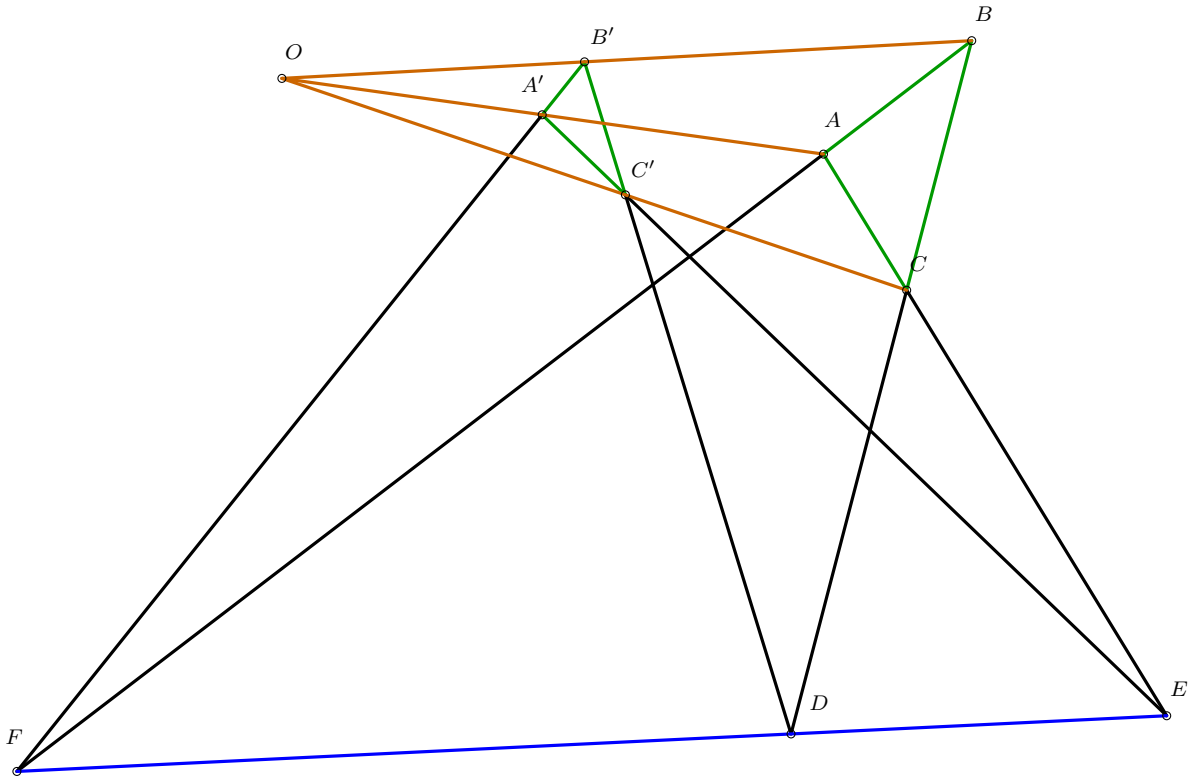
induz a mesma homografia, e o resultado está provado. □

Vamos finalmente utilizar as ferramentas que introduzimos para obter resultados geométricos. Os enunciados desses resultados são formulados sobre o plano projectivo. No entanto, eles não devem ser vistos como resultados altamente abstractos por esse motivo; excepto nos casos em que algum dos pontos envolvidos é um ponto do infinito (o que não acontece “quase nunca”), os resultados fazem todo o sentido no plano afim.

Os Teoremas de Desargues e Pappus

Começamos pelo *Teorema de Desargues*. Já vimos uma versão afim embrionária deste Teorema (Teorema 1.8.6) e agora vamos provar uma versão mais forte e interessante.

Teorema 3.4.7 (Teorema de Desargues). *Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano projectivo real. Sejam D o ponto de intersecção de BC e $B'C'$, E o ponto de intersecção de AC e $A'C'$ e F o ponto de intersecção de AB e $A'B'$ (supomos que estas rectas são todas diferentes). Se D , E e F estão sobre uma mesma recta, então as rectas AA' , BB' e CC' são concorrentes num ponto.*

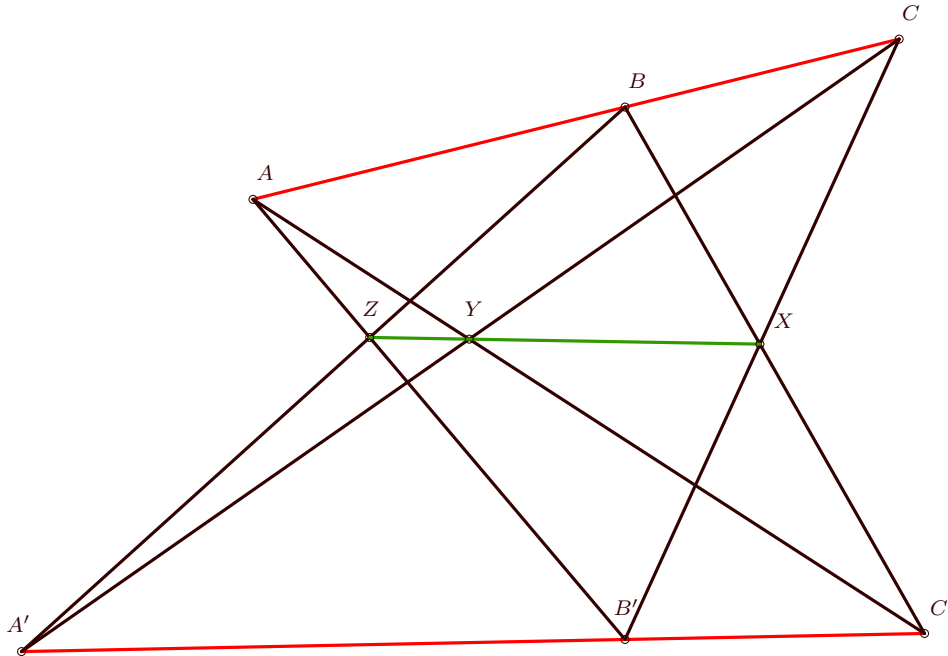


Demonstração. Considerem-se dois pontos distintos D^* e E^* na recta do infinito, e seja h uma homografia que envia D em D^* e E em E^* . Uma tal homografia existe pelo Lema 3.4.3, que nos garante que podemos escolher as imagens de até 4 pontos em posição geral. Para cada ponto X denotamos por X^* a sua imagem por h .

O ponto F é colinear com D e E e como tal F^* pertence à recta do infinito. Os pontos A , B , C , A' , B' e C' não estão na recta que passa por D , E e F e portanto são enviados em pontos em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. As rectas B^*C^* e $B'^*C'^*$ intersectam-se no ponto D^* , que pertence à recta do infinito, e como tal essas duas rectas são paralelas no plano afim. Analogamente, A^*C^* é paralela a $A'^*C'^*$ e A^*B^* é paralela a $A'^*B'^*$. Portanto, pelo Teorema de Desargues afim (Teorema 1.8.6), as rectas $A^*A'^*$, $B^*B'^*$ e $C^*C'^*$ são concorrentes num ponto ou paralelas, o que significa que, no plano projectivo, são concorrentes num ponto. A pré-imagem desse ponto por h pertence às rectas AA' , BB' e CC' . \square

Passemos a outro dos Teoremas clássicos da Geometria Projectiva, o *Teorema de Pappus*. A ideia da prova será exactamente a mesma; usamos uma homografia para reduzir o resultado a um resultado afim cuja prova já conhecemos.

Teorema 3.4.8 (Teorema de Pappus). *No plano projectivo real, sejam ℓ e ℓ' duas rectas e $A, B, C \in \ell$ e $A', B', C' \in \ell'$ seis pontos distintos. Sejam X o ponto de intersecção das rectas BC' e $B'C$, Y o ponto de intersecção das rectas AC' e $A'C$ e Z o ponto de intersecção de AB' e $A'B$. Então X, Y e Z estão sobre uma mesma recta.*



Demonstração. Consideramos uma homografia h que envia Y e Z em pontos do infinito Y^* e Z^* . Novamente designando a imagem de qualquer ponto P por P^* , os pontos $A^*, B^*, C^*, A'^*, B'^*$ e C'^* são pontos em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, nas rectas $h(\ell)$ e $h(\ell')$, tais que as rectas $A^*B'^*$ e A'^*B^* são paralelas (pois intersectam-se no ponto Z^* na recta do infinito) e as rectas A'^*C^* e $A^*C'^*$ são paralelas (pois intersectam-se no ponto Y^* na recta do infinito). Logo, pelo Teorema de Pappus afim (Teorema 1.8.7), as rectas $B^*C'^*$ e B'^*C^* são paralelas, e o seu ponto de intersecção Z^* está na recta do infinito. Portanto X^*, Y^* e Z^* estão sobre uma mesma recta (a recta do infinito), pelo que também as suas imagens por h^{-1} estão, e isto demonstra o resultado. \square

A estrutura de recta projectiva num feixe de rectas

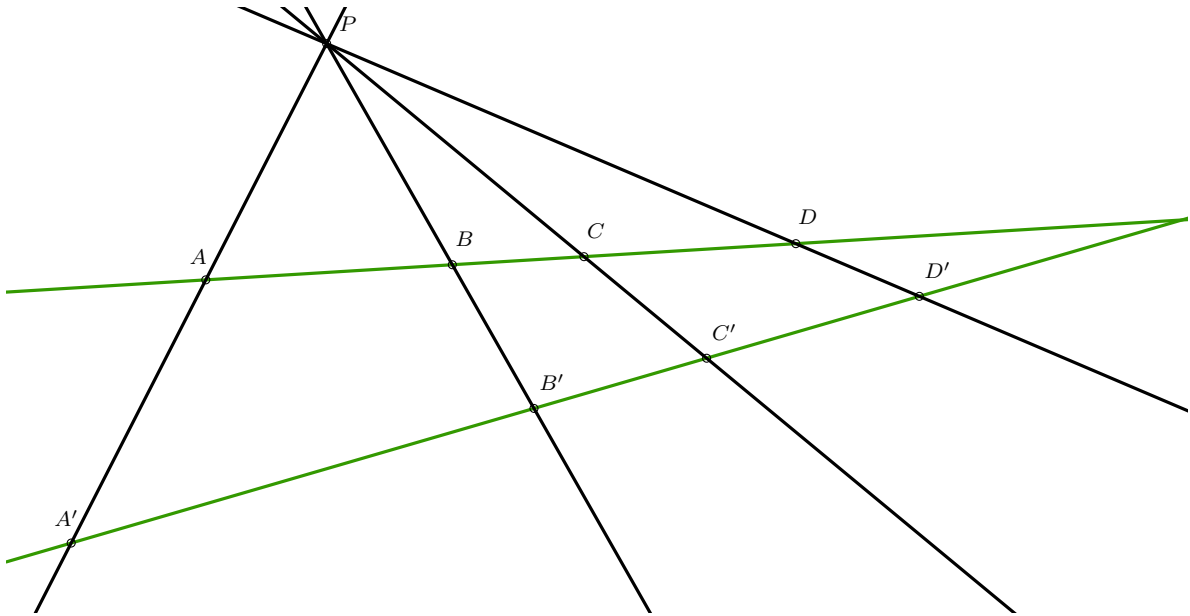
Como próxima aplicação das ferramentas que possuímos, vamos mostrar que, dado qualquer ponto P no plano projectivo, o conjunto das rectas que passam por P é ele próprio, essencialmente, uma cópia de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, no sentido de que admite uma estrutura natural de recta projectiva. O passo fundamental na construção dessa estrutura de recta projectiva é o Lema que se segue, e é na prova dele que usaremos os nossos conhecimentos sobre homografias de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Lema 3.4.9 (Projectões preservam razão dupla). *Sejam ℓ e ℓ' rectas no plano projectivo e seja P um ponto exterior a ambas. Sejam A, B, C e D quatro pontos distintos em ℓ , e sejam A', B', C' e D' as intersecções de PA, PB, PC e PD , respectivamente, com ℓ' . Então*

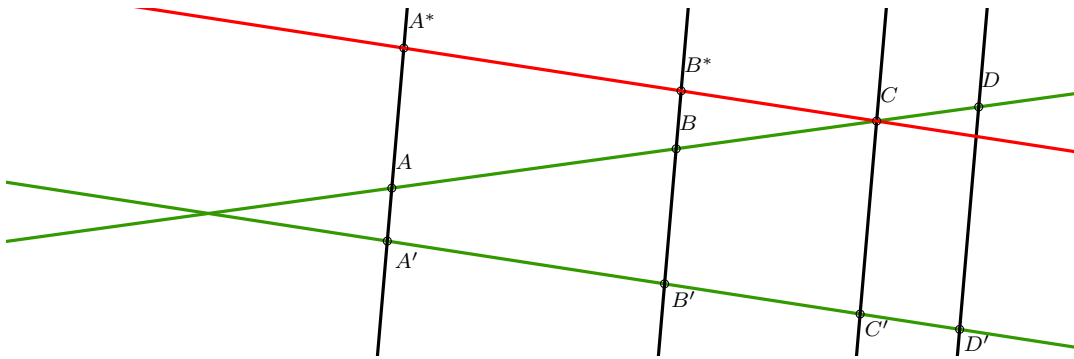
$$[A, B; C, D] = [A', B'; C', D'].$$

Observação 3.4.10. O que este Lema nos diz é que a projectão de ℓ em ℓ' com centro em P preserva a razão dupla, e é portanto uma homografia entre ℓ e ℓ' . A maneira como motivámos

as Transformações de Möbius já é essencialmente uma prova disto, mas vamos dar agora uma prova cuidada.



Demonstração. Usando uma homografia que envia P e outro ponto exterior às rectas AA' , BB' , CC' e DD' em pontos do infinito, reduzimos ao caso em que P é um ponto do infinito e $A, A', B, B', C, C', D, D'$ estão em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Nesse caso as rectas AA' , BB' , CC' e DD' são paralelas (uma vez que no plano projectivo se intersectam no infinito), e queremos provar que $\frac{AC}{CB} / \frac{AD}{DB} = \frac{A'C'}{C'B'} / \frac{A'D'}{D'B'}$. Vamos provar algo mais forte: temos $\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$ e $\frac{AD}{DB} = \frac{A'D'}{D'B'}$.



Basta provar a primeira igualdade; a segunda é análoga. Considere-se a recta paralela a l' que passa por C , e sejam A^* e B^* as intersecções dessa recta com AA' e BB' , respectivamente. Pelo Teorema de Tales (Teorema 1.4.6) tem-se $\frac{AC}{CB} = \frac{A^*C}{CB^*}$.

Por outro lado, $A'C'$ é paralela a A^*C e $A'A^*$ é paralela a $C'C$, logo pela Proposição/Definição 1.9.2 tem-se $\overrightarrow{A^*C} = \overrightarrow{A'C'}$. Analogamente, $\overrightarrow{B^*C} = \overrightarrow{B'C'}$. Portanto $\frac{A^*C}{CB^*} = \frac{A'C'}{C'B'}$. Juntando tudo, obtemos $\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$, e o Lema está provado. \square

Observação 3.4.11 (Estrutura de recta projectiva num feixe de rectas). Uma consequência deste Lema é que, dado um ponto P em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, podemos definir uma estrutura natural de recta projectiva no conjunto das rectas que passam por P , do seguinte modo: começamos por escolher uma recta l que não passe por P . De modo a obter uma correspondência entre o conjunto das rectas que passam por P e $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, fazemos corresponder a cada recta r por P o ponto X de intersecção de r com l , e depois associamos a X um ponto em $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ através de uma das bijecções $l \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ que induzem em l a sua estrutura natural de recta projectiva.

Para termos uma estrutura realmente natural, devemos verificar que esta estrutura de recta projectiva não depende da recta ℓ considerada. Pela Proposição 3.1.14, basta verificar que, se utilizarmos outra recta ℓ' , obtemos a mesma razão dupla de quaisquer quatro rectas distintas passando por P . Mas acabámos de mostrar que a razão dupla das intersecções de quatro rectas por P com ℓ é igual à razão dupla das intersecções das mesmas quatro rectas com ℓ' , o que implica que a noção de razão dupla obtida, e portanto a estrutura de recta projectiva, não depende da recta ℓ considerada.

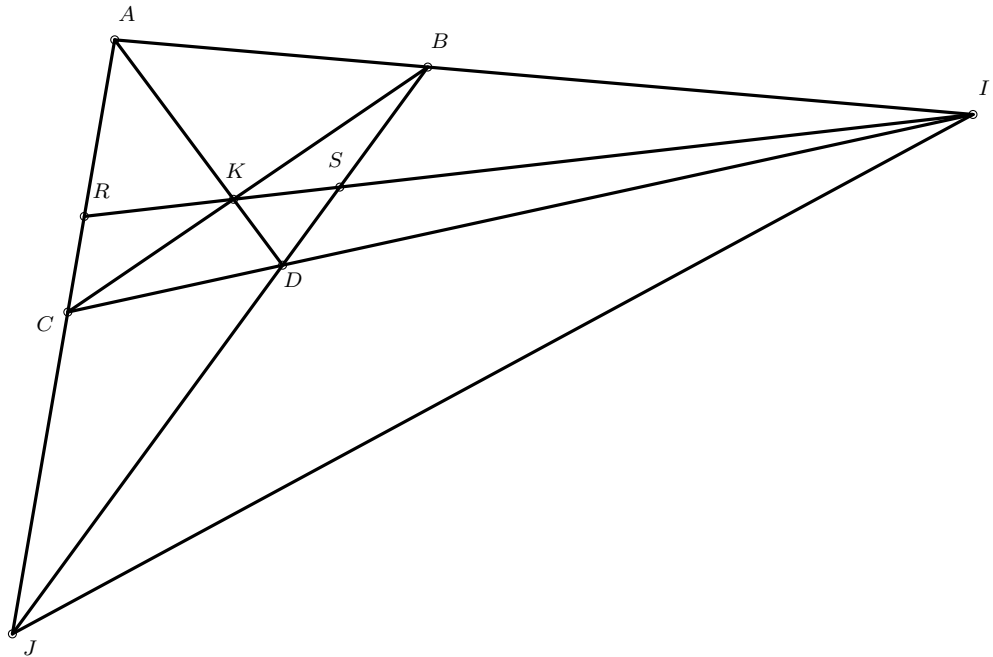
Obtemos assim uma noção de razão dupla $[a, b; c, d]$ de quaisquer quatro rectas distintas concorrentes em P , como sendo igual à razão dupla das suas intersecções com uma recta ℓ qualquer que não passe por P .

Construção do conjugado harmónico

A próxima aplicação que vamos ver é um resultado que nos permite determinar geometricamente o conjugado harmónico de um ponto em relação a um par de pontos.

Lema 3.4.12 (Quartetos harmónicos num quadrângulo completo). *Sejam A, B, C e D quatro pontos no plano projectivo tais que não há três colineares. Sejam $I = AB \cap CD$, $J = AC \cap BD$ e $K = AD \cap BC$. Então*

$$[AB, CD; IK, IJ] = -1.$$



Demonstração. Sejam $R = IK \cap AC$ e $S = IK \cap BD$. A razão dupla que pretendemos calcular é igual a $[A, C; R, J]$. Uma projecção por K da recta AC para a recta BD envia o quarteto (A, C, R, J) no quarteto (D, B, S, J) , logo $[A, C; R, J] = [D, B; S, J]$. Por outro lado, uma projecção por I da recta BD para a recta AC envia o quarteto $[D, B, S, J]$ no quarteto $[C, A; R, J]$, portanto $[D, B; S, J] = [C, A; R, J]$. Por transitividade $[A, C; R, J] = [C, A; R, J]$. Mas como em geral se tem $[P, Q; R, S] = \frac{1}{[Q, P; R, S]}$ (é imediato a partir da Definição 3.1.10) temos $[A, C; R, J] = \frac{1}{[A, C; R, J]}$, pelo que $[A, C; R, J] = \pm 1$. Como a razão cruzada de quatro pontos distintos nunca é igual a 1 (Lema 3.3.1) conclui-se que $[A, C; R, J] = -1$ e $[AB, CD; IK, IJ] = -1$.

Falta apenas um pormenor: não é inteiramente óbvio que as rectas IJ e IK são realmente distintas (e portanto que os pontos R e J são distintos). Para o justificar, note-se que podemos enviar os pontos A, B, C e D nos pontos de coordenadas homogéneas $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(1, 1, 1)$ através de uma homografia, pelo que basta verificar o caso em que A, B, C e D são esses quatro pontos. Nesse caso é um exercício simples verificar que I, J e K admitem coordenadas homogéneas $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$, respectivamente. Como

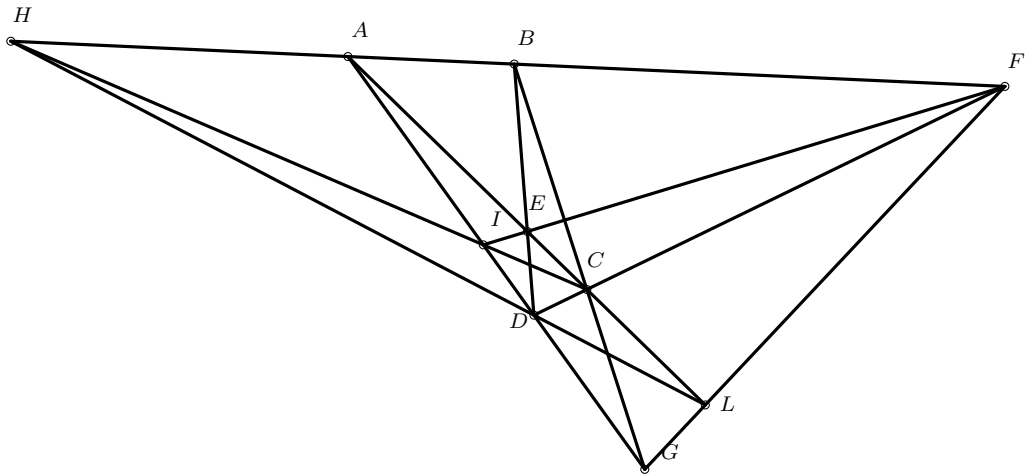
$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

conclui-se que I, J e K não são colineares¹. □

Observação 3.4.13. Isto dá-nos um método para construir o conjugado harmónico de R em relação ao par (A, C) para quaisquer pontos distintos colineares A, C e R . Marca-se um ponto I fora da recta que passa por A, C e R , e um ponto $K \neq I, R$ na recta IR . Intersecta-se AK com IC em D e CK com IA em B . A intersecção de BD com AC é o conjugado harmónico de R .

Para concluir esta secção, vamos ver um exemplo de um resultado geométrico elementar que pode ser provado de (pelo menos) duas maneiras diferentes usando as técnicas que desenvolvemos.²

Exemplo 3.4.14. Sejam A, B, C e D quatro pontos no plano projectivo tais que não há três colineares. Sejam $E = AC \cap BD$, $F = AB \cap CD$ e $G = AD \cap BC$. Seja $L = AC \cap FG$ e seja $I = AD \cap EF$. Então as rectas AB, LD e CI são concorrentes.



Prova usando quartetos harmónicos. Seja $H = CI \cap AB$. Pelo Lema 3.4.12 aplicado aos quatro pontos F, C, A e I , temos

$$[FC, AI; DH, DE] = -1.$$

Intersectando estas quatro rectas com AB , vem que $[F, A; H, B] = -1$. Logo H é o conjugado harmónico de B em relação ao par (A, F) .

¹Isto depende fundamentalmente de estarmos a trabalhar sobre o corpo \mathbb{R} , que tem característica diferente de 2.

²Este exemplo foi sugerido pelo Kevin Pucci.

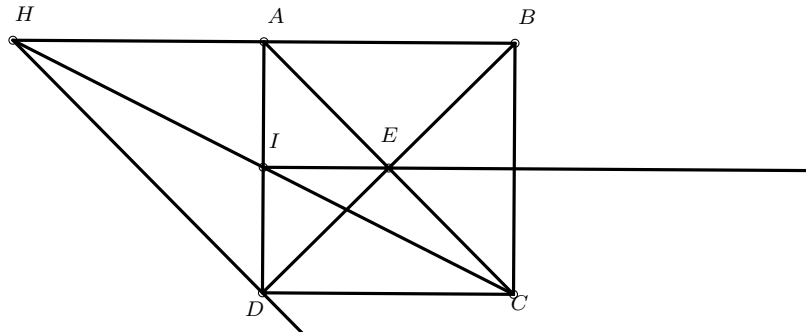
Seja agora $H' = DL \cap AB$. Pelo Lema 3.4.12 aplicado aos quatro pontos F, L, A e D , temos

$$[FL, AD; GH', GC] = -1.$$

Intersectando estas quatro rectas com AB , vem que $[F, A; H', B] = -1$. Logo H' é o conjugado harmónico de B em relação ao par (A, F) .

Logo $H = H'$ e as rectas AB, CI e LD concorrem em H . \square

Prova usando uma homografia. Utilizando uma homografia que envia A, B, C e D nos vértices de um quadrado em $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, vemos que basta provar o resultado no caso em que A, B, C e D são os vértices de um tal quadrado.



Temos então:

- E é o ponto de intersecção das diagonais AC e BD ;
- F é o ponto do infinito nas rectas paralelas AB e CD ;
- G é o ponto do infinito nas rectas paralelas AD e BC ;
- L é o ponto de intersecção da recta AC com a recta FG , mas esta última é a recta do infinito, logo L é o ponto do infinito na recta AC ;
- I é o ponto de intersecção das rectas AD e EF ; esta última é a recta que passa por E e tem o mesmo ponto do infinito que AB e CD , ou seja, é a recta por E paralela a AB e CD , e portanto I é o ponto médio do segmento AD .

Seja $H = CI \cap AB$. Como I é o ponto médio do segmento AD e CD é paralela a HA , pelo Teorema de Tales vem que I é o ponto médio do segmento CH . Logo uma simetria central de centro I envia D em A e C em H . Portanto $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{DC}$, e DH é paralela a AC .

Mas a recta LD é precisamente a recta que passa por D e é paralela a AC , que, pelo que vimos, contém H . Assim, AB, CI e LD concorrem em H . \square

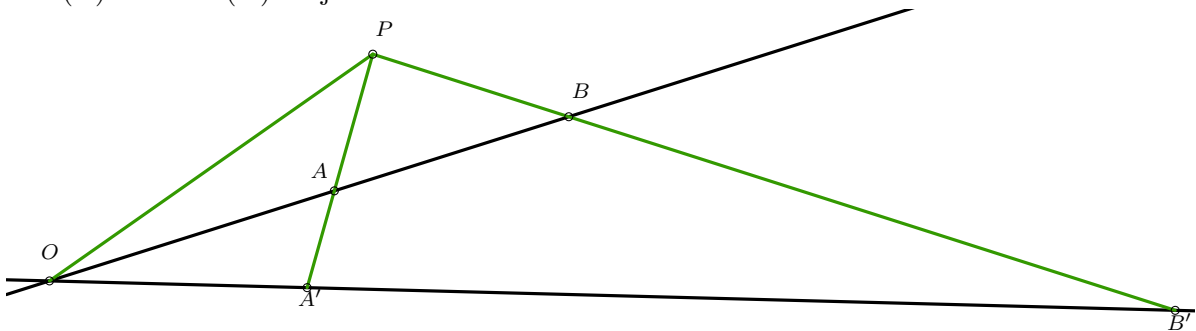
§3.5 Homografias entre rectas em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Já vimos (Lema 3.4.9 e Observação 3.4.10) que, dadas duas rectas ℓ e ℓ' em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, a projecção de ℓ em ℓ' por um ponto exterior é uma homografia entre ℓ e ℓ' . No entanto, nem todas as homografias entre ℓ e ℓ' são projecções. Mais precisamente, temos o seguinte:

Proposição 3.5.1. *Sejam ℓ e ℓ' duas rectas distintas em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, e seja $h : \ell \rightarrow \ell'$ uma homografia. Então h é uma projecção se e só se o ponto de intersecção $\ell \cap \ell'$ é fixo por h .*

Demonstração. Seja $O = \ell \cap \ell'$. É evidente que uma projecção de ℓ em ℓ' por um ponto exterior ℓ envia O em O . Basta assim provar que, se a homografia $h : \ell \rightarrow \ell'$ fixa O , então é uma projecção.

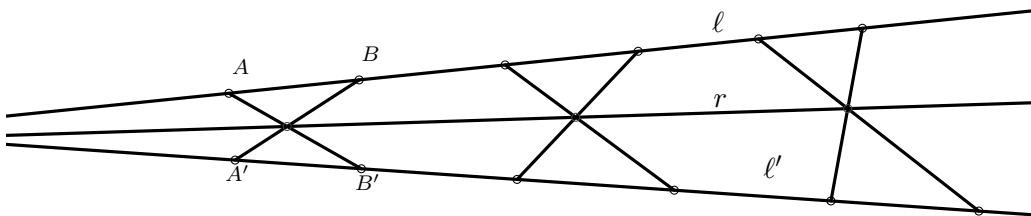
Suponha-se que h fixa O . Sejam A e B dois pontos distintos de ℓ , diferentes de O , e sejam $A' = h(A)$ e $B' = h(B)$. Seja $P = AA' \cap BB'$.



Seja π a projecção de ℓ em ℓ' de centro em P . Então π envia O em O , A em A' e B em B' . Ou seja, π coincide com h nos pontos O , A e B . Como uma homografia entre ℓ e ℓ' é determinada pelas imagens de três pontos distintos, conclui-se que $\pi = h$, e portanto h é uma projecção. \square

As homografias entre ℓ e ℓ' que não são projecções são mais estranhas de descrever geometricamente. No entanto, também possuem propriedades geométricas interessantes, como é o caso da seguinte:

Proposição/Definição 3.5.2 (Eixo de uma homografia). *Sejam ℓ e ℓ' duas rectas distintas em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, e seja $h : \ell \rightarrow \ell'$ uma homografia. Para cada ponto X indicamos a sua imagem por h por X' . Então existe uma recta r tal que, para quaisquer dois pontos distintos $A, B \in \ell$, o ponto de intersecção $AB' \cap A'B$ pertence a r . Essa recta diz-se o *eixo* da homografia h .*

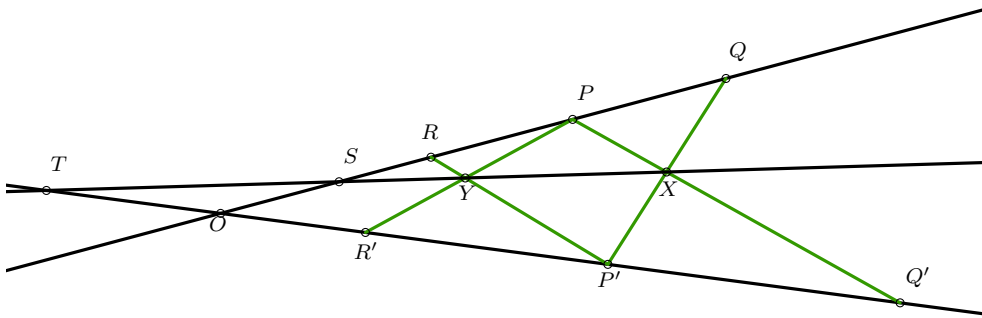


Demonstração. Seja $O = \ell \cap \ell'$, e sejam $S = h^{-1}(O)$ e $T = h(O)$. Considerem-se quaisquer pontos distintos $P, Q, R \in \ell \setminus \{O, S\}$, e as respectivas imagens $P', Q', R' \in \ell'$. Sejam $X = PQ' \cap P'Q$ e $Y = PR' \cap P'R$, e seja r a recta XY .

Considerem-se as projecções $\pi_{P'} : \ell \rightarrow r$ a partir de P' e $\pi_P : r \rightarrow \ell'$ a partir de P . Considere-se a composta

$$f = \pi_P \circ \pi_{P'}.$$

Uma verificação directa mostra que f envia P, Q e R em P', Q' e R' , respectivamente. Portanto $f = h$ (uma vez que f é uma homografia que coincide com h em três pontos distintos).



Observe-se agora que a intersecção $\ell \cap r$ é fixa pela projecção $\pi_{P'}$ e é enviada em O pela projecção π_P . Logo a composta $\pi_P \circ \pi_{P'}$ envia $\ell \cap r$ em O , ou seja h envia $\ell \cap r$ em O . Conclui-se que $\ell \cap r = S$. Por outro lado, a projecção $\pi_{P'}$ envia O em $\ell' \cap r$ e a projecção π_P fixa $\ell' \cap r$, logo a composta h envia O em $\ell' \cap r$. Conclui-se que $\ell' \cap r = T$. Em particular, os pontos S e T pertencem a r .

Agora temos dois casos:

- Se h não fixa O , então os pontos O, S e T são distintos e o argumento anterior mostra que S e T pertencem a r , logo r é a recta ST . Conclui-se que r não depende dos pontos P, Q e R escolhidos, e que para quaisquer pontos $P, Q \in \ell \setminus \{O, S\}$ as rectas PQ' e $P'Q$ intersectam-se sobre a recta ST . Além disso, se um dos pontos P e Q for O , então esse ponto de intersecção é T , e se um dos pontos P e Q for S , então essa intersecção é S , logo nesses casos as rectas PQ' e $P'Q$ também se intersectam sobre ST . Conclui-se que ST é o eixo de h .
- Se h fixa O , então $O = S = T$. Vamos ver que a recta que passa por O e pelo ponto $AB' \cap A'B$ não depende da escolha de $A, B \in \ell$. O argumento anterior mostra que O, X e Y são colineares, o que nos diz que a recta que passa por O e pelo ponto $PQ' \cap P'Q$ é a mesma recta que passa por O e $PR' \cap P'R$. Analogamente, escolhido um quarto ponto $W \in \ell$, a recta que passa por O e $PR' \cap P'R$ é a mesma recta que passa por O e $RW' \cap R'W$. Portanto a recta que passa por O e $PQ' \cap P'Q$ é, por transitividade, a mesma recta que passa por O e $RW' \cap R'W$. Como os pontos P, Q, R e W são arbitrários, conclui-se que a recta que passa por O e pelo ponto $AB' \cap A'B$ não depende da escolha de $A, B \in \ell$, pelo que essa recta comum é o eixo de h .

□

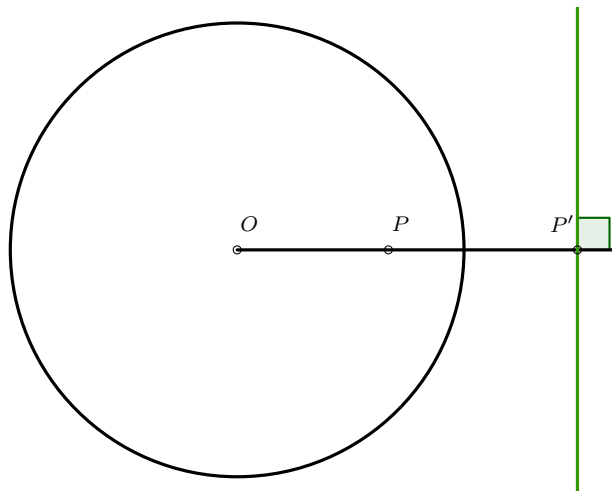
Observação 3.5.3. Este resultado fornece-nos uma prova alternativa do Teorema de Pappus. De facto, se $A, B, C \in \ell$ e $A', B', C' \in \ell'$ são seis pontos distintos, existe uma (única) homografia entre ℓ e ℓ' que envia A em A' , B em B' e C em C' , e os pontos $BC' \cap B'C$, $AC' \cap A'C$ e $AB' \cap A'B$ pertencem ao eixo dessa homografia, sendo portanto colineares.

§3.6 Polaridade em relação a uma circunferência

Nas secções anteriores vimos como as técnicas da Geometria Projectiva podem ser utilizadas para provar resultados geométricos. No entanto, todos os resultados geométricos que provámos usando essas técnicas envolviam apenas rectas. Poder-se-ia pensar que, preservando as homografias pouco mais do que rectas, esse seria o limite da sua aplicabilidade. Mas nesta secção vamos ver como construir, dada uma circunferência \mathcal{C} em \mathbb{R}^2 , uma família de homografias de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ que deixam \mathcal{C} invariante, estendendo assim o poder das homografias para provar alguns resultados envolvendo circunferências. Pelo caminho, vamos ver ligações interessantes entre o material deste capítulo e o material do capítulo anterior.

O conceito chave é o seguinte:

Definição 3.6.1. Seja \mathcal{C} uma circunferência de centro O no plano Euclidiano (visto como subconjunto do plano projectivo) e seja $P \neq O$ um ponto em \mathbb{R}^2 . A *polar* de P em relação a \mathcal{C} é a recta que passa pelo inverso P' de P e é perpendicular a OP .

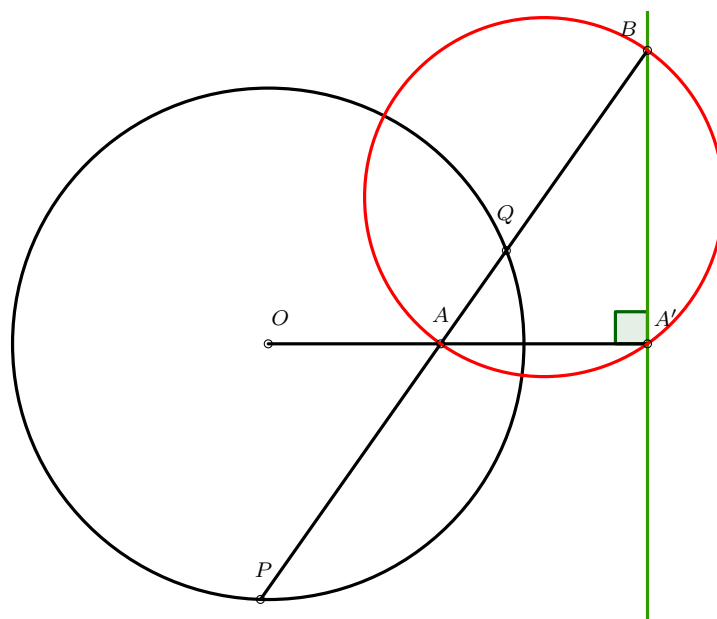


Observação 3.6.2. Se P é um ponto interior do círculo delimitado por \mathcal{C} , a polar de P em relação a \mathcal{C} é disjunta de \mathcal{C} ; se P está no exterior desse círculo, a polar de P é secante a \mathcal{C} ; e se $P \in \mathcal{C}$, então a polar de P é a recta tangente a \mathcal{C} em P .

A ligação entre o conceito de polar e a Geometria Projectiva faz-se essencialmente através do seguinte Lema.

Lema 3.6.3. *Sejam \mathcal{C} uma circunferência em \mathbb{R}^2 e A e B pontos não pertencentes a \mathcal{C} e diferentes do centro de \mathcal{C} . Suponha-se que a recta AB intersecta \mathcal{C} nos pontos P e Q . Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) B pertence à polar de A em relação a \mathcal{C} ;
- (ii) $[P, Q; A, B] = -1$. (Ou seja, A e B são conjugados harmónicos em relação ao par (P, Q) , ou equivalentemente P e Q são conjugados harmónicos em relação ao par (A, B) .)



Demonstração. Vamos provar as duas implicações em separado.

- (i) \Rightarrow (ii): Seja O o centro de \mathcal{C} , e seja A' o inverso de A em relação a \mathcal{C} . Se B é o ponto do infinito na polar de A , então PQ é paralela a essa polar (pois nesse caso PQ intersecta a polar de A num ponto do infinito). Assim, PQ é perpendicular a OA . Isso implica que A é o ponto médio do segmento PQ , pois, pelo Teorema de Pitágoras nos triângulos rectângulos OAP e OAQ , tem-se

$$|AP|^2 = |OP|^2 - |OA|^2 = |OQ|^2 - |OA|^2 = |AQ|^2.$$

Portanto, pelo Exemplo 3.3.5(ii), o conjugado harmónico de A em relação ao par (P, Q) é o ponto do infinito na recta PQ , que é B , e obtém-se o pretendido.

Suponha-se agora que B pertence a \mathbb{R}^2 . Seja \mathcal{D} a circunferência de diâmetro AB . Como as rectas AA' e $A'B$ são perpendiculares, $A' \in \mathcal{D}$. Mas então A e A' são pontos em \mathcal{D} inversos um do outro em relação a \mathcal{C} , o que implica pela Proposição 2.4.16 que $\mathcal{C} \perp \mathcal{D}$. A mesma Proposição 2.4.16 implica então que \mathcal{C} é invariante por inversão em \mathcal{D} . Assim, como a recta que une os pontos $P, Q \in \mathcal{C}$ passa pelo centro de \mathcal{D} (uma vez que este é o ponto médio do segmento AB), os pontos P e Q são inversos em relação a \mathcal{D} . Pelo Exemplo 3.3.5(iii) P e Q são conjugados harmónicos em relação ao par (A, B) , provando o pretendido.

- (ii) \Rightarrow (i): Suponha-se que $[P, Q; A, B] = -1$, e seja B^* a intersecção da recta PQ com a polar de A . Pela implicação já demonstrada B^* é o conjugado harmónico de A em relação ao segmento (P, Q) . Pela unicidade do conjugado harmónico tem-se $B^* = B$, e portanto B pertence à polar de A .

□

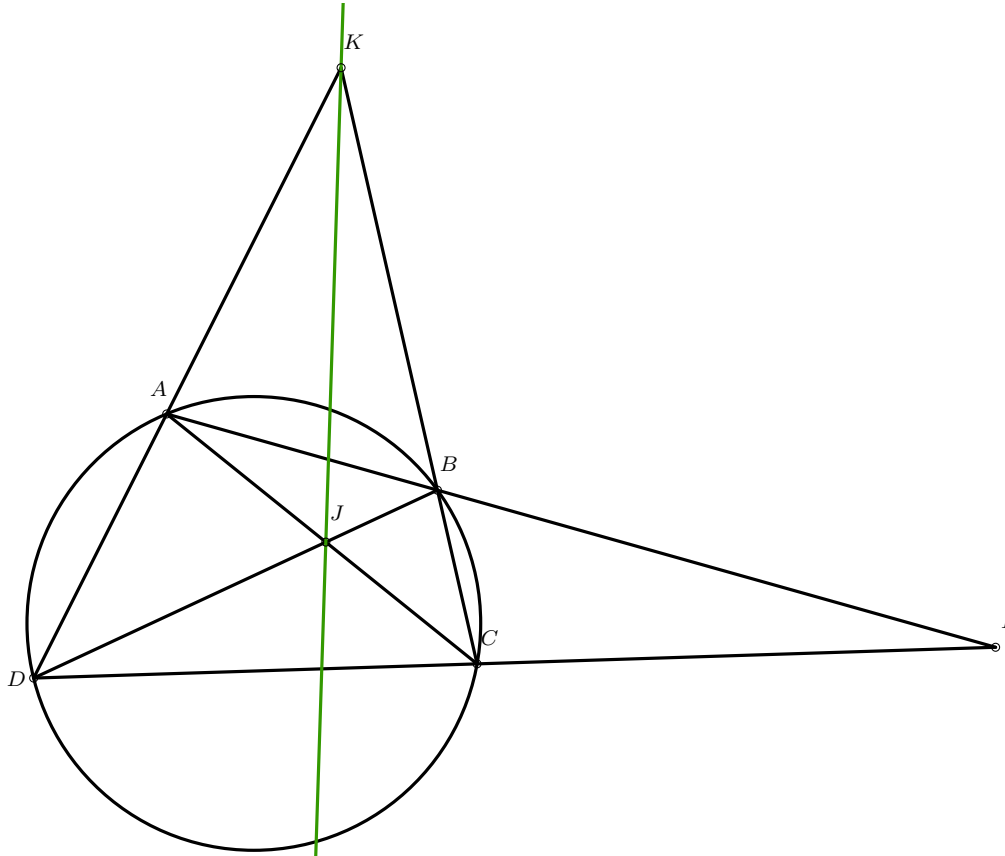
Observação 3.6.4. Este resultado dá-nos um método para construir a polar de um ponto em relação a uma circunferência utilizando apenas uma régua não graduada. Seja I um ponto do qual queremos determinar a polar em relação à circunferência \mathcal{C} . Tomam-se duas rectas por I ,

uma intersectando \mathcal{C} em A e B e outra intersectando \mathcal{C} em C e D . Intersectam-se as rectas AC e BD em J e as rectas AD e BC em K . Então a recta JK é a polar de I .

Para justificar isto, observe-se que, pelo Lema 3.4.12, temos

$$[AD, BC; KI, KJ] = -1.$$

Se $T = JK \cap AB$ e $S = JK \cap CD$, então estas quatro rectas cortam AB nos pontos A, B, I, T e cortam CD nos pontos D, C, I, S . Portanto os quartetos (A, B, I, T) e (C, D, I, S) são harmónicos. Como T é o conjugado harmónico de I em relação ao par (A, B) , conclui-se do Lema 3.6.3 que T pertence à polar de I . Analogamente, S pertence à polar de I . Logo a polar de I é a recta ST , ou seja, a recta JK .



Utilizando este método, se adicionalmente conhecermos o centro O de \mathcal{C} , podemos determinar usando apenas régua não graduada o inverso de I ; basta intersectar OI com a polar de I , que acabamos de ver que conseguimos construir.

No entanto, não é possível determinar usando apenas régua não graduada o centro O de \mathcal{C} . Essa impossibilidade baseia-se no seguinte:

Dado qualquer ponto Q no interior do círculo delimitado por \mathcal{C} , existe uma homografia de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ que deixa \mathcal{C} invariante e envia O em Q .

A nossa próxima tarefa será construir homografias com essa propriedade.

Perspectivas

Definição 3.6.5. Sejam C um ponto e r uma recta em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ que não passa por C . Uma homografia h de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ diz-se uma *perspectiva de centro C e eixo r* se h não é a identidade mas

fixa C e todos os pontos da recta r .

Curiosamente, podemos descrever de maneira elegante todas as perspectivas de centro C e eixo r . O próximo Lema dá-nos essencialmente uma das direcções dessa descrição.

Lema 3.6.6. *Seja h uma perspectiva de centro C e eixo r . Dado um ponto $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ diferente de C e exterior a r , a sua imagem P' pertence à recta CP , e além disso, sendo $Q = CP \cap r$, a razão dupla*

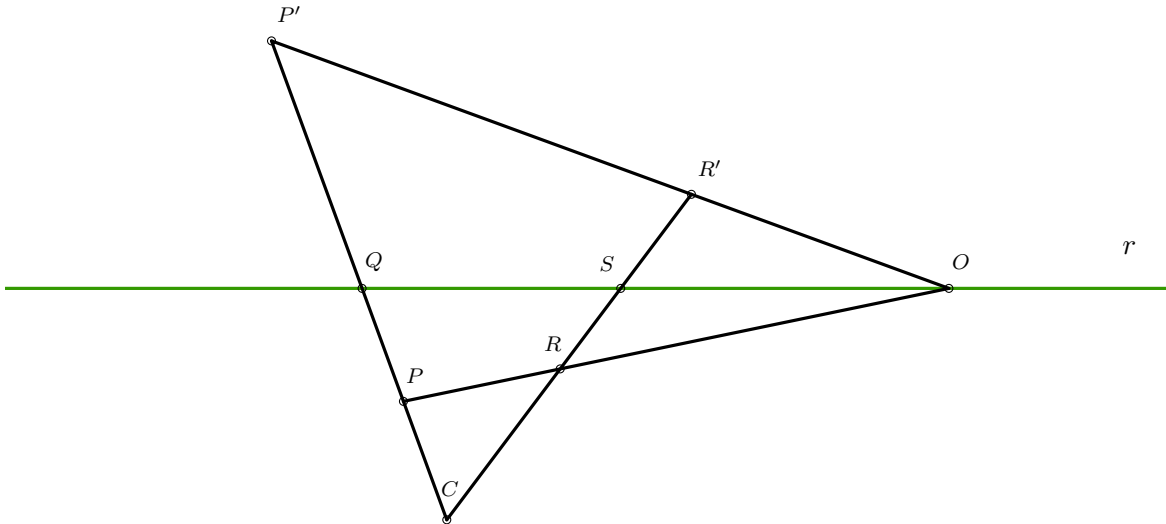
$$[C, Q; P, P']$$

não depende de P .

Demonstração. Como $Q \in r$, Q é fixo por h . Considere-se a recta que contém C e Q ; a sua imagem por h contém as imagens de C e Q , que são C e Q , logo a imagem de CQ é a própria CQ . Como $P \in CQ$, a imagem P' também está em CQ , ou seja, está em CP .

Vamos agora provar que a razão dupla $[C, Q; P, P']$ não depende de P . Consideramos um segundo ponto R , diferente de C e exterior a r , e seja S a intersecção de CR com r . Já sabemos que a imagem R' pertence à recta CS , e queremos provar que

$$[C, Q; P, P'] = [C, S; R, R'].$$



Seja $O = PR \cap r$. Como $O \in r$, O é fixo por h . Portanto a imagem da recta PR por h tem que conter O . Ou seja, P' , R' e O são colineares. Portanto uma projecção por O envia o quarteto (C, Q, P, P') em (C, S, R, R') , implicando a igualdade de razões duplas pretendida³. \square

O Lema anterior diz-nos que qualquer perspectiva de centro C e eixo r é obtida do seguinte modo: envia-se C e todos os pontos de r em si próprios; fixa-se um número real $\alpha \neq 0, 1$ e, para cada ponto $P \neq C$ exterior a r , envia-se P no único ponto P' na recta CP tal que, sendo $Q = CP \cap r$, se tem

$$[C, Q; P, P'] = \alpha.$$

³Para sermos precisos, este argumento não funciona se P e R forem escolhidos na mesma recta por C , caso em que a projecção que finalizou a prova não está bem definida pois o centro da projecção, O , pertence às rectas entre as quais se está a projectar. Mas nesse caso podemos tomar ainda um terceiro ponto T , não colinear com P e C nem com R e C , e definir $U = CT \cap r$; sendo T' a imagem de T , o argumento anterior mostra que $[C, Q; P, P'] = [C, U; T, T']$ e $[C, S; R, R'] = [C, U; T, T']$, de onde a igualdade pretendida decorre por transitividade

No entanto, ainda nada nos garante que a aplicação resultante deste processo é sempre uma homografia (e portanto uma perspectiva). É isso que o próximo Lema afirma.

Lema 3.6.7. *Seja $\alpha \neq 0, 1$ um real, e sejam $C \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ um ponto e $r \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ uma recta tais que C não pertence a r . Seja $h : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ a aplicação que fixa C e todos os pontos de r e envia um ponto $P \neq C$ exterior a r no ponto P' tal que, sendo $Q = CP \cap r$, se tem*

$$[C, Q; P, P'] = \alpha.$$

Então h é uma homografia (e portanto uma perspectiva de centro C e eixo r).

Demonstração. Sejam A e B quaisquer dois pontos distintos em r . Seja $X \neq C$ um ponto exterior a r e às rectas CA e CB , e seja X' o ponto em CX tal que, sendo $Y = CX \cap r$, se tem $[C, Y; X, X'] = \alpha$. Seja f a única homografia de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tal que

$$f(A) = A, \quad f(B) = B, \quad f(C) = C, \quad f(X) = X'.$$

Como f fixa A e B , tem-se $f(r) = r$. Isso implica $f(Y) \in r$. Por outro lado, a imagem da recta CX por r é a recta CX' , que é também a recta CX . Como $Y \in CX$, a imagem $f(Y)$ pertence a CX ; logo $f(Y) = CX \cap r$, ou seja $f(Y) = Y$.

Mas então $f|_r$ é uma homografia da recta r que fixa os três pontos distintos A , B e Y , e portanto é a identidade em r . Conclui-se que f fixa todos os pontos de r . Como f fixa C por construção, conclui-se que f é uma perspectiva de centro C e eixo r .

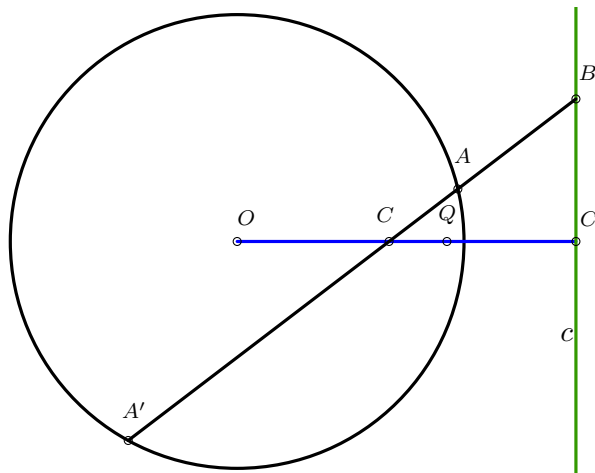
Portanto, pelo Lema 3.6.6, para qualquer ponto P diferente de C e exterior a r tem-se $f(P) \in CP$ e, sendo $Q' = CP \cap r$,

$$[C, Q; P, f(P)] = [C, Y; X, X'] = \alpha = [C, Q; P, h(P)].$$

Segue que $f = h$, e resulta que h é uma homografia (e uma perspectiva de centro C e eixo r). \square

Com isto, estamos prontos para apresentar um resultado que nos permite utilizar homografias de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ para provar resultados geométricos envolvendo circunferências.

Lema 3.6.8. *Seja \mathcal{C} uma circunferência em \mathbb{R}^2 de centro O , e seja Q um ponto no interior do círculo delimitado por \mathcal{C} . Então existe uma homografia h de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tal que $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ e além disso $h(O) = Q$ e $h(Q) = O$.*



Demonstração. A ideia é escolher um ponto C na recta OQ , com polar c , no interior do círculo delimitado por \mathcal{C} e considerar a perspectiva h de centro C e eixo c que envia cada ponto $A \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus (c \cup \{C\})$ no ponto $A' \in CA$ tal que, sendo $B = CA \cap c$, se tem

$$[C, B; A, A'] = -1$$

ou seja, no conjugado harmónico de A em relação ao par (B, C) .

De facto, sabemos pelo Lema 3.6.7 que, para qualquer escolha de C fora de \mathcal{C} , existe uma perspectiva com essa propriedade. Além disso, para qualquer ponto $A \in \mathcal{C}$, sendo $B = CA \cap c$, sabemos pelo Lema 3.6.3 que, sendo A^* a segunda intersecção de CA com \mathcal{C} , se tem

$$[C, B; A, A^*] = -1$$

e portanto a imagem de A, A' , é igual a A^* (ver figura anterior). Conclui-se que h envia pontos de \mathcal{C} em pontos de \mathcal{C} , i.e., deixa \mathcal{C} invariante.

Além disso, h envia Q no seu conjugado harmónico em relação ao par (C, C') , sendo C' o inverso de C , e envia O no seu conjugado harmónico em relação ao par (C, C') . Basta assim provar que podemos escolher C de modo que

$$[O, Q; C, C'] = -1,$$

o que implicará que h troque O e C .

Para isso, consideramos distâncias orientadas a O na recta OQ ; seja d a distância orientada de Q a O , que podemos supor que é positiva. Sendo x a distância orientada de C a O , a distância orientada de C' a O será $\frac{r^2}{x}$, sendo r o raio de \mathcal{C} , e a razão dupla $[O, Q; C, C']$ escreve-se como

$$\frac{OC}{CQ} \cdot \frac{C'Q}{OC'} = \frac{x}{d-x} \cdot \frac{d - \frac{r^2}{x}}{\frac{r^2}{x}}$$

portanto queremos provar que existe x tal que a expressão anterior é igual a -1 . A expressão anterior ser igual a -1 equivale a ter-se

$$dx + d\frac{r^2}{x} = 2r^2 \text{ ou, multiplicando por } x, \text{ a } dx^2 - 2r^2x + dr^2 = 0.$$

Obtivemos uma equação quadrática cujo discriminante é

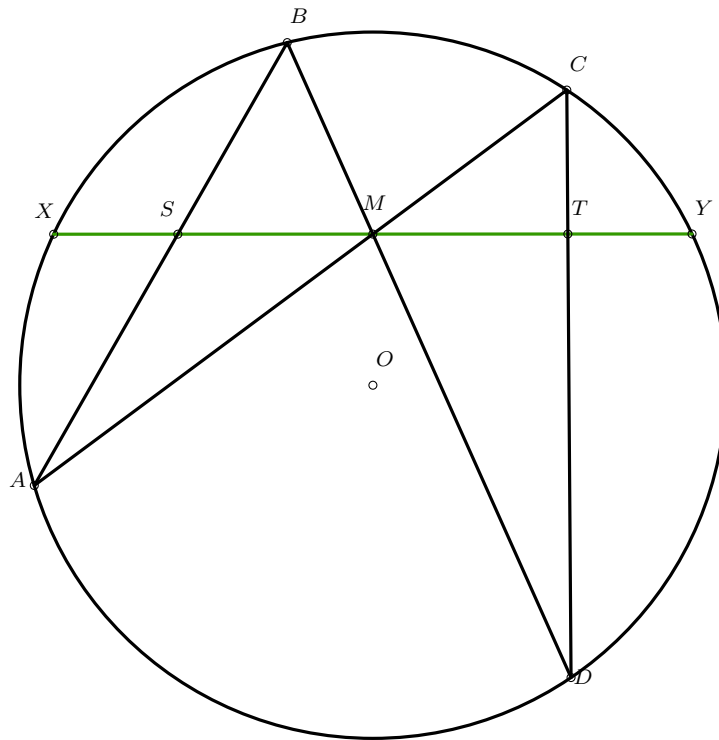
$$4r^4 - 4d^2r^2 = 4r^2(r^2 - d^2) > 0$$

uma vez que $d < r$, já que Q pertence ao interior do círculo delimitado por \mathcal{C} . Portanto a equação anterior tem duas soluções distintas. Além disso, pelas fórmulas de Viète, o produto dessas soluções é igual a $\frac{dr^2}{d} = r^2$, e portanto uma das soluções, em valor absoluto, tem que ser inferior a r . Podemos assim escolher C na recta OQ e no interior do círculo delimitado por \mathcal{C} de tal maneira que $[O, Q; C, C'] = -1$, e o resultado está demonstrado. \square

Aplicação: o Lema da Borboleta

Vamos ver agora um exemplo de aplicação destas perspectivas. Trata-se de um resultado geométrico elementar, conhecido vulgarmente como o *Lema da Borboleta*.

Lema 3.6.9 (Lema da Borboleta). *Sejam X e Y pontos numa circunferência \mathcal{C} no plano Euclídiano, e seja M o ponto médio do segmento XY . Sejam A, B, C e D pontos em \mathcal{C} tais que as rectas AC e BD se intersectam em M . Seja S o ponto de intersecção de AB e XY e seja T o ponto de intersecção de CD e XY . Então M é o ponto médio do segmento ST .*



Demonstração. Consideramos uma homografia h que deixa C invariante e envia M no centro O da circunferência. Para cada ponto P denotamos a sua imagem por P' . Então $A'C'$ e $B'D'$ contêm O , logo são diâmetros de C e o quadrilátero $A'B'C'D'$ é um retângulo.

A condição de M ser o ponto médio de XY , bem como o facto de querermos provar que M é o ponto médio de um segmento, pode parecer um obstáculo, uma vez que homografias em geral não preservam pontos médios. Mas neste caso isso não vai ser um problema; sendo N o ponto do infinito na recta XY , a condição de M ser o ponto médio de XY diz-nos que $[X, Y; M, N] = -1$, e portanto $[X', Y'; M', N'] = -1$, ou seja, $[X', Y'; O, N'] = -1$. Mas O é o ponto médio do segmento $X'Y'$, portanto N' é o ponto do infinito na recta $X'Y'$. Queremos provar que $[S, T; M, N] = -1$, que equivale a ter-se $[S', T'; O, N'] = -1$, e como N' é um ponto do infinito, queremos provar que O é o ponto médio do segmento $S'T'$.

Mas isto é simples; uma simetria central de centro O envia A' em C' e B' em D' , logo envia a recta $A'B'$ na recta $C'D'$. A imagem de S' por essa simetria central está na recta $S'O$ e também está em $C'D'$, uma vez que S' está em $A'B'$, logo essa imagem é T' . Portanto, O é o ponto médio do segmento $S'T'$, e o resultado está provado. \square

§3.7 O Teorema Fundamental da Geometria Projectiva

Na secção 1.9 vimos que todas as bijecções de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ que preservam colinearidade de pontos são transformações afins, e em particular preservam razões da forma $\frac{AC}{CB}$ com A , B e C pontos colineares. Neste capítulo vamos provar o resultado projectivo análogo, cujo enunciado deve ser fácil de adivinhar neste momento: todas as bijecções de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ que preservam colinearidade de pontos são homografias. Em particular, se “permutarmos” os pontos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ enviando rectas em rectas, temos que manter as razões duplas de quartetos de pontos numa recta.

Um resultado mais geral do que este, que essencialmente responde à mesma questão (de quais são as bijecções que preservam rectas) para os espaços projectivos mais gerais da forma $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$ um inteiro e \mathbb{K} um corpo arbitrário, é conhecido como o *Teorema Fundamental da Geometria Projectiva*. Como neste texto apenas definimos esses espaços para $n = 2$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, aqui só vamos provar o Teorema nesse caso particular; mas, em todo o caso, a abordagem ao caso geral é semelhante. Por conveniência, chamamos também a este caso particular o Teorema Fundamental da Geometria Projectiva.

Teorema 3.7.1 (Teorema Fundamental da Geometria Projectiva). *Seja $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ uma aplicação bijectiva que envia quaisquer três pontos colineares em três pontos também colineares. Então f é uma homografia de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.*

Tendo em conta a prova longa e complicada do Teorema 1.9.1, a versão afim deste resultado, poder-se-ia pensar que nos aguarda um trabalho igualmente duro para demonstrar este. Mas, na verdade, ao provar o Teorema 1.9.1 já fizemos essencialmente o trabalho todo. A ideia da prova do Teorema 3.7.1 é muito simples: consideramos a recta r que é a imagem da recta do infinito por f , e escolhemos uma homografia h que envia a recta r na recta do infinito. A composta $h \circ f$ é então uma aplicação bijectiva que envia pontos colineares em pontos colineares e envia pontos do infinito em pontos do infinito. Os pontos finitos são, então, enviados em pontos finitos e a restrição de $h \circ f$ a $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ é uma bijecção de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ que envia pontos colineares em pontos colineares, logo é uma transformação afim, e em particular induz uma homografia de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. A composta $f = h^{-1} \circ (h \circ f)$ é então também uma homografia, provando o resultado.

Há alguns pormenores desta ideia que precisam de algum cuidado para funcionar, e vamos tratar desses detalhes de seguida. Começamos com uma definição útil e alguns lemas preliminares.

Definição 3.7.2. Uma *colineação* de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ é uma bijecção $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ que envia quaisquer três pontos colineares em três pontos também colineares.

Proposição 3.7.3. *Seja f uma colineação de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, e sejam A , B e C três pontos não colineares em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Então as imagens $f(A)$, $f(B)$ e $f(C)$ também não são colineares.*

Demonstração. Suponha-se, por redução ao absurdo, que as imagens $f(A)$, $f(B)$ e $f(C)$ estão sobre uma mesma recta r . Vamos provar que para qualquer ponto P se tem $f(P) \in r$, o que claramente resulta numa contradição com a sobrejectividade de f .

Seja P um ponto qualquer diferente de A , B e C . Seja $Q = AP \cap BC$. Como B , C e Q são colineares, $f(B)$, $f(Q)$ e $f(C)$ também são, logo $f(Q)$ é um ponto de r (diferente de $f(A)$, visto que $Q \neq A$). Como A , Q e P são colineares, $f(A)$, $f(Q)$ e $f(P)$ também são, logo, como $f(A)$ e $f(Q)$ são dois pontos diferentes de r , conclui-se que $f(P) \in r$. Como P é arbitrário, conclui-se que $f(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \subseteq r$, o que contradiz a sobrejectividade de f . \square

Corolário 3.7.4. *Seja f uma colineação de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Então, para toda a recta $r \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, a imagem $f(r)$ também é uma recta.*

Demonstração. Sejam A e B dois pontos distintos em r , e seja s a recta que passa por $f(A)$ e $f(B)$. Para qualquer ponto $X \in r$, os pontos A , B e X são colineares e portanto $f(A)$, $f(B)$ e $f(X)$ também são, pelo que $f(X) \in s$. Conclui-se que $f(r) \subseteq s$.

Seja agora Y um ponto arbitrário em s ; queremos mostrar que existe um ponto $X \in r$ tal que $f(X) = Y$. Supondo por absurdo que não existe um tal X , pela sobrejectividade de f existe X fora da recta r tal que $f(X) = Y$. Mas então A , B e X não são colineares e $f(A)$, $f(B)$ e $f(X)$ são, o que contradiz a Proposição 3.7.3. Portanto $f(r) = s$, e em particular $f(r)$ é uma recta. \square

Com estes preparativos, estamos prontos para passar à prova do Teorema 3.7.1.

Demonstração. Seja f uma colineação de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Seja $r_\infty \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ a recta do infinito, e seja $s = f(r_\infty)$. Pelo Corolário 3.7.4, s é uma recta. Seja h uma homografia que envia s na recta do infinito⁴. Seja ainda

$$F = h \circ f.$$

Então F é uma colineação que satisfaz $F(r_\infty) = r_\infty$. Logo F deixa $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ invariante. De facto, se P é um ponto de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tal que $F(P) \in r_\infty$, então existe $X \in r_\infty$ tal que $F(X) = F(P)$ (pois $F(P) \in F(r_\infty)$) e portanto $X = P$ pela injectividade de F . Mas isto é absurdo porque X é um ponto do infinito e P não é.

Logo, a restrição

$$F|_{\mathbb{A}^2(\mathbb{R})}$$

é uma bijecção de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ que envia quaisquer três pontos colineares em três pontos também colineares. Portanto, pelo Teorema Fundamental da Geometria Afim (Teorema 1.9.1), $F|_{\mathbb{A}^2(\mathbb{R})}$ é uma transformação afim. Seja F^* a homografia de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ que estende F . Afirmamos que $F^* = F$.

De facto, é imediato que F^* e F coincidem em todos os pontos de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Resta então provar que coincidem nos pontos do infinito. Ora qualquer ponto do infinito P se pode escrever como $P = AB \cap CD$ onde A , B , C e D são pontos distintos em \mathbb{R}^2 e as rectas AB e CD são distintas. Nessas condições, $F(P)$ pertence às rectas $F(A)F(B)$ e $F(C)F(D)$ e $F^*(P)$ pertence às rectas $F^*(A)F^*(B)$ e $F^*(C)F^*(D)$. Como F e F^* coincidem em A , B , C e D , tem-se que $F(A)F(B) = F^*(A)F^*(B)$ e $F(C)F(D) = F^*(C)F^*(D)$. Logo, as intersecções $F(A)F(B) \cap F(C)F(D)$ e $F^*(A)F^*(B) \cap F^*(C)F^*(D)$ coincidem, ou seja, $F(P) = F^*(P)$. Conclui-se que $F = F^*$ e portanto F é uma homografia.

Como por construção $f = h^{-1} \circ F$, resulta que f é a composta de duas homografias, e portanto também é uma homografia, como pretendido. \square

⁴Para justificar que existe uma homografia com essa propriedade, considerem-se dois pontos distintos $A, B \in r$ e dois pontos distintos $C, D \in r_\infty$, e considere-se uma homografia h tal que $h(A) = C$ e $h(B) = D$, que existe uma vez que temos liberdade para escolher as imagens de até quatro pontos em posição geral.

§3.8 Exercícios e Problemas

3.1. Sejam r e s rectas distintas em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Mostre que toda a homografia $r \rightarrow s$ é a composta de não mais do que duas projecções, e que toda a homografia $r \rightarrow r$ é a composta de não mais do que três projecções.

3.2. (a) Mostre que qualquer homografia $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tem pelo menos um ponto fixo e uma recta invariante.

(b) Identifique tais elementos no caso em que a restrição de f a \mathbb{R}^2 é:

- (i) uma translacção;
- (ii) uma rotação de ângulo $\theta \neq k\pi$;
- (iii) uma homotetia.

3.3. Seja r uma recta em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e seja C um ponto em r . Uma homografia de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, diferente da identidade, que fixe cada ponto de r e deixe invariante cada recta que passe por C diz-se uma *perspectiva de centro C e eixo r* .

(a) Mostre que uma tal aplicação não fixa nenhum ponto exterior ao eixo r .

(b) Sejam P e P' dois pontos distintos, exteriores a r e colineares com C . Mostre que existe uma e uma só perspectiva f de centro C e eixo r que envia P em P' . (*Sugestão:* Fixe dois pontos $A, B \in r \setminus \{C\}$ e defina $Q = BP \cap AP'$, $Q' = BP' \cap CQ$ e $P'' = CP \cap AQ'$. Mostre que f é a única homografia que envia P, P', A, B em P', P'', A, B).

3.4. Suponha que $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ é uma homografia diferente da identidade, mas fixa todos os pontos da recta r e não fixa nenhum ponto exterior a r . Mostre que f é uma perspectiva com centro num ponto C de r .

3.5. Seja f uma homografia de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, e sejam A, B, C, X, Y e Z seis pontos distintos em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tais que X pertence à recta BC , Y pertence à recta AC e Z pertence à recta AB . Suponha que as imagens A', B', C', X', Y' e Z' por f destes seis pontos estão em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Mostre que

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{B'X'}{X'C'} \cdot \frac{C'Y'}{Y'A'} \cdot \frac{A'Z'}{Z'B'}.$$

3.6. Sejam ℓ_1 e ℓ_2 rectas distintas em \mathbb{R}^2 que se intersectam num ponto P . Seja m_1 a bissetriz de um dos ângulos formados por ℓ_1 e ℓ_2 , e seja $Q \neq P$ um ponto em m_1 . Seja $f : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ a projecção de centro em Q . Mostre que o eixo da homografia f é a bissetriz do outro ângulo formado por ℓ_1 e ℓ_2 .

3.7. Seja $ABCD$ um quadrilátero no plano Euclidiano, tal que as diagonais AC e BD concorrem num ponto E . Uma recta que passa por E intersecta AB, BC, CD e DA em P, Q, R e S , respectivamente. Mostre que E é o ponto médio de PR se e só se E é o ponto médio de QS .

3.8. Seja ABC um triângulo e sejam $X \in BC, Y \in AC$ e $Z \in AB$ três pontos distintos e colineares. Sejam X' e Y' os conjugados harmónicos de X e Y em relação aos pares (B, C) e (A, C) , respectivamente. Mostre que X', Y' e Z são colineares.

3.9. Sejam r_1 e r_2 duas rectas distintas no plano projectivo, e seja P um ponto no mesmo plano que não pertence a nenhuma dessas rectas. Uma recta variável ℓ que passa por P intersecta r_1 em A e r_2 em B . Seja Q o conjugado harmónico de P em relação ao par (A, B) .

- (a) Mostre que o lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos é uma recta.
- (b) Seja m a recta da alínea anterior. Sejam ℓ_1 e ℓ_2 duas rectas por P , e sejam $A = \ell_1 \cap r_1$, $B = \ell_2 \cap r_2$, $A' = \ell_1 \cap r_2$ e $B' = \ell_2 \cap r_1$. Mostre que as rectas AB' e $A'B$ concorrem sobre m .

3.10. Dado um pentágono no plano Euclidiano com uma circunferência inscrita (i.e., tangente aos lados), uma *Georgoniana* é uma recta que une um vértice do pentágono ao ponto de tangência da circunferência inscrita no lado oposto.

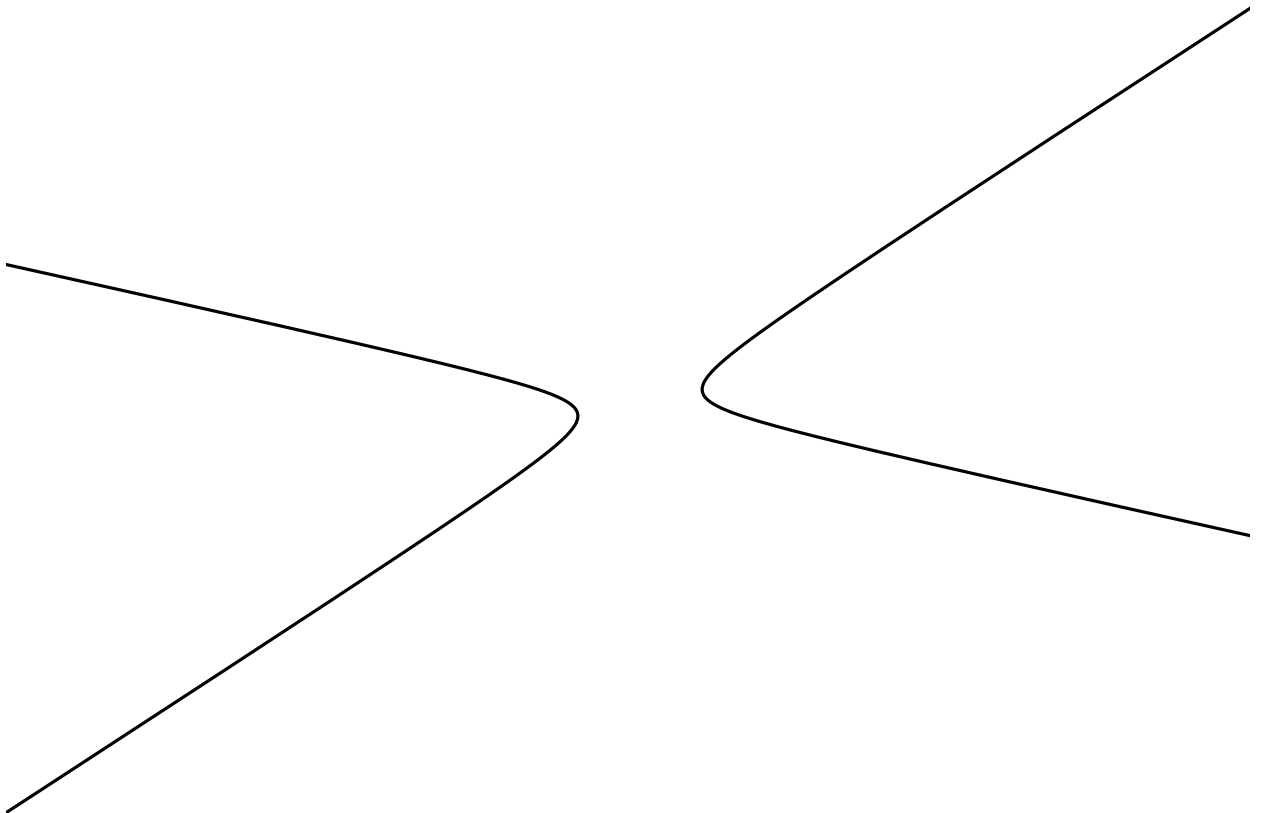
- (a) Mostre que, se quatro Georgonianas são concorrentes, então as cinco Georgonianas são concorrentes.
- (b) Mostre que, se há três Georgonianas concorrentes, então há outras três Georgonianas concorrentes.

4 Cónicas no plano Euclidiano

Em termos informais, cónicas são “as curvas mais simples a seguir às rectas”; assim como uma recta no plano pode ser pensada como o conjunto dos zeros de um polinómio de grau 1, uma cónica é o conjunto dos zeros de um polinómio de grau 2. Por exemplo, o conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3xy - 7y^2 - 2y - 1 = 0\}$$

é uma cónica.



No que resta deste texto vamos debruçar-nos sobre as cónicas. Vamos fazê-lo segundo duas abordagens: neste capítulo, vamos estudar as cónicas no plano Euclidiano, utilizando em particular alguma Geometria Sintética elementar, de modo a possibilitar o uso de métodos sintéticos para provar alguns resultados geométricos sobre cónicas. Sendo o ênfase dado à parte sintética, não vamos adoptar já a definição de cónica como o conjunto dos zeros de um polinómio de segundo grau; em vez disso, vamos explorar algumas definições alternativas de carácter mais geométrico. No capítulo 5, vamos estudar as cónicas com métodos da Geometria Projectiva, introduzidos no Capítulo 3.

Na próxima secção vamos dar uma primeira definição de cónica. Tem apenas um defeito: não inclui de maneira natural as circunferências, que, sendo obviamente conjuntos dos zeros de polinómios de segundo grau em \mathbb{R}^2 , merecem certamente ser consideradas cónicas.

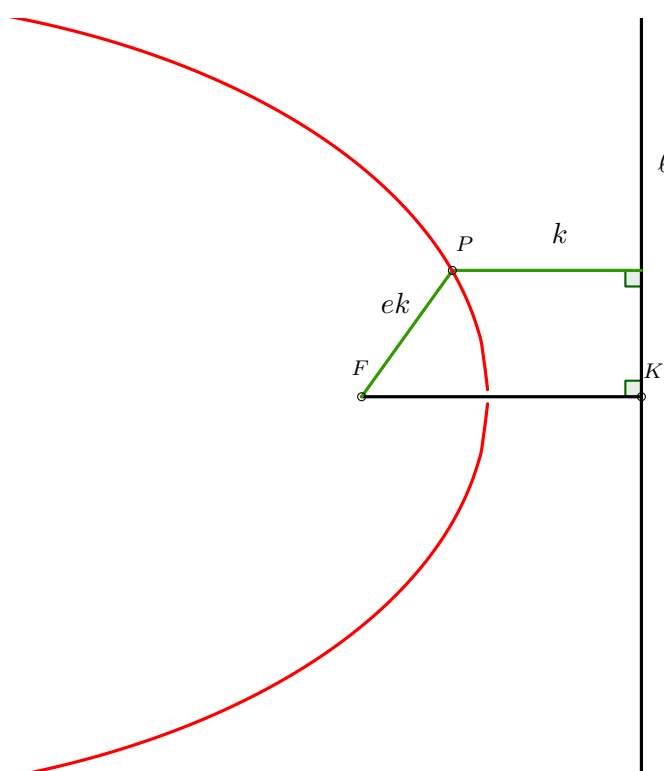
§4.1 Foco, recta directriz e excentricidade

Começamos com a seguinte definição:

Definição 4.1.1. No plano Euclidiano, considerem-se uma recta ℓ e um ponto F exterior a ℓ , e seja ainda $e > 0$ um número real. A *cónica* de foco F , recta directriz ℓ e excentricidade e é o lugar geométrico dos pontos P do plano para os quais

$$|PF| = e \cdot d(P, \ell)$$

(onde $d(P, \ell)$ designa a distância do ponto P à recta ℓ).



Na notação da definição anterior, considere-se um sistema de eixos cartesianos com origem em F , de tal modo que o eixo das abcissas é a recta perpendicular a ℓ que passa por F . Seja K a projecção ortogonal de F sobre ℓ , que podemos supor que tem coordenadas $(d, 0)$ para algum $d > 0$. A cónica de foco F , recta directriz ℓ e excentricidade e é, assim, definida (neste sistema de eixos) pela equação

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e|d - x|$$

que equivale, elevando ao quadrado ambos os membros, a

$$x^2 + y^2 = e^2(x^2 - 2dx + d^2). \quad (4.1)$$

Agora temos dois casos, consoante $e = 1$ ou $e \neq 1$, que vão corresponder a diferentes tipos de cónicas.

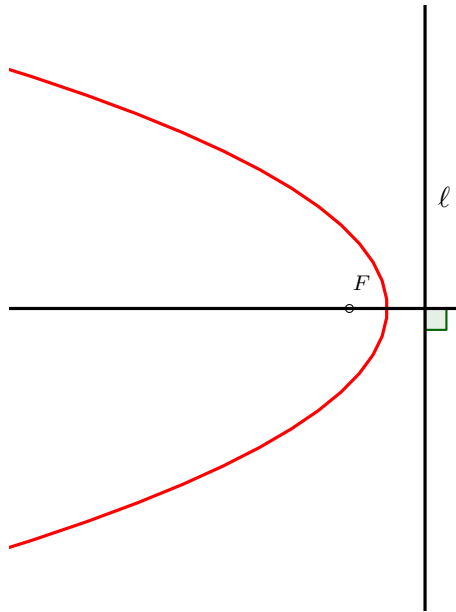
Caso $e = 1$ (parábola)

Se $e = 1$, a cónica diz-se uma *parábola*. Neste caso, a equação da cónica fica

$$y^2 = -2d \left(x - \frac{d}{2} \right).$$

Fazendo a mudança de coordenadas dada por $x' = x - \frac{d}{2}$, obtemos a equação

$$y^2 = -2dx'.$$



Nestas novas coordenadas, o ponto de coordenadas $(0, 0)$ pertence à parábola (é o vértice da parábola), o foco F tem coordenadas $(-\frac{d}{2}, 0)$ e a recta directriz tem equação $x' = \frac{d}{2}$.

Caso $e \neq 1$ (elipse e hipérbole)

Se $e \neq 1$, a equação (4.1) equivale, após divisão por $1 - e^2$, a

$$x^2 + \frac{2e^2d}{1 - e^2}x + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

que, por sua vez, equivale a

$$\left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2} \right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}$$

ou ainda a

$$\frac{\left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2} \right)^2}{\left(\frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{e^2d^2}{1 - e^2} \right)} = 1. \quad (4.2)$$

Sejam agora

$$a = \frac{ed}{|1 - e^2|}, \quad b = \frac{ed}{\sqrt{|1 - e^2|}}, \quad c = \frac{e^2d}{|1 - e^2|} \quad (4.3)$$

e note-se que, sabendo a , b e c , podemos recuperar $e = \frac{c}{a}$ e $d = \frac{b^2}{c}$. Temos agora dois subcasos.

Subcaso $e < 1$ (elipse)

Se $e < 1$, a cónica diz-se uma *elipse*. Neste caso, (4.2) reescreve-se como

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Além disso, tem-se

$$b^2 + c^2 = \frac{e^2 d^2}{1 - e^2} + \frac{e^4 d^2}{(1 - e^2)^2} = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2} = a^2.$$

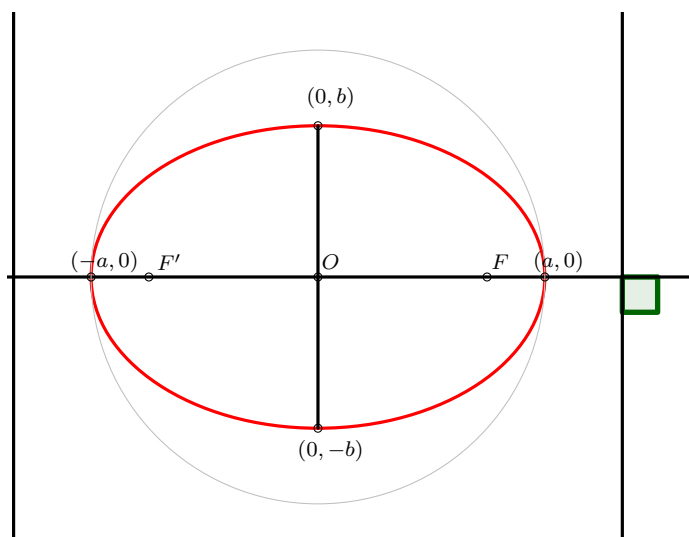
Deslocando os eixos, podemos fazer a mudança de coordenadas dada por $x' = x + c$, e a equação da elipse fica

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e, nas novas coordenadas, o foco tem coordenadas $(c, 0)$ e a recta directriz (que nas coordenadas antigas tinha equação $x = d$) passa a ter equação $x' = d + c = \frac{b^2 + c^2}{c} = \frac{a^2}{c}$.

Observação 4.1.2. Sejam a e b reais com $a > b > 0$. Sendo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $d = \frac{b^2}{c}$ e $e = \frac{c}{a}$, cálculos simples mostram que as igualdades em (4.3) se verificam. Ou seja, sob estas condições, a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ define uma elipse de excentricidade e . Por simetria, se $b > a > 0$ esta equação também define uma elipse. Se $a = b$, contudo, obtemos $c = 0$, o que causa problemas com a definição de $d = \frac{b^2}{c}$. Neste caso, a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é a equação de uma circunferência. Para remediar a situação pouco natural de a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ definir uma elipse apenas quando $a \neq b$, convencionamos que as circunferências também são elipses (em particular, cónicas), de excentricidade 0.

Considere-se uma elipse \mathcal{E} , sem perda de generalidade de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a > b > 0$. Pelo que vimos, sendo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, o ponto $F = (c, 0)$ e a recta de equação $x = \frac{a^2}{c}$ são foco e recta directriz de \mathcal{E} , respectivamente. Mas da equação de \mathcal{E} é evidente que \mathcal{E} é simétrica em relação à origem. Portanto, por simetria, o ponto $F' = (-c, 0)$ e a recta de equação $x = -\frac{a^2}{c}$ também são foco e recta directriz de \mathcal{E} .



O ponto médio do segmento com extremidades nos focos F e F' diz-se o *centro* da elipse (que no nosso caso é a origem do referencial). A distância entre os focos F e F' , $2c$, diz-se a *distância focal* da elipse. O segmento com extremidades $(-a, 0)$ e $(a, 0)$ (que são os pontos de intersecção de \mathcal{E} com a recta que contém os focos) diz-se o *eixo focal* da elipse, e tem comprimento $2a$. Note-se que, em qualquer elipse, a distância focal é menor do que o comprimento do eixo focal.

Observação 4.1.3. Como $c^2 = a^2 + b^2$, o Teorema de Pitágoras fornece-nos uma forma elegante de determinar geometricamente os focos de \mathcal{E} ; basta intersectar a circunferência de centro $(0, b)$ e raio a com o eixo focal.

Observação 4.1.4. Seja \mathcal{C} a circunferência com o mesmo centro que \mathcal{E} e raio a . A recta directriz de equação $x = \frac{a^2}{c}$ é a polar de F em relação a \mathcal{C} .

Subcaso $e > 1$ (hipérbole)

Se $e > 1$, a cónica diz-se uma *hipérbole*. Neste caso, a equação (4.2) toma a forma

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Além disso, tem-se

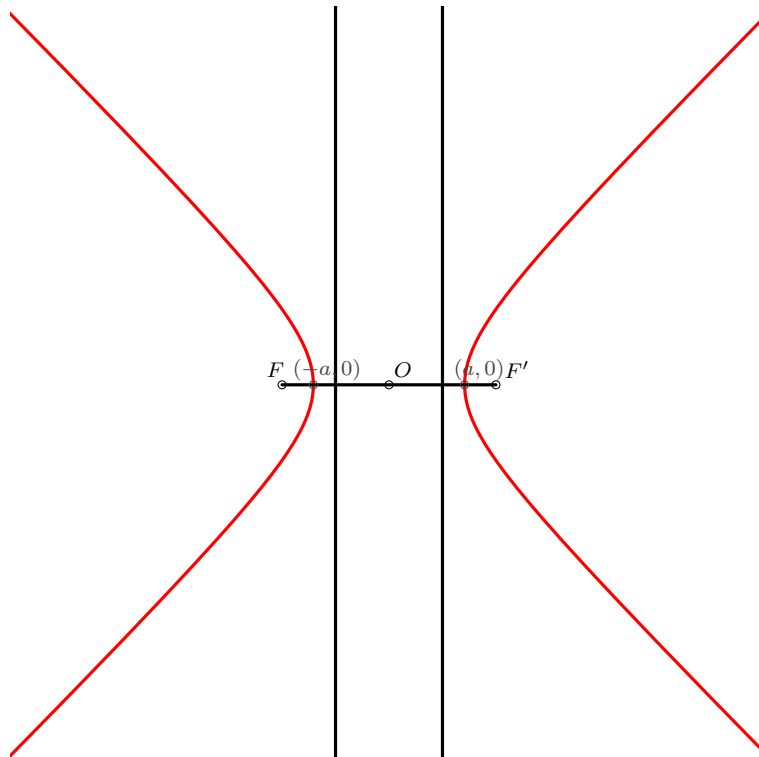
$$a^2 + b^2 = \frac{e^2 d^2}{(e^2 - 1)^2} + \frac{e^2 d^2}{e^2 - 1} = \frac{e^4 d^2}{(e^2 - 1)^2} = c^2.$$

Fazendo a mudança de coordenadas dada por $x' = x - c$, a equação da hipérbole fica

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Reciprocamente, dados quaisquer reais positivos a , b e c satisfazendo $a^2 + b^2 = c^2$, cálculos simples mostram que $d = \frac{b^2}{c}$ e $e = \frac{c}{a}$ cumprem (4.3). Conclui-se que, para quaisquer reais positivos a e b , a equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ define uma hipérbole, obtida a partir da hipérbole de equação $\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ por uma translacção pelo vector $(-c, 0)$ (onde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$).

Considere-se uma hipérbole qualquer \mathcal{H} , sem perda de generalidade de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, esta hipérbole tem foco $(-c, 0)$ e recta directriz de equação $x = d - c = \frac{b^2 - c^2}{c} = -\frac{a^2}{c}$. Mas é evidente a partir da equação que \mathcal{H} é simétrica em relação à origem. Portanto, por simetria, o ponto $F' = (c, 0)$ e a recta de equação $x = \frac{a^2}{c}$ são também foco e recta directriz de \mathcal{H} .



A distância entre os focos F e F' (que é igual a $2c$) diz-se a *distância focal*, e o segmento com extremidades nos pontos $(-a, 0)$ e $(a, 0)$ (que são as intersecções de \mathcal{H} com a recta que contém os focos) diz-se o *eixo focal*. Note-se que, ao contrário do que acontece com a elipse, numa hipérbole a distância focal é *maior* do que o comprimento do eixo focal. De facto, da igualdade $a^2 + b^2 = c^2$ decorre que $2c > 2a$.

Outra caracterização das elipses e hipérbolés

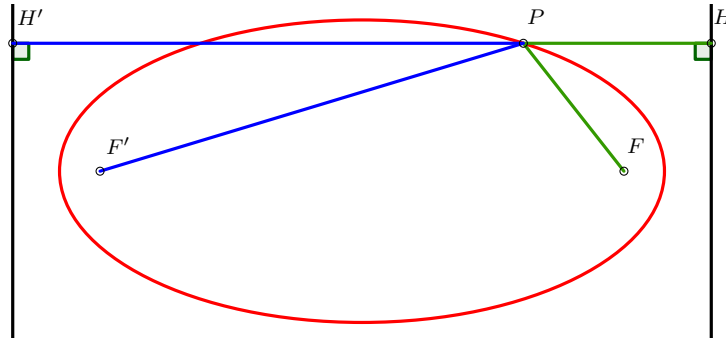
Considere-se a cónica \mathcal{C} (especificamente, a elipse ou hipérbole) de focos $F = (c, 0)$ e $F' = (-c, 0)$ e eixo focal de comprimento $2a$, onde $c, a > 0$ e $a \neq c$. Note-se que \mathcal{C} é uma elipse se $a > c$ e é uma hipérbole se $a < c$. Esta cónica tem como directrizes as rectas ℓ e ℓ' de equação $x = \frac{a^2}{c}$ e $x = -\frac{a^2}{c}$, respectivamente, e a sua excentricidade é $e = \frac{c}{a}$. Para qualquer ponto $P \in \mathcal{C}$, tem-se (sendo H e H' as projecções ortogonais de P sobre ℓ e ℓ' , respectivamente):

- Se P pertence à faixa entre as rectas paralelas ℓ e ℓ' , então

$$|PF| + |PF'| = e(|PH| + |PH'|) = e|HH'| = \frac{c}{a} \cdot \frac{2a^2}{c} = 2a.$$

- Se P não pertence a essa faixa, então

$$||PF| - |PF'|| = e||PH| - |PH'|| = e|HH'| = \frac{c}{a} \cdot \frac{2a^2}{c} = 2a.$$



Se \mathcal{C} é uma elipse (e portanto $c < a$), a segunda igualdade não pode ocorrer. De facto, tem-se pela Desigualdade Triangular

$$||PF| - |PF'|| \leq |FF'| = 2c$$

o que, como $c < a$, não permite que $||PF| - |PF'|| = 2a$. E se \mathcal{C} é uma hipérbole (e portanto $c > a$), a primeira igualdade não pode ocorrer. De facto, tem-se pela Desigualdade Triangular

$$|PF| + |PF'| \geq |FF'| = 2c$$

o que, como $c > a$, não permite que $|PF| + |PF'| = 2a$. Conclui-se então o seguinte:

- Os pontos P da elipse de focos F e F' e eixo focal de comprimento $2a > |FF'|$ verificam

$$|PF| + |PF'| = 2a;$$

- Os pontos P da hipérbole de focos F e F' e eixo focal de comprimento $2a < |FF'|$ verificam

$$||PF| - |PF'|| = 2a.$$

Reciprocamente, pode-se provar que os pontos P que verificam estas igualdades pertencem à elipse/hipérbole correspondente. É isso que faremos de seguida, mas desta vez precisamos de sujar um pouco mais as mãos.

Seja \mathcal{S} o conjunto dos pontos P que verificam

$$|PF| + |PF'| = 2a \text{ ou } ||PF| - |PF'|| = 2a.$$

Observe-se que, se $a > c$, pela Desigualdade Triangular a segunda igualdade não se pode verificar, como já vimos; analogamente, se $a < c$ a primeira igualdade não se pode verificar. Portanto, se $a > c$, \mathcal{S} é o conjunto dos pontos P que verificam $|PF| + |PF'| = 2a$, e, se $a < c$, \mathcal{S} é o conjunto dos pontos P que verificam $||PF| - |PF'|| = 2a$. Queremos assim provar que, se $a > c$, então \mathcal{S} é a elipse de focos F e F' com eixo focal de comprimento $2a$, e que, se $a < c$, então \mathcal{S} é a hipérbole de focos F e F' e eixo focal de comprimento $2a$.

Um ponto P , de coordenadas (x, y) (recorde-se que F e F' têm coordenadas $(c, 0)$ e $(-c, 0)$) pertence a \mathcal{S} precisamente quando

$$((|PF| + |PF'|)^2 - 4a^2) ((|PF| - |PF'|)^2 - 4a^2) = 0. \quad (4.4)$$

Temos

$$\begin{aligned} & ((|PF| + |PF'|)^2 - 4a^2) ((|PF| - |PF'|)^2 - 4a^2) \\ &= ((|PF|^2 + |PF'|^2 - 4a^2) + 2|PF| \cdot |PF'|) ((|PF|^2 + |PF'|^2 - 4a^2) - 2|PF| \cdot |PF'|) \\ &= (|PF|^2 + |PF'|^2 - 4a^2)^2 - 4|PF|^2 \cdot |PF'|^2 \\ &= (|PF|^2 - |PF'|^2)^2 - 8a^2 (|PF|^2 + |PF'|^2) + 16a^4. \end{aligned}$$

Ora, temos $|PF|^2 = (x - c)^2 + y^2$ e $|PF'|^2 = (x + c)^2 + y^2$, pelo que $|PF|^2 - |PF'|^2 = 4cx$ e $|PF|^2 + |PF'|^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2)$. Portanto o lado esquerdo de (4.4) é igual a $16c^2x^2 - 16a^2(x^2 + y^2 + c^2) + 16a^4$, e (4.4) equivale a

$$16c^2x^2 - 16a^2(x^2 + y^2 + c^2) + 16a^4 = 0$$

que, por sua vez, equivale a

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

ou ainda a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Se $a > c$, isto é a equação da elipse de focos F e F' eixo focal de comprimento $2a$, já que sendo b tal que $b^2 = a^2 - c^2$ a equação se reescreve como $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. E, se $a < c$, isto é a equação da hipérbole de focos F e F' e eixo focal de comprimento $2a$, já que sendo b tal que $b^2 = c^2 - a^2$ a equação se reescreve como $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Em suma, obtivemos o seguinte:

Proposição 4.1.5. *Sejam F e F' dois pontos distintos no plano Euclidiano, e seja $a > 0$ tal que $2a \neq |FF'|$. Então:*

- *Se $2a > |FF'|$, o lugar geométrico dos pontos P que verificam*

$$|PF| + |PF'| = 2a$$

é uma elipse; especificamente, é a elipse de focos F e F' cujo eixo focal tem comprimento $2a$.

- *Se $2a < |FF'|$, o lugar geométrico dos pontos P que verificam*

$$||PF| - |PF'|| = 2a$$

é uma hipérbole; especificamente, é a hipérbole de focos F e F' cujo eixo focal tem comprimento $2a$.

Em particular, a hipérbole \mathcal{H} de focos F e F' e eixo focal de comprimento $2a < |FF'|$ admite a decomposição

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$$

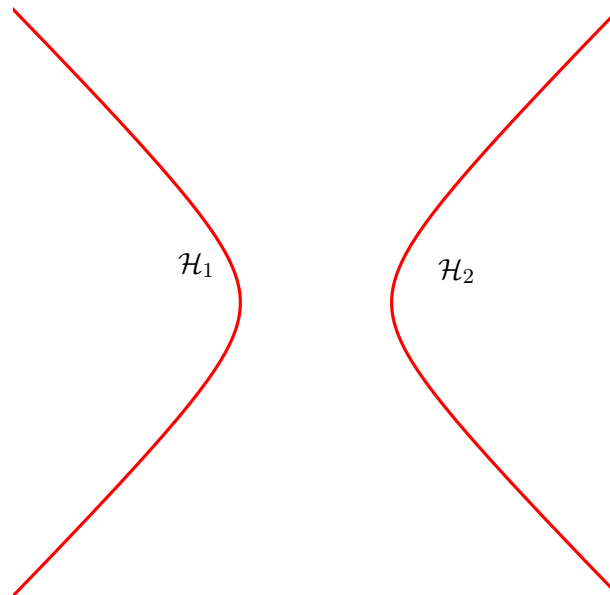
onde

$$\mathcal{H}_1 = \{P : |PF| - |PF'| = 2a\}$$

e

$$\mathcal{H}_2 = \{P : |PF'| - |PF| = 2a\}.$$

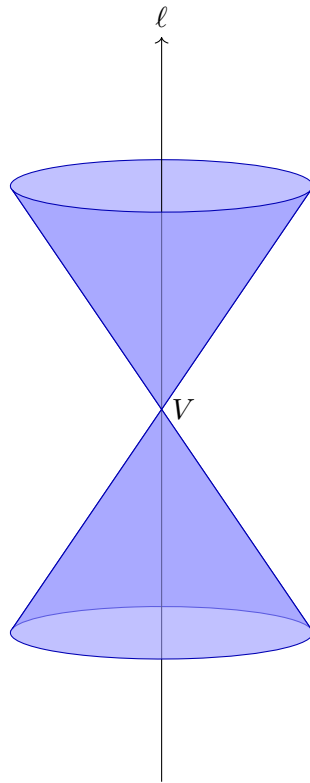
Os conjuntos \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 dizem-se os ramos da hipérbole.



§4.2 O Teorema de Dandelin

Uma questão que, a este ponto, parece natural colocar é: porque é que as cónicas se chamam cónicas? Afinal, o nome sugere alguma relação entre estas curvas e cones, mas não vimos nenhuma relação desse tipo na secção anterior. O objectivo desta secção é explicar o que é que as cónicas têm a ver com cones.

Convém explicar, antes de mais, o que entendemos por um cone; os nossos cones são “infinitos”, não têm base. No contexto deste texto, dados em \mathbb{R}^3 uma recta ℓ e um ponto $V \in \ell$, um *cone* de eixo ℓ e vértice V é a união das rectas em \mathbb{R}^3 que passam por V e fazem um ângulo fixo θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) com a recta ℓ .



Cada uma das rectas por V que fazem um ângulo θ com o eixo ℓ , que constituem o cone, diz-se uma *geratriz* do cone.

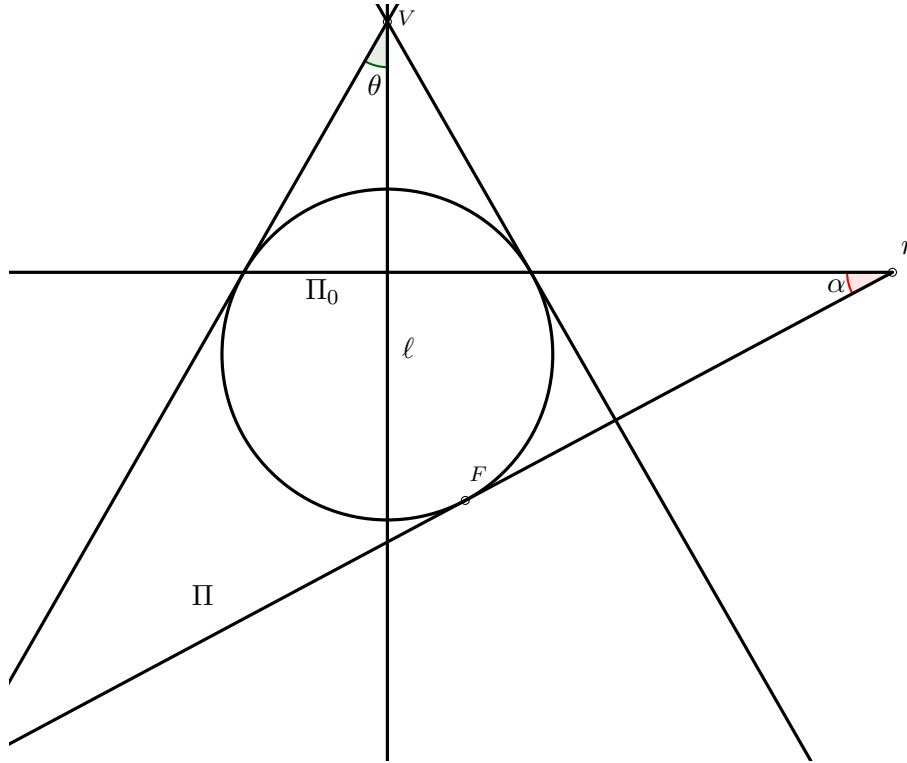
Acontece que as cónicas são precisamente as curvas que se obtêm intersectando um plano com um cone. Este resultado já era conhecido na Grécia Antiga, mas é por vezes conhecido como o *Teorema de Dandelin* devido a uma prova particularmente elegante descoberta por Germinal Pierre Dandelin no século XIX.

Teorema 4.2.1 (Teorema de Dandelin). *Seja Λ um cone e seja Π um plano que não passa pelo vértice de Λ . Então todos os pontos na intersecção de Π com Λ estão contidos numa cónica.*

Demonstração. Se Π é perpendicular ao eixo de Λ , a intersecção $\Pi \cap \Lambda$ é uma circunferência, e em particular é uma cónica. Suponha-se agora que tal não acontece. Seja θ o ângulo entre as geratrizes de Λ e o eixo. Considere-se uma esfera \mathcal{E} inscrita em Λ e tangente ao plano Π num

ponto F . Os pontos de tangência de \mathcal{E} com Λ formam uma circunferência que está sobre um plano Π_0 . Como Π não é perpendicular ao eixo de Λ , Π e Π_0 não são paralelos e intersectam-se numa recta r . Afirmamos que os pontos de $\Pi \cap \Lambda$ pertencem a uma cónica de foco F e recta directriz r .

Seja ℓ o eixo de Λ , e seja Π^* o plano perpendicular a Π que contém o eixo ℓ . A figura seguinte mostra os objectos com que estamos a trabalhar após projecção no plano Π^* .



Seja agora P um ponto de $\Lambda \cap \Pi$. A recta VP , como qualquer geratriz do cone, é tangente a \mathcal{E} : seja N o ponto de tangência. Como $P \in \Pi$, a recta PF é tangente a \mathcal{E} , tal como a recta PN ; como os segmentos tangentes a uma esfera traçados por um ponto exterior têm todos o mesmo comprimento, resulta que $|PF| = |PN|$.

Seja H a projecção ortogonal de P sobre Π_0 . O triângulo PHN é rectângulo em H , uma vez que H é a projecção ortogonal de P sobre um plano que contém N . Além disso, o ângulo entre as rectas PH e PN é igual ao ângulo entre as rectas ℓ e PN , já que PH e ℓ são paralelas uma vez que são ambas perpendiculares ao plano Π_0 . Assim o ângulo entre as rectas PH e PN é igual a θ . Resulta que $|PH| = |PN| \cos \theta$; como $|PF| = |PN|$, segue que

$$|PH| = |PF| \cos \theta.$$

Seja agora α o ângulo entre os planos Π e Π_0 , e seja K a projecção ortogonal de P sobre r . O triângulo PHK é rectângulo em H (mais uma vez, porque $K \in \Pi_0$ por construção e H é a projecção ortogonal de P sobre Π_0). Além disso, as rectas PH e PK são ambas perpendiculares a r (a primeira porque é perpendicular a um plano que contém ℓ , e a segunda por construção) e portanto a recta HK também é perpendicular a r . O ângulo entre as rectas PK e HK é assim igual ao ângulo entre Π e Π_0 , ou seja, a α . Resulta que

$$|PH| = |PK| \sin \alpha.$$

Portanto tem-se

$$|PF| \cos \theta = |PK| \sin \alpha, \text{ ou seja, } |PF| = \frac{\sin \alpha}{\cos \theta} |PK|.$$

Como por construção se tem $|PK| = d(P, r)$, segue que P pertence à cônica de foco F e excentricidade $\frac{\sin \alpha}{\cos \theta}$, provando o pretendido. \square

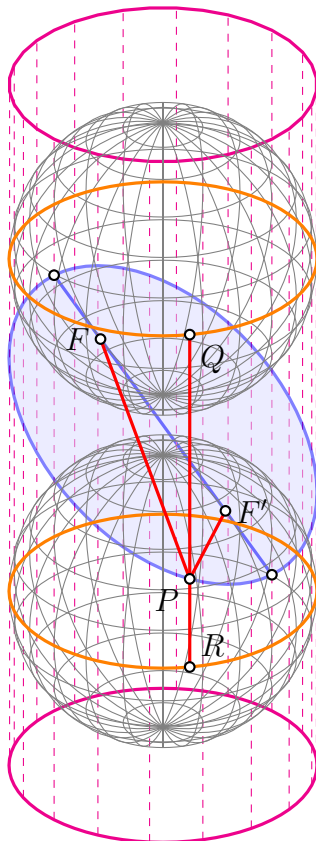
Secções planas do cilindro

Vamos ver agora o que acontece quando intersectamos um plano com um cilindro. Um cilindro pode ser pensado como um cone degenerado em que o vértice está no infinito; formalmente, definimos um *cilindro* como o conjunto das rectas em \mathbb{R}^3 que são paralelas a uma dada recta ℓ e que estão a uma distância fixa de ℓ . Chamamos *geratriz* do cilindro a cada uma dessas rectas paralelas. Isto corresponde à ideia habitual de um cilindro, excepto que os nossos cilindros não têm bases e prolongam-se indefinidamente “para cima e para baixo”.

Acontece que a intersecção de um plano com um cilindro é sempre uma elipse, e isto pode ser visto de maneira particularmente elegante utilizando a ideia das Esferas de Dandelin.

Teorema 4.2.2 (Teorema de Dandelin para cilindros). *Seja Λ um cilindro em \mathbb{R}^3 e seja Π um plano. Então a intersecção $\Lambda \cap \Pi$ está contida numa elipse.*

Demonstração. Desta vez, consideramos duas esferas \mathcal{E} e \mathcal{E}' , ambas inscritas em Λ e tangentes ao plano Π . Sejam F e F' os pontos de tangência de \mathcal{E} e \mathcal{E}' , respectivamente, com Π . Vamos provar que, para um ponto $P \in \Lambda \cap \Pi$, a soma $|PF| + |PF'|$ não depende de P , mostrando assim que $\Lambda \cap \Pi$ está contida numa elipse de focos F e F' .



Os pontos de intersecção de \mathcal{E} com Λ formam uma circunferência contida num plano Σ ; analogamente, os pontos de intersecção de \mathcal{E}' com Λ formam uma circunferência contida num plano Σ' . Considere-se um ponto $P \in \Lambda \cap \Pi$ e seja r a geratriz de Λ que passa por P ; sejam Q e R os pontos de intersecção de r com Σ e Σ' , respectivamente.

Como F e Q pertencem ambos a \mathcal{E} e FP e QP são tangentes a \mathcal{E} , tem-se $|PF| = |PQ|$. Por outro lado, como F' e R pertencem ambos a \mathcal{E}' e $F'P$ e RP são tangentes a \mathcal{E}' , tem-se $|PF'| = |PR|$. Portanto,

$$|PF| + |PF'| = |PQ| + |PR| = |QR|$$

(note-se que P , Q e R estão todos sobre r) e $|QR|$ não é mais do que a distância entre os planos paralelos Σ e Σ' , que não depende de P , provando o resultado. \square

§4.3 Intersecções de rectas e cónicas

Nesta secção vamos estudar propriedades geométricas das cónicas no plano Euclidiano utilizando exclusivamente Geometria Sintética. Para o fazer, começamos com uma definição e algumas observações relacionadas.

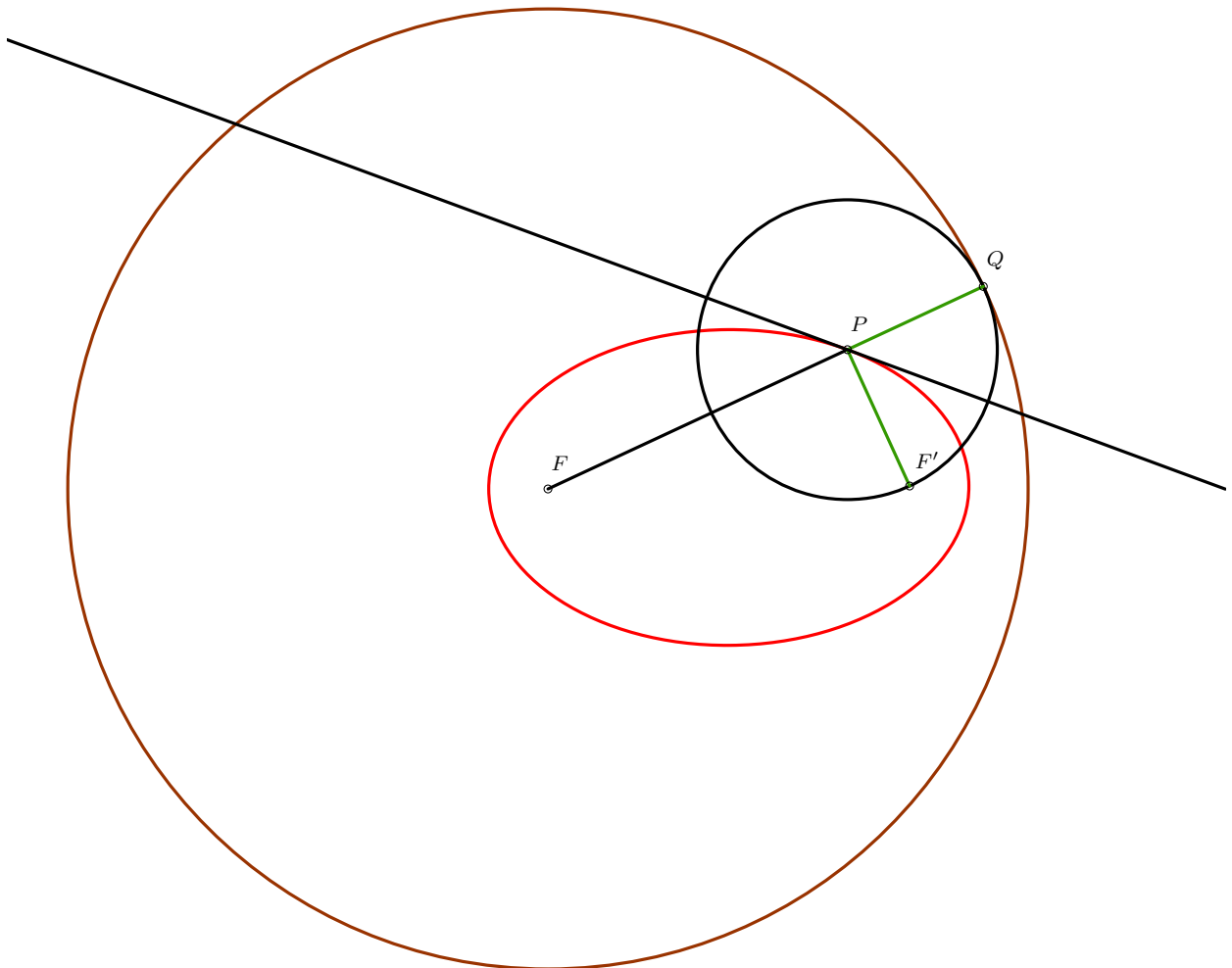
Definição 4.3.1. Seja \mathcal{E} uma elipse/hipérbole de focos F e F' e eixo focal de comprimento $2a$. A *circunferência directriz* de \mathcal{E} (em relação a F) é a circunferência de centro F e raio $2a$.

Observação 4.3.2. O foco F' está no interior do círculo delimitado pela circunferência directriz se \mathcal{E} for uma elipse, e está no seu exterior se \mathcal{E} for uma hipérbole.

Observação 4.3.3. Considere-se uma elipse \mathcal{E} de focos F e F' , eixo focal de comprimento $2a$ e circunferência directriz \mathcal{C} em relação a F . Então F' está no interior do círculo delimitado por \mathcal{C} e, sendo P um ponto de \mathcal{E} , a condição $|PF| + |PF'| = 2a$, que caracteriza os pontos de \mathcal{E} , implica que P também está no interior do círculo delimitado por \mathcal{C} ; além disso, designando por Q a intersecção da semi-recta de origem em F que passa por P com \mathcal{C} , temos

$$|PQ| = |QF| - |FP| = 2a - |FP| = |F'P|$$

e conclui-se que P é a intersecção de FQ com a mediatriz de $F'Q$.



Reciprocamente, se Q é um ponto de \mathcal{C} , então a mediatriz de $F'Q$ intersecta FQ num único ponto P interior a \mathcal{C} , e tem-se

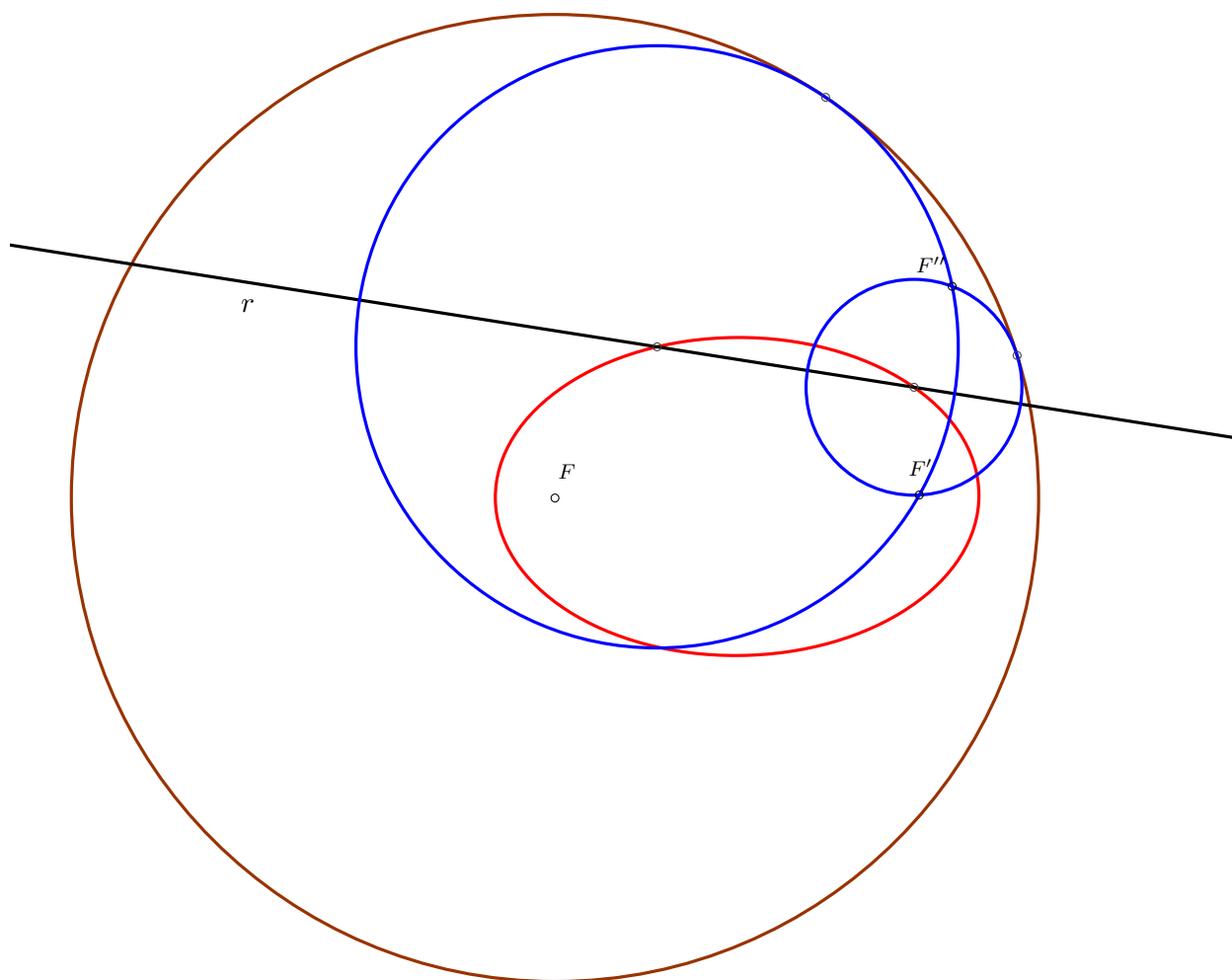
$$|FP| + |F'P| = |FP| + |QP| = |FQ| = 2a$$

e portanto $P \in \mathcal{E}$.

Esta observação permite uma construção geométrica de \mathcal{E} “ponto a ponto”: dado um ponto Q em \mathcal{C} , intersectando a mediatriz do segmento QF' com QF obtemos um ponto P de \mathcal{E} , e todos os pontos de \mathcal{E} podem ser obtidos por este processo.

Observação 4.3.4. A condição $|QP| = |F'P|$, onde Q é a intersecção da semi-recta de origem em F que passa por P com \mathcal{C} , equivale ainda a que P seja o centro de uma circunferência que passa por F' e é tangente a \mathcal{C} . Conclui-se que, dados os focos F e F' e a circunferência directriz \mathcal{C} em relação a F , a elipse de focos F e F' de circunferência directriz \mathcal{C} é o lugar geométrico dos pontos que são o centro de uma circunferência tangente a \mathcal{C} e que passa por F' . O mesmo argumento mostra que a mesma caracterização vale para a hipérbole de focos F e F' e circunferência directriz \mathcal{C} em relação a F ; o argumento é em tudo análogo ao utilizado para a elipse, pelo que deixamos os detalhes como exercício para o leitor.

Como aplicação desta observação, vamos estudar o problema de determinar geometricamente a intersecção de uma elipse/hipérbole \mathcal{E} (de focos F e F' e circunferência directriz \mathcal{C} em relação a F) com uma recta r . Pelo que vimos, queremos determinar os pontos de r que são centro de uma circunferência passando por F' e tangente a \mathcal{C} . Ora, para uma circunferência \mathcal{D} passando por F' , a condição de \mathcal{D} ter centro em r é equivalente a que \mathcal{D} passe pelo simétrico F'' de F' em relação a r .



Interessa-nos, portanto, encontrar as circunferências que passam por F' e F'' e são tangentes a \mathcal{C} . Mas já sabemos como o fazer: estudámos precisamente este problema no final da secção 2.2!

Observação 4.3.5. Temos o seguinte:

- Se F' e F'' estão um dentro e outro fora do círculo delimitado por \mathcal{C} , então não existem circunferências que passam por F' e F'' e são tangentes a \mathcal{C} , e portanto r não intersecta \mathcal{E} ;
- Se $F'' \in \mathcal{C}$, existe em geral exactamente uma tal circunferência, e portanto r intersecta \mathcal{E} num único ponto;
- Se F' e F'' estão do mesmo lado de \mathcal{C} , então existem em geral duas tais circunferências, e portanto r intersecta \mathcal{E} em dois pontos distintos.

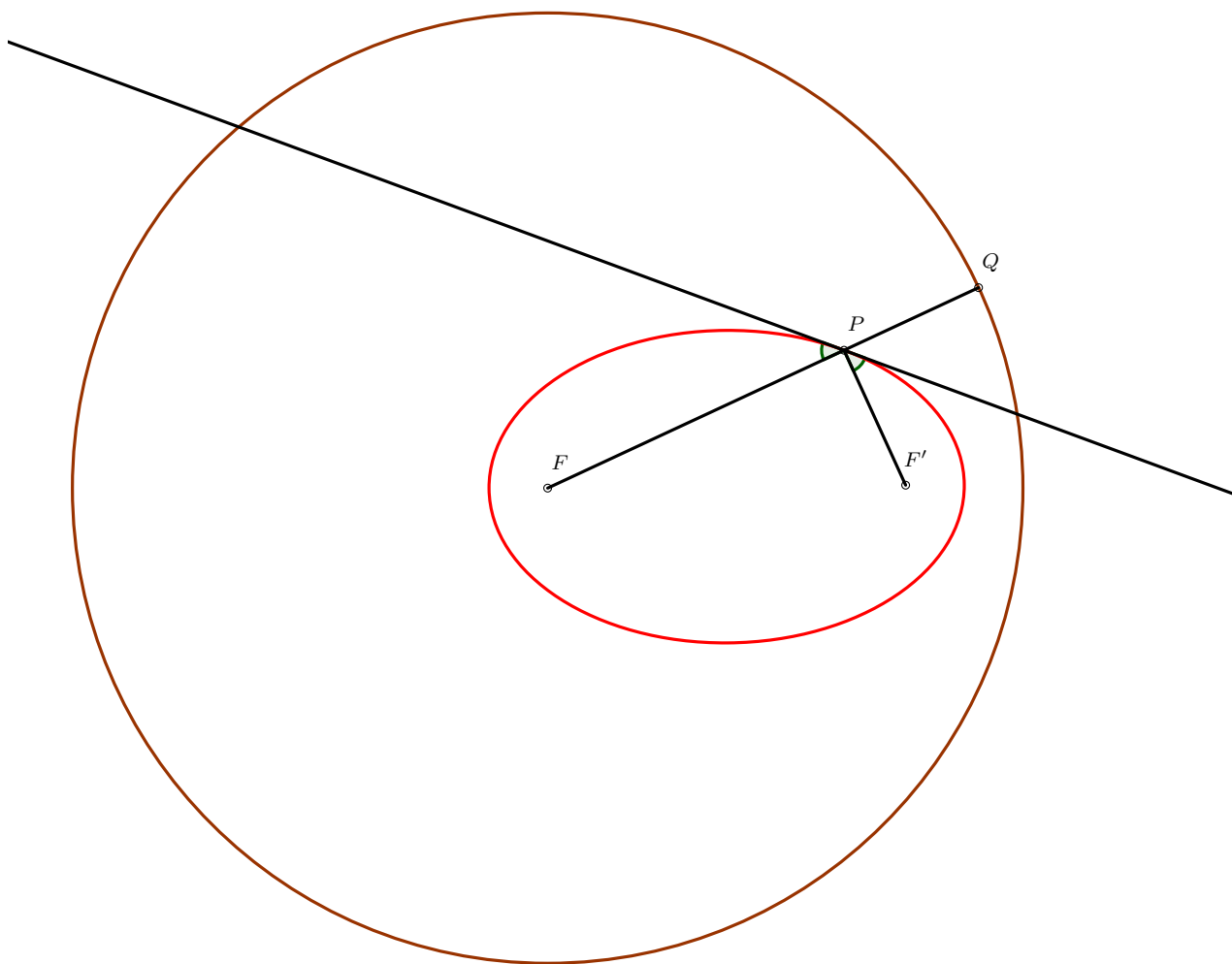
Na Observação anterior notámos que (mantendo a mesma notação), se $F'' \in \mathcal{C}$, então, em

geral, r intersecta \mathcal{E} num único ponto; portanto, se $F'' \in \mathcal{C}$, dizemos que r é tangente a \mathcal{E} , e se P é o (único) ponto de intersecção de r com \mathcal{E} dizemos que r é tangente a \mathcal{E} em P .

Observação 4.3.6. Esta abordagem à noção de tangência é, em geral, perigosa: em curvas que não cónicas, podemos ter rectas tangentes que intersectam a curva em mais do que um ponto e rectas que intersectam a curva em exactamente um ponto mas não lhe são tangentes. Contudo, esta abordagem funciona bem para cónicas, pelo que a adoptaremos aqui por simplicidade; no capítulo 5 vamos abordar a tangência às cónicas de maneira mais algébrica.

Suponha-se agora que \mathcal{E} é uma elipse; sabemos que as rectas tangentes a \mathcal{E} são as rectas r tais que o simétrico Q do foco F' em relação a r pertence à circunferência directriz em relação ao foco F ou seja, são as mediatrizes dos segmentos da forma $F'Q$, com Q na circunferência directriz em relação a F . Mas também já tínhamos visto, após a Observação 4.3.3, que todos os pontos de \mathcal{E} estão contidos em rectas deste tipo, concluindo-se que por cada ponto de \mathcal{E} passa uma recta tangente a \mathcal{E} . Uma das propriedades mais conhecidas das tangentes às elipses é o seguinte resultado:

Lema 4.3.7. *Seja \mathcal{E} uma elipse de focos F e F' , e seja P um ponto em \mathcal{E} . Então a recta tangente a \mathcal{E} em P é a bissetriz de um dos ângulos formados pelas rectas PF e PF' .*

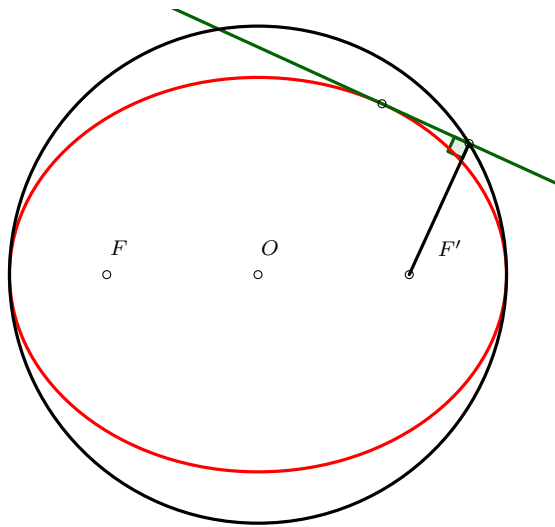


Demonstração. Seja Q o ponto na circunferência directriz \mathcal{C} em relação a F tal que P é a intersecção de FQ com a mediatriz de $F'Q$.

Então a recta tangente a \mathcal{E} em P é a mediatriz do segmento $F'Q$. Além disso, como $|PF'| = |PQ|$, a recta tangente a \mathcal{E} em P , sendo mediatriz do segmento $F'Q$, é a bissetriz de um dos ângulos formados pelas rectas PQ e PF' . Mas a recta PQ é precisamente a recta PF , e o resultado está provado. \square

Este Lema tem uma curiosa consequência física: se tivermos um bilhar com formato elíptico, e lançarmos uma bola de bilhar a partir de um dos focos em qualquer direcção, então, após reflexão na parede do bilhar, a bola é enviada para o outro foco. Temos ainda a seguinte propriedade das tangentes às elipses:

Proposição 4.3.8. *Seja \mathcal{E} a elipse de focos F e F' e eixo focal de comprimento $2a$, e seja O o centro de \mathcal{E} . Então o lugar geométrico das projecções ortogonais de F' sobre as rectas tangentes a \mathcal{E} é uma circunferência (especificamente, a circunferência de centro O e raio a).*



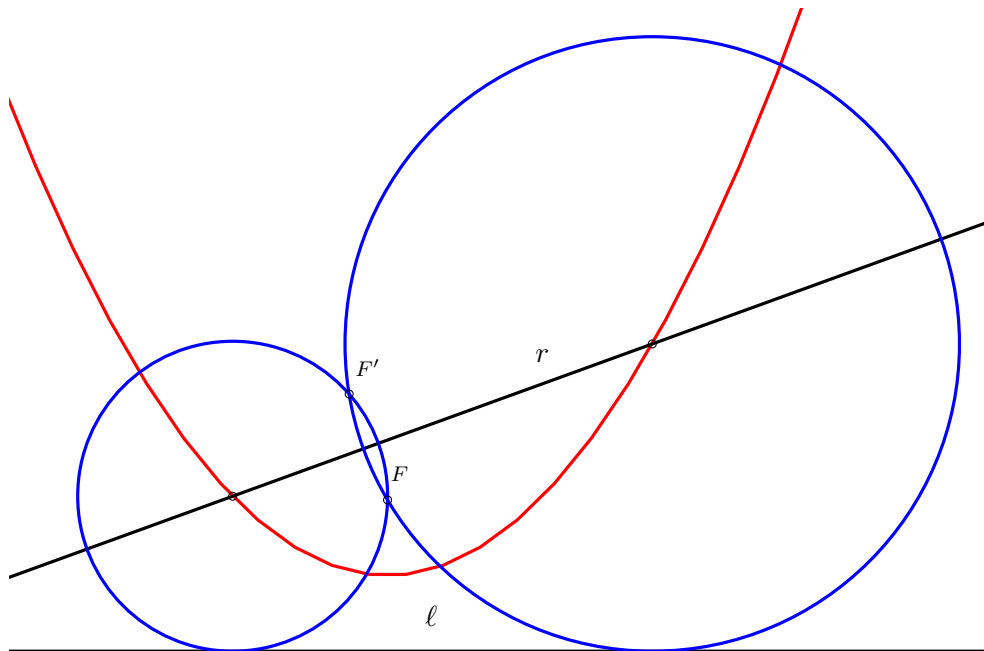
Demonstração. As rectas tangentes a \mathcal{E} são as mediatrizes dos segmentos $F'Q$ com Q na circunferência directriz (de centro F e raio $2a$). As projecções ortogonais de F' sobre as tangentes são, portanto, os pontos médios dos segmentos $F'Q$. O seu lugar geométrico é, assim, a imagem da circunferência directriz por uma homotetia de centro F' e razão $\frac{1}{2}$; tem portanto metade do raio da circunferência directriz (ou seja, raio a) e o seu centro é o ponto médio do segmento FF' (ou seja, O). \square

Observação 4.3.9. O Lema 4.3.7 e a Proposição 4.3.8 também são válidos para hipérbolos, sendo a prova inteiramente análoga.

Por fim, vamos estudar as mesmas questões no âmbito das parábolas. Seja \mathcal{P} a parábola de foco F e recta directriz ℓ . Dado um ponto $P \in \mathcal{P}$, sendo Q a projecção ortogonal de P sobre ℓ tem-se $|PF| = |PQ|$, e portanto P é a intersecção da mediatriz do segmento FQ com a perpendicular a ℓ por Q . Reciprocamente, se Q é um ponto de ℓ , então a intersecção da mediatriz do segmento FQ com a perpendicular a ℓ por Q é um ponto P tal que $|PF| = |PQ|$; como $PQ \perp \ell$, a distância $|PQ|$ é igual à distância de P à recta ℓ , e portanto $P \in \mathcal{P}$.

Temos assim um método para construir “ponto a ponto” a parábola \mathcal{P} ; para cada ponto Q na recta directriz ℓ , intersectamos a recta perpendicular a ℓ por Q com a mediatriz do segmento FQ . Além disso, vemos facilmente que os pontos de \mathcal{P} são precisamente os centros das circunferências que passam por F e são tangentes a ℓ .

Suponha-se agora que queremos determinar a intersecção de uma recta r com \mathcal{P} . Pretendemos determinar os pontos de r que são centro de uma circunferência que passa por F e é tangente a ℓ ; ora, para uma circunferência passando por F , a condição de a circunferência ter centro em r é equivalente a que a circunferência passe pelo simétrico F' de F em relação a r . O problema reduz-se, assim, a determinar as circunferências que passam por F e F' e são tangentes a ℓ .



Se F e F' estão do mesmo lado de ℓ , existem em geral duas tais circunferências, e se F e F' são separados por ℓ não existe nenhuma tal circunferência. Se $F' \in \ell$, existe exactamente uma circunferência passando por F e F' e tangente a ℓ , pelo que r intersecta \mathcal{P} num único ponto. No caso em que $F' \in \ell$, dizemos portanto que a recta r é tangente a \mathcal{P} , e sendo P o único ponto de $r \cap \mathcal{P}$ dizemos que r é tangente a \mathcal{P} em P .

As rectas tangentes a \mathcal{P} são, portanto, as mediatrizes dos segmentos FQ com $Q \in \ell$. Mas observámos anteriormente que qualquer ponto da parábola está contido numa dessas mediatrizes. Conclui-se que por qualquer ponto de \mathcal{P} passa uma recta tangente a \mathcal{P} . As tangentes a \mathcal{P} têm a seguinte propriedade conhecida:

Lema 4.3.10. *Seja P um ponto na parábola \mathcal{P} de foco F e recta directriz ℓ , e seja Q a projecção ortogonal de P sobre ℓ . Então a recta tangente a \mathcal{P} em P bissecta o ângulo $\angle FPQ$.*

Demonstração. A recta tangente a \mathcal{P} em P é a mediatriz do segmento FQ . Como $|PF| = |PQ|$, esta recta bissecta o ângulo $\angle FPQ$, como pretendido. \square

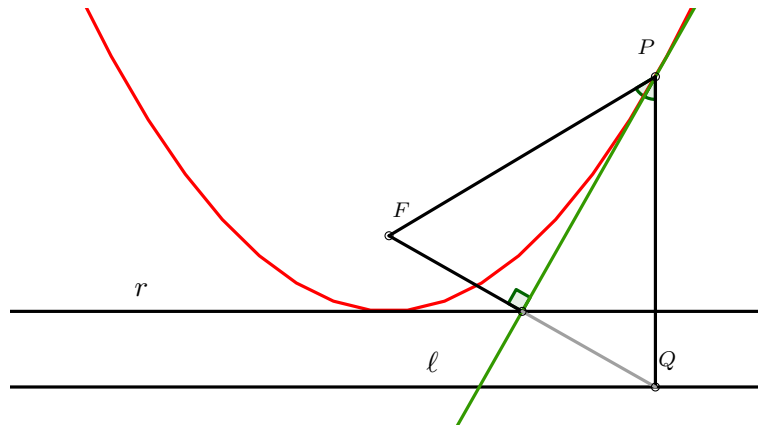
Temos ainda, tal como no caso das elipses e hipérbolas, uma caracterização do lugar geométrico das projecções ortogonais do foco de uma parábola sobre as rectas tangentes à parábola.

Proposição 4.3.11. *Seja \mathcal{P} uma parábola de foco F . Então o lugar geométrico das projecções ortogonais de F sobre as rectas tangentes a \mathcal{P} é uma recta; especificamente, é a recta tangente à parábola no seu vértice.*

Demonstração. As rectas tangentes a \mathcal{P} são as mediatrizes dos segmentos FQ com Q na recta directriz; as projecções ortogonais de F sobre as tangentes são, portanto, os pontos médios

desses segmentos FQ . O lugar geométrico pretendido é, portanto, a imagem da recta directriz por uma homotetia de razão $\frac{1}{2}$, e, logo, também é uma recta, que designamos por r .

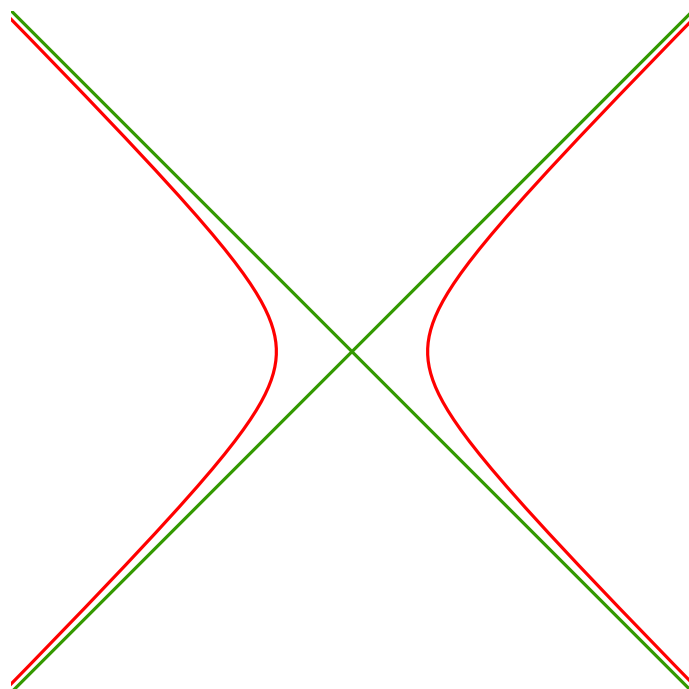
Seja agora Q_0 a projecção ortogonal de F sobre a recta directriz. Então o ponto médio do segmento FQ_0 (que é o vértice da parábola) pertence ao lugar geométrico procurado. Como r é paralela à recta directriz, resulta que r é a mediatriz de FQ_0 , e portanto r é a recta tangente a \mathcal{P} no seu vértice, como pretendido. \square



Assíntotas

Considere-se a hipérbole \mathcal{H} de focos F e F' e circunferência directriz \mathcal{C} em relação a F . Recorde-se que chamámos “rectas tangentes a \mathcal{H} ” às mediatrizes dos segmentos $F'Q$, com $Q \in \mathcal{C}$.

Em geral, essas rectas intersectam \mathcal{H} num único ponto (a intersecção da mediatriz de $F'Q$ com FQ). Acontece que, se tivermos $F'Q \perp FQ$, essas duas rectas são paralelas e portanto não se intersectam. Obtemos, assim, tangentes degeneradas que não intersectam a hipérbole (na realidade, trabalhando no plano projectivo, essas rectas são tangentes a \mathcal{H} num ponto do infinito; vamos ver como formalizar esta ideia mais adiante). Essas tangentes dizem-se as *assíntotas* de \mathcal{H} .



Note-se que existem exactamente dois pontos Q em \mathcal{C} tais que $FQ \perp F'Q$ (são os pontos Q de \mathcal{C} tais que $F'Q$ é tangente a \mathcal{C}), e portanto uma hipérbole tem exactamente duas assíntotas.

§4.4 Exercícios e Problemas

4.1. Sejam A e B dois pontos numa elipse \mathcal{E} . Um ponto variável X desloca-se sobre a elipse, e a tangente a \mathcal{E} em X intersecta a tangente em A e a tangente em B em M e N , respectivamente. Seja F um foco da elipse. Mostre que, à medida que X varia em \mathcal{E} , as rectas FM e FN fazem entre si um ângulo constante.

4.2. Seja ABC um triângulo e seja \mathcal{P} uma parábola tangente às rectas AB , BC e CA .

- (a) Prove que o foco de \mathcal{P} pertence à circunferência circunscrita ao triângulo ABC .
- (b) Prove que o ortocentro de ABC pertence à recta directriz de \mathcal{P} .

4.3. Seja \mathcal{H} uma hipérbole com assíptotas m e m' , e seja r uma recta que passa pelo centro de \mathcal{H} (i.e., o ponto médio do eixo focal). Prove que os pontos médios das cordas de \mathcal{H} paralelas a r pertencem à recta r' que passa pelo centro de \mathcal{H} tal que

$$[m, m'; r, r'] = -1.$$

4.4. De uma cónica conhecem-se três tangentes distintas l, m, n e um foco F . Construa com régua e compasso o outro foco da cónica, caso exista.

4.5. Seja ABC um triângulo e seja M o ponto médio de BC . Uma parábola \mathcal{P} é tangente a AB e a AC em B e C , respectivamente. Mostre que a mediana AM é perpendicular à recta directriz de \mathcal{P} , e que o ponto médio da mediana AM pertence a \mathcal{P} .

4.6. Uma recta que passa pelo foco de uma parábola intersecta-a nos pontos M e M' . Mostre que as tangentes à parábola em M e M' são perpendiculares e intersectam-se num ponto N da recta directriz, tal que a circunferência de diâmetro MM' é tangente em N à recta directriz.

4.7. Seja \mathcal{P} uma parábola de foco F e recta directriz r , e seja d uma recta que intersecta r num ponto Q . Seja \mathcal{C} uma circunferência centrada num ponto R de d e tangente a r . Mostre que d intersecta \mathcal{P} se e só se a recta QF intersecta \mathcal{C} . Se for esse o caso, designando por A, A' as intersecções de QF com \mathcal{C} e por M, M' as de d com \mathcal{P} , mostre que as rectas $AR, A'R$ são paralelas às rectas $MF, M'F$.

4.8. Seja \mathcal{P} uma parábola de foco F e vértice A , e seja M um ponto de \mathcal{P} . Seja Q a projecção ortogonal de M sobre AF . Sejam T e N as intersecções de AF com a tangente a \mathcal{P} em M e com a perpendicular a essa tangente por M , respectivamente.

- (a) Mostre que $|QN| = 2|AF|$.
- (b) Mostre que A é o ponto médio do segmento TQ .

4.9. Seja \mathcal{P} uma parábola de foco F , vértice A e recta directriz r , e sejam P um ponto do plano que não pertence a \mathcal{P} , P_0 a projecção ortogonal de P sobre r e α um dos ângulos entre as tangentes a \mathcal{P} que passam por P . Mostre que $|PP_0| = |PF| \cdot |\cos \alpha|$.

4.10. Seja $ABCDEF$ um hexágono no plano Euclidiano com vértices numa elipse \mathcal{E} . Suponha-se que os lados opostos de $ABCDEF$ são paralelos, e que as rectas AD , BE e CF são concorrentes num ponto. Mostre que esse ponto é o centro de \mathcal{E} .

5 Cónicas no plano projectivo complexo

Neste último capítulo, vamos abordar e redefinir as cónicas de uma perspectiva não Euclidiana, utilizando Geometria Projectiva. Os métodos utilizados serão essencialmente aqueles que foram introduzidos no Capítulo 3. Há apenas uma (pequena) novidade a acrescentar: em vez de trabalharmos no plano projectivo real, vamos trabalhar no plano projectivo complexo.

O plano projectivo complexo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ é definido de maneira análoga ao plano projectivo real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$; de facto, a teoria desenvolvida no Capítulo 3 podia, em geral¹, ter sido construída sobre um corpo arbitrário, e portanto não vamos fazer uma introdução minuciosa de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, já que trabalhar com ele é essencialmente o mesmo que trabalhar com $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, excepto que agora os tripleteos de coordenadas homogéneas podem incluir números complexos não reais, tais como as matrizes das homografias, etc.

Mas porque fazemos esta mudança súbita de \mathbb{R} para \mathbb{C} ? A resposta vem de uma propriedade fundamental em que \mathbb{C} se distingue de \mathbb{R} : \mathbb{C} é *algebricamente fechado*, o que significa que qualquer polinómio não constante com coeficientes em \mathbb{C} tem uma raiz em \mathbb{C} . Quando trabalhávamos (quase) só com rectas, trabalhar sobre um corpo algebricamente fechado não fazia particularmente diferença, essencialmente porque polinómios de grau 1 têm sempre uma raiz, qualquer que seja o corpo em que trabalhemos. Mas, quando começamos a trabalhar com curvas algébricas de grau maior ou igual a 2 (isto é, curvas que são o conjunto dos zeros de polinómios de grau maior ou igual a 2), há vantagens em trabalhar sobre um corpo algebricamente fechado: a teoria da intersecção dessas curvas fica muito mais simples. De facto, no plano projectivo sobre um corpo algebricamente fechado, quaisquer duas curvas algébricas de grau m e n definidas por polinómios que não têm nenhum factor comum não constante intersectam-se em exactamente mn pontos “contando com multiplicidades”; o significado preciso de multiplicidade neste contexto, tal como uma prova deste resultado notável, está para além do âmbito destas notas, mas ajuda a explicar a preferência por \mathbb{C} quando trabalhamos com cónicas.

¹Com excepção do Teorema Fundamental da Geometria Projectiva, por motivos análogos aos discutidos quando apresentámos o seu análogo afim.

§5.1 Cónicas como curvas algébricas de grau 2

Tal como explicámos na introdução deste capítulo, não vamos fazer uma introdução cuidada ao plano projectivo complexo, já que toda a teoria que nos interessa sobre ele pode ser obtida a partir do Capítulo 3 substituindo todas as ocorrências de \mathbb{R} por \mathbb{C} . Fica aqui, contudo, uma definição formal:

Definição 5.1.1. O plano projectivo complexo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ é o conjunto $(\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}) / \sim$ das classes de equivalência para a relação \sim em $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ definida por

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \text{ se e só se existe } \lambda \in \mathbb{C} \text{ tal que } (x', y', z') = \lambda(x, y, z).$$

Dado um vector $v \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, denotamos a sua classe de equivalência módulo \sim por $[v]$, e dizemos que v é um tripleto de coordenadas homogéneas para $[v]$.

Os pontos que admitem coordenadas homogéneas $(x, y, 0)$ para alguns complexos x, y não ambos nulos são também aqui chamados *pontos do infinito*. Em analogia com o caso real, definimos uma *recta* em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ como o conjunto dos pontos em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ que admitem coordenadas homogéneas (x, y, z) que verificam

$$ax + by + cz = 0 \tag{5.1}$$

fixados alguns complexos a, b, c , não todos nulos. Fixada uma recta r , os valores de a, b, c para os quais (5.1) a define estão determinidos a menos de um factor constante.

Um ponto em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ diz-se um *ponto real* se admite um tripleto de coordenadas homogéneas (x, y, z) com x, y, z reais. Uma recta em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ diz-se uma *recta real* se admite uma equação do tipo (5.1) com a, b, c reais. Tal como em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, quaisquer duas rectas distintas em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ intersectam-se num único ponto; portanto, a intersecção de duas rectas reais é sempre um ponto real.

Note-se que podemos ver $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ como um subconjunto de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$; especificamente, podemos ver $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ como o conjunto dos pontos reais de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Temos assim a cadeia de inclusões

$$\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C}).$$

Neste sentido, dada uma recta real em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, definimos a sua *parte real* como a sua intersecção com $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, e definimos a sua *parte afim real* como a sua intersecção com $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

Exemplo 5.1.2. A recta em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de equação $x + 2y + 3z = 0$ tem um ponto do infinito real, o ponto de coordenadas homogéneas $(-2, 1, 0)$. A sua parte afim real obtém-se substituindo z por 1; é a recta em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ de equação $x + 2y + 3 = 0$.

Observação 5.1.3. Tal como fizemos com \mathbb{R} , consideramos que $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ está contido em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, identificando-se o ponto $(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ com o ponto de coordenadas homogéneas $(x, y, 1)$ em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$; reciprocamente, quando $z \neq 0$, (x, y, z) é um tripleto de coordenadas homogéneas para o ponto $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$.

Estamos agora prontos para dar a nossa nova definição de cónica: assim como as rectas são conjuntos dos zeros em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de polinómios homogéneos² de grau 1, as cónicas são conjuntos dos zeros em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de polinómios homogéneos de grau 2.

²Um polinómio diz-se *homogéneo* se se escreve como soma de monómios todos do mesmo grau.

Definição 5.1.4. Uma *cónica* em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ é o conjunto dos pontos em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ que admitem coordenadas homogéneas (x, y, z) que verificam

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 0 \quad (5.2)$$

para alguns $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$, não todos nulos. Se uma cónica admite uma equação da forma (5.2) com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, dizemos que é uma *cónica real*.

Dada uma cónica \mathcal{C} em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, chamamos *parte real de \mathcal{C}* a $\mathcal{C} \cap \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, e *parte afim real de \mathcal{C}* a $\mathcal{C} \cap \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Para obter a parte afim real de uma cónica, basta substituir z por 1 numa equação do tipo (5.2) que a defina.

Exemplo 5.1.5.

- (i) A cónica definida pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ é uma cónica real com parte real vazia. Mas tem pontos não reais, por exemplo os de coordenadas homogéneas $(1, i, 0)$ e $(0, 1, i)$.
- (ii) A cónica definida pela equação $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ tem como parte real (que, neste caso, é também a parte afim real) a circunferência em \mathbb{R}^2 definida por $x^2 + y^2 = 1$; a cónica contém também dois pontos do infinito, os de coordenadas homogéneas $(1, i, 0)$ e $(1, -i, 0)$. Note-se que os dois tripletos de coordenadas homogéneas são complexos conjugados. De facto, qualquer cónica real (ou recta real) é invariante por conjugação complexa.
- (iii) A parábola \mathcal{P} em \mathbb{R}^2 de equação $x^2 - y + 1 = 0$ é a parte afim real da cónica em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ definida pela equação

$$x^2 - yz + z^2 = 0.$$

Para obter a intersecção de \mathcal{P} com a recta do infinito, colocamos $z = 0$, obtendo-se $x^2 = 0$, pelo que o único ponto do infinito em \mathcal{P} é o ponto (real) de coordenadas homogéneas $(0, 1, 0)$. Note-se que este é precisamente o ponto do infinito no eixo de simetria da parábola.

Proposição 5.1.6. *Sejam \mathcal{C} uma cónica e r uma recta em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. A intersecção $\mathcal{C} \cap r$ é não vazia, e, se essa intersecção tem pelo menos três pontos, então $r \subseteq \mathcal{C}$.*

Demonstração. Considere-se uma equação da forma (5.2) para \mathcal{C} , e sejam $u, v \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tripletos de coordenadas homogéneas para dois pontos de r . Os tripletos de coordenadas homogéneas de pontos de r são, assim, os tripletos da forma

$$\alpha u + \beta v$$

com $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, onde dois pares (α, β) dão o mesmo ponto de r se e só se representam o mesmo ponto em $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Escrevendo $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ e substituindo em (5.2) $(x, y, z) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$, obtemos uma equação da forma

$$a_0 \alpha^2 + b_0 \alpha \beta + c_0 \beta^2 = 0 \quad (5.3)$$

para algumas constantes a_0, b_0, c_0 .

Suponha-se inicialmente que $a_0 \neq 0$. Então $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ não é solução desta equação, e podemos portanto supor que $\beta \neq 0$; como α e β só estão determinados a menos de um factor constante, podemos supor que $\beta = 1$, e obtemos a equação

$$a_0\alpha^2 + b_0\alpha + c_0 = 0.$$

Esta é uma equação quadrática em α , que tem pelo menos uma e no máximo duas soluções, e obtemos que neste caso $\mathcal{C} \cap r$ é não vazia e tem no máximo dois pontos.

O caso em que $c_0 \neq 0$ é análogo por simetria. Suponha-se agora que $a_0 = c_0 = 0$. Se $b_0 \neq 0$, a equação fica

$$\alpha\beta = 0$$

que equivale a ter-se $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, e portanto os pontos de intersecção de r com \mathcal{C} são os de coordenadas homogéneas u e v . Por fim, se $b_0 = 0$, qualquer par (α, β) satisfaz (5.3), e portanto $r \subseteq \mathcal{C}$. \square

Corolário 5.1.7. *Qualquer cónica em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tem infinitos pontos.*

§5.2 Matriz de uma cónica

A equação

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 0$$

pode reescrever-se na forma

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Assim, a cada cónica \mathcal{C} em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ pode associar-se uma matriz simétrica 3×3 (que é determinada a menos de um factor constante). Chamando A a essa matriz, podemos definir

$$Q(X, Y) = XAY^T \quad \text{para quaisquer } X, Y \in \mathbb{C}^3$$

que é a forma bilinear cuja matriz em relação à base canónica de \mathbb{C}^3 é Q ; definindo ainda

$$F(X) = Q(X, X) = XAX^T$$

temos que F é a forma quadrática associada à forma bilinear Q , e a equação de \mathcal{C} é $F(X) = 0$. Vamos mais adiante ver que estas construções não são apenas “abstract nonsense”: a igualdade $Q(X, Y) = 0$ traduz-se numa propriedade geométrica interessante dos pontos de coordenadas homogéneas X e Y . Aproveitamos para introduzir a seguinte definição:

Definição 5.2.1. Uma cónica diz-se *regular* ou *não degenerada* se a matriz simétrica associada A é tal que $\det A \neq 0$. Caso contrário, diz-se *singular*.

Vamos ver em breve que a propriedade de uma cónica ser regular tem um significado geométrico profundo sobre a cónica. Para provar esse resultado, precisamos inicialmente de investigar o efeito sobre uma cónica de uma homografia de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Efeito de uma homografia sobre uma cónica

Seja $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ a transformação projectiva definida por

$$f([v]) = [T_M(v)] \quad \text{para qualquer } v \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

onde M é uma matriz invertível 3×3 com entradas complexas e T_M é a aplicação linear de \mathbb{C}^3 em \mathbb{C}^3 cuja matriz em relação à base canónica é M . Se a cónica \mathcal{C} admite equação $XAX^T = 0$, $f(\mathcal{C})$ é a cónica de equação

$$X'A'X'^T = 0 \tag{5.4}$$

onde $A' = (M^T)^{-1}AM^{-1}$. De facto, temos

$$\begin{aligned} XAX^T = 0 &\Leftrightarrow XM^T((M^T)^{-1}AM^{-1})MX^T = 0 \\ &\Leftrightarrow (XM^T)A'(MX^T) = 0 \\ &\Leftrightarrow (XM^T)A'(XM^T)^T = 0 \end{aligned}$$

o que mostra que o ponto de coordenadas homogéneas X está em \mathcal{C} se e só se o ponto de coordenadas homogéneas $T_M(X)$ (que é o ponto $X' = XM^T$) está na cónica definida por (5.4).

Observação 5.2.2. Daqui resulta que $f(\mathcal{C})$ é regular se e só se \mathcal{C} o for. De facto, temos

$$\det A' = \frac{\det A}{(\det M)^2}$$

e portanto $\det A' = 0$ se e só se $\det A = 0$.

Com isto, estamos prontos para enunciar (e provar) o significado geométrico de uma cónica ser regular/singular.

Proposição 5.2.3. *Uma cónica \mathcal{C} em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ é singular se e só se contém uma recta, e nesse caso \mathcal{C} é a reunião de duas rectas ou é uma só recta (com “multiplicidade 2”).*

Demonstração. Suponha-se inicialmente que \mathcal{C} contém uma recta. Usando uma homografia que envia dois pontos dessa recta nos pontos de coordenadas homogéneas $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, que estão sobre a recta de equação $x = 0$, podemos supor que \mathcal{C} contém a recta de equação $x = 0$. (Note-se que pela Observação 5.2.2 a propriedade de \mathcal{C} ser singular não se altera quando aplicamos uma homografia.) Sendo

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 0$$

uma equação de \mathcal{C} , a condição de \mathcal{C} conter os pontos de coordenadas homogéneas $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$ implica $b = c = f = 0$, e portanto \mathcal{C} tem equação

$$ax^2 + 2dxy + 2exz = 0, \quad \text{isto é,} \quad x(ax + 2dy + 2ez) = 0.$$

Resulta que \mathcal{C} é a reunião das rectas de equação $x = 0$ e $ax + 2dy + 2ez = 0$. Além disso, como

$$\det \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

conclui-se que \mathcal{C} é singular.

Suponha-se agora que \mathcal{C} é singular. Se \mathcal{C} for uma recta, não há nada a provar. Caso contrário, existem três pontos não colineares em \mathcal{C} , e utilizando uma homografia que os envia nos pontos de coordenadas homogéneas $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ podemos supor que estes três pontos pertencem a \mathcal{C} . Isto dá-nos que, numa equação de \mathcal{C} da forma (5.2), se tem $a = b = c = 0$, e portanto \mathcal{C} tem equação

$$2dxy + 2exz + 2fyz = 0$$

que corresponde à matriz

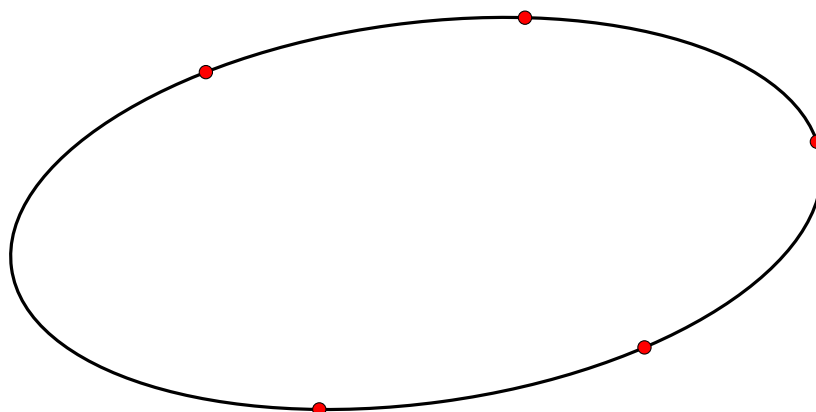
$$\begin{pmatrix} 0 & d & e \\ d & 0 & f \\ e & f & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tem determinante $2def$, e, portanto, como por hipótese \mathcal{C} é singular, um dos complexos d , e e f é igual a 0. Supondo, sem perda de generalidade, que $d = 0$, a equação fica

$$z(ex + fy) = 0$$

e portanto \mathcal{C} é a reunião das rectas de equação $z = 0$ e $ex + fy = 0$. □

Proposição 5.2.4 (Cónica definida por 5 pontos). *Dados quaisquer 5 pontos em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, sem três colineares, existe uma e uma só cónica regular que os contém.*



Demonstração. Utilizando uma homografia apropriada, podemos supor que 4 desses pontos são os de coordenadas homogêneas $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(1, 1, 1)$. A equação de uma cónica que passa por estes 4 pontos é da forma

$$\alpha xy + \beta xz + \gamma yz = 0 \quad (5.5)$$

onde $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Suponha-se que (x_0, y_0, z_0) são coordenadas homogêneas do ponto restante.

A condição de este quinto ponto não ser colinear com os pontos de coordenadas homogêneas $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ implica $x_0 \neq 0$. Analogamente, também se tem $y_0 \neq 0$ e $z_0 \neq 0$. Por fim, como este quinto ponto não é o de coordenadas homogêneas $(1, 1, 1)$, não se tem $x_0 = y_0 = z_0$, e portanto também não se tem $x_0 y_0 = x_0 z_0 = y_0 z_0$. A cónica de equação (5.5) passa por este ponto e pelos quatro anteriores se e só se os coeficientes α , β e γ são solução do sistema

$$\begin{cases} x_0 y_0 \alpha + x_0 z_0 \beta + y_0 z_0 \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}.$$

Uma vez que a matriz deste sistema tem característica 2, o espaço das soluções tem dimensão 1, e portanto as soluções (α, β, γ) existem e são todas proporcionais entre si, o que implica a existência e a unicidade da cónica pelos pontos dados. \square

Observação 5.2.5. Dados 5 pontos reais sobre $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sem três colineares, a única cónica em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ que passa por eles é uma cónica real. Portanto, qualquer cónica que contenha pelo menos 5 pontos reais é real.

Posição relativa de rectas e cónicas

Já vimos na Proposição 5.1.6 que, em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, qualquer recta e qualquer cónica intersectam-se. Vamos agora investigar com um pouco mais de detalhe a intersecção de rectas e cónicas no plano projectivo complexo.

Seja \mathcal{C} uma cónica regular de equação $XAX^T = 0$ (onde A é uma matriz simétrica) e sejam $Q(X, Y) = XAY^T$ (a forma bilinear em \mathbb{C}^3 cuja matriz em relação à base canónica é A) e $F(X) = Q(X, X)$ (a forma quadrática associada a Q). Note-se que Q é uma forma bilinear simétrica:

$$Q(Y, X) = YAX^T = (YAX^T)^T = XA^T Y^T = XAY^T = Q(X, Y).$$

Considere-se a intersecção de uma recta r com \mathcal{C} . Essa intersecção contém pelo menos um ponto: seja X_0 um tripleto de coordenadas homogêneas para esse ponto, e considere-se ainda

um triplete X_1 de coordenadas homogéneas para outro ponto de r . Os pontos de r admitem então tripletes de coordenadas homogéneas da forma $sX_0 + tX_1$, com $(s, t) \neq (0, 0)$ (e onde, para cada ponto de r , os valores de s e t só estão determinados a menos de multiplicação por um escalar não nulo). A equação $F(sX_0 + tX_1) = 0$ fica então

$$\begin{aligned} Q(sX_0 + tX_1, sX_0 + tX_1) &= 0 \\ s^2Q(X_0, X_0) + 2stQ(X_0, X_1) + t^2Q(X_1, X_1) &= 0 \\ 2stQ(X_0, X_1) + t^2F(X_1) &= 0. \end{aligned}$$

(No último passo utilizámos que $F(X_0) = 0$, uma vez que $X_0 \in \mathcal{C}$ por hipótese.)

Esta equação tem a solução óbvia $t = 0$, correspondente ao ponto de coordenadas homogéneas X_0 ; se $t \neq 0$, podemos supor que $t = 1$ e a equação tem uma segunda solução, dada por

$$s = -\frac{F(X_1)}{Q(X_0, X_1)}$$

a não ser que $Q(X_0, X_1) = 0$, caso em que não existe segunda solução.

Se a recta r intersecta \mathcal{C} num único ponto, dizemos que r é tangente a \mathcal{C} nesse ponto. Pelo que vimos, se esse ponto sobre \mathcal{C} tem coordenadas homogéneas X_0 , um ponto X pertence à recta tangente a \mathcal{C} em X_0 se e só se

$$Q(X_0, X) = 0,$$

o que nos dá uma equação homogénea da recta tangente.

Observação 5.2.6. Designe-se por $\nabla F(X)$ o *vector gradiente* da forma quadrática F , cujas coordenadas são as derivadas parciais de $F(X)$ em ordem às coordenadas x , y e z . Assim, por exemplo, se F é definida por

$$F(x, y, z) = x^2 - 2yz$$

temos $\nabla F(X) = (2x, -2z, -2y)$. É um exercício simples verificar que se tem

$$Q(X, Y) = \frac{1}{2} \langle \nabla F(X), Y \rangle$$

onde $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Portanto a equação da recta tangente a \mathcal{C} em X_0 também se pode escrever como

$$\langle \nabla F(X_0), X \rangle = 0.$$

Exemplo 5.2.7. Considere-se a elipse em \mathbb{R}^2 de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Esta elipse é a intersecção com \mathbb{R}^2 da cónica em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0.$$

A forma quadrática associada é, portanto, dada por

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2$$

e tem-se

$$\nabla F(x, y, z) = 2 \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, -z \right).$$

Dado um ponto (x_0, y_0) da elipse em \mathbb{R}^2 , ele admite coordenadas homogéneas $(x_0, y_0, 1)$ em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, e portanto a tangente à elipse nesse ponto admite equação homogénea

$$\langle \nabla F(x_0, y_0, 1), (x, y, z) \rangle = 0, \text{ ou seja, } \frac{x_0}{a^2} \cdot x + \frac{y_0}{b^2} \cdot y - z = 0.$$

Para obter uma equação cartesiana da tangente em \mathbb{R}^2 , basta pôr $z = 1$, e obtém-se a equação

$$\frac{x_0}{a^2} \cdot x + \frac{y_0}{b^2} \cdot y = 1.$$

Observação 5.2.8. A recta tangente a uma cónica real num ponto real é uma recta real.

Observação 5.2.9. Se r não for tangente à cónica \mathcal{C} , então r intersecta \mathcal{C} em dois pontos. Se \mathcal{C} e r forem reais, os pontos de intersecção são ambos reais ou são complexos conjugados (porquê?).

Parte afim real de uma cónica regular

Vamos parar um pouco para verificar, como convém, que as cónicas com que estamos a trabalhar neste capítulo são, a menos de alguns detalhes, essencialmente as mesmas com que trabalhámos no Capítulo 4. As cónicas singulares, que são reuniões de duas rectas, são “novas”. Mas vamos ver que as cónicas (reais) regulares, quando intersectadas com \mathbb{R}^2 , são sempre elipses, parábolas ou hipérbolas (quando essa intersecção não é vazia).

Seja \mathcal{C} uma cónica regular em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de equação $XAX^T = 0$, onde A é uma matriz simétrica com entradas reais. Seja A' a submatriz formada pelas duas primeiras linhas e pelas duas primeiras colunas de A . Então A' é uma matriz 2×2 simétrica, e portanto, pelo Teorema Espectral, A' pode ser diagonalizada através de uma matriz ortogonal, i.e., existe uma matriz ortogonal real 2×2 P tal que

$$P^{-1}A'P = P^T A'P = D$$

onde D é da forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Suponha-se que $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$, e seja

$$M = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & 0 \\ p_{12} & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note-se que a submatriz de M formada pelas duas primeiras linhas e pelas duas primeiras colunas é precisamente $P^T = P^{-1}$. Seja $f = h_M$ a homografia de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ associada a M . Então a restrição de f a \mathbb{R}^2 é uma isometria com matriz P^T . Além disso, $f(\mathcal{C})$ tem equação

$$XA^*X^T = 0$$

onde $A^* = (M^{-1})^T A M^{-1} = M A M^T$. A submatriz formada pelas duas primeiras linhas e pelas duas primeiras colunas deste produto é precisamente $P^T A' P = D$, e portanto A^* tem a forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Como $f(\mathcal{C}) \cap \mathbb{R}^2$ é a imagem de $\mathcal{C} \cap \mathbb{R}^2$ por uma isometria, basta verificar que $f(\mathcal{C})$ é uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole. A equação de \mathcal{C} em \mathbb{R}^2 tem o seguinte aspecto:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2dx + 2ey + c = 0.$$

Agora temos dois casos:

- (i) Se λ_1 e λ_2 são ambos diferentes de 0, então, aplicando a $f(\mathcal{C})$ uma translação de \mathbb{R}^2 , podemos eliminar os termos lineares e obtemos uma cónica de equação

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c' = 0.$$

Se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal, isto é a equação de uma elipse (caso c' não tenha o mesmo sinal de λ_1 e λ_2) ou não tem soluções (caso contrário). Se λ_1 e λ_2 têm sinais diferentes, isto é a equação de uma hipérbole.

- (ii) Se um dos números λ_1 e λ_2 é igual a 0, podemos supor sem perda de generalidade que apenas λ_1 é igual a 0 (porque não podem ser ambos nulos?). Aplicando uma translação de \mathbb{R}^2 a $f(\mathcal{C})$, podemos eliminar o termo linear $2ey$, e obtemos uma cónica de equação

$$\lambda_2 y^2 + 2dx + c' = 0$$

que é claramente uma parábola.

Tangentes nos pontos do infinito

Algumas cónicas \mathcal{C} no plano Euclidiano, quando “projectivizadas” (isto é, quando se considera a cónica no plano projectivo cuja restrição a \mathbb{R}^2 é \mathcal{C}) passam a ter pontos do infinito. As tangentes à cónica nesses pontos são precisamente as rectas a que chamávamos assíntotas quando estudámos as cónicas no plano Euclidiano.

- Considere-se a parábola em \mathbb{R}^2 de equação $y^2 + 2px = 0$, onde $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. A equação homogénea correspondente é

$$y^2 + 2pxz = 0.$$

O único ponto do infinito nesta cónica (obtido substituindo $z = 0$) é o ponto de coordenadas homogéneas $(1, 0, 0)$. Pondo $F(x, y, z) = y^2 + 2pxz$, obtemos $\nabla F(x, y, z) = 2(pz, y, px)$, de modo que $\frac{1}{2}\nabla F(1, 0, 0) = (0, 0, p)$. Assim, pela Observação 5.2.6, a recta tangente à parábola no seu ponto do infinito tem equação $pz = 0$, ou seja, $z = 0$; é a recta do infinito, e por isso não a víamos como assíntota em \mathbb{R}^2 .

- A hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tem equação homogénea $F(x, y, z) = 0$, onde $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z^2$. Substituindo $z = 0$ na igualdade $F(x, y, z) = 0$, vemos que os pontos do infinito na hipérbole admitem coordenadas homogéneas $(a, b, 0)$ e $(a, -b, 0)$. Como $\frac{1}{2}\nabla F(x, y, z) = (\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, -z)$, as rectas tangentes à hipérbole no infinito, e portanto as suas assíntotas em \mathbb{R}^2 , admitem equações

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

Estas são tanto as equações homogéneas como as equações cartesianas das rectas.

- Uma elipse não contém pontos do infinito após ser “projectivizada”.

Equação tangencial de uma cónica

Vamos começar por estabelecer uma convenção útil:

Definição 5.2.10. Seja r uma recta em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Dizemos que (a, b, c) é um *tripleto de coordenadas homogéneas para r* se r admite a equação homogénea $ax + by + cz = 0$.

Considere-se uma cónica regular \mathcal{C} com matriz A . Sabemos que, se X_0 é um tripleto de coordenadas homogéneas para um ponto de \mathcal{C} , então a recta tangente a \mathcal{C} nesse ponto admite equação homogénea

$$X_0AX^T = 0.$$

Assim, a recta tangente a \mathcal{C} nesse ponto tem X_0A como tripleto de coordenadas homogéneas. Mas, se $D = X_0A$, então tem-se

$$DA^{-1}D^T = (X_0A)A^{-1}(X_0A)^T = X_0A^T X_0^T = X_0AX_0^T = 0.$$

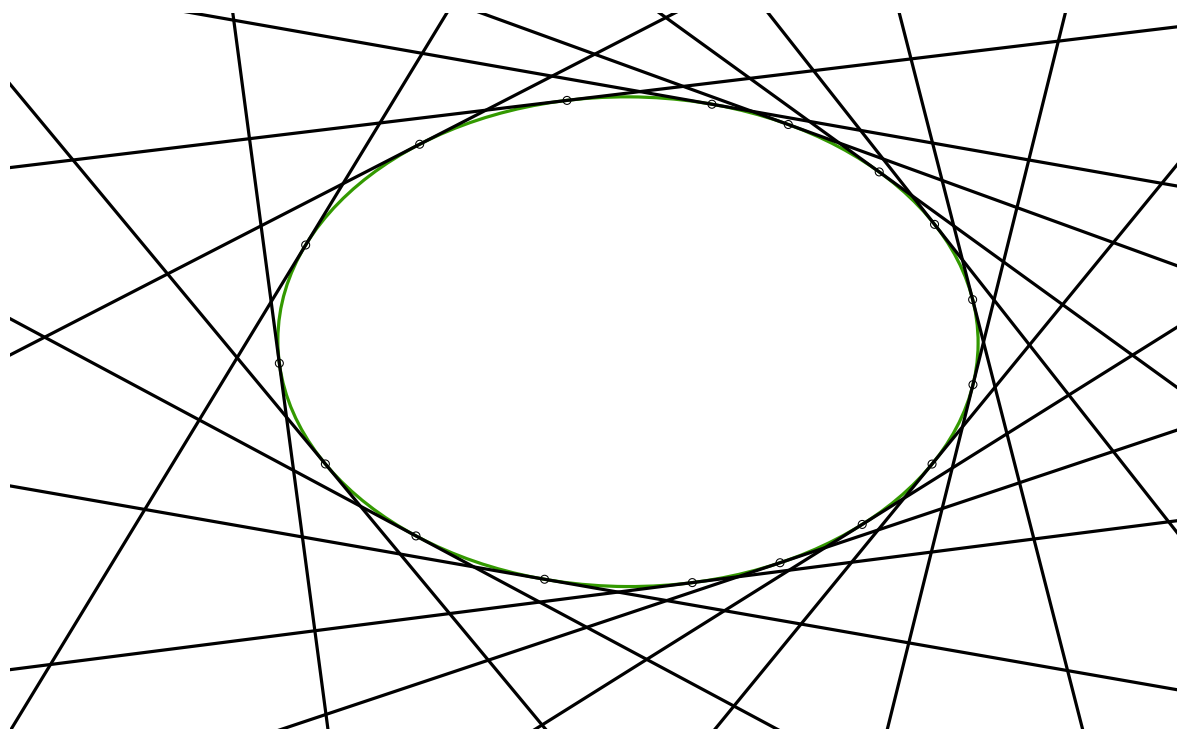
Reciprocamente, suponha-se que uma recta r tem D como tripleto de coordenadas homogéneas, com D tal que $DA^{-1}D^T = 0$. Seja $X_0 = DA^{-1}$. Então tem-se

$$X_0AX_0^T = (DA^{-1})A(DA^{-1})^T = DA^{-1}D^T = 0.$$

Ou seja, X_0 é um tripleto de coordenadas homogéneas para um ponto de \mathcal{C} , e, como $D = X_0A$, a recta r é tangente a \mathcal{C} . Conclui-se o seguinte:

Proposição 5.2.11 (Equação tangencial de uma cónica regular). *Seja \mathcal{C} uma cónica regular com matriz A . Então uma recta r de coordenadas homogéneas D é tangente a \mathcal{C} se e só se*

$$DA^{-1}D^T = 0.$$



Exemplo 5.2.12. Considere-se a elipse de equação homogénea

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0$$

a que corresponde a matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Então

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de modo que, pondo $D = (u, v, w)$, a equação tangencial da elipse é $a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$. Se só nos interessarem rectas reais, podemos tomar $w = -1$; assim, as tangentes à elipse têm equações cartesianas da forma

$$ux + vy = 1 \quad \text{onde} \quad a^2u^2 + b^2v^2 = 1.$$

§5.3 Polaridade em relação a uma cónica

Chegamos a uma definição central no estudo das cónicas no plano projectivo.

Definição 5.3.1. Seja \mathcal{C} uma cónica regular em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ com matriz simétrica associada A ; seja $Q(X, Y) = XAY^T$. Dizemos que dois pontos P e P' com coordenadas homogéneas X e X' são *conjugados* em relação a \mathcal{C} se

$$Q(X, X') = 0.$$

Observação 5.3.2. A relação de conjugação é simétrica, devido à simetria da forma bilinear Q . Além disso, um ponto P é conjugado de si próprio se e só se $P \in \mathcal{C}$.

Não é difícil ver que o conjunto dos pontos conjugados de um dado ponto é uma recta. Isso leva à seguinte definição:

Proposição/Definição 5.3.3 (Pólo e polar).

- Fixado um ponto P de coordenadas homogéneas X , o conjunto dos pontos que são conjugados de P em relação a \mathcal{C} constitui uma recta, de coordenadas homogéneas $D = XA$. Essa recta diz-se a *polar* de P (em relação a \mathcal{C}).
- Dada uma recta em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, ela é a polar de exactamente um ponto (com coordenadas homogéneas DA^{-1}). Esse ponto diz-se o *pólo* da recta (em relação a \mathcal{C}).

Observação 5.3.4. Se $P \in \mathcal{C}$, a polar de P é a recta tangente a \mathcal{C} em P . (Logo, se r for uma recta tangente a \mathcal{C} , então o seu pólo é o ponto de tangência.) Além disso, a polar de P passa por P se e só se $P \in \mathcal{C}$.

Quando se trabalha com pólos e polares, a seguinte convenção tem a sua utilidade:

Dado um ponto representado por uma letra maiúscula, representamos a sua polar (em relação a uma determinada cónica) pela letra minúscula correspondente. Assim, por exemplo p é a polar de P , e P é o pólo de p .

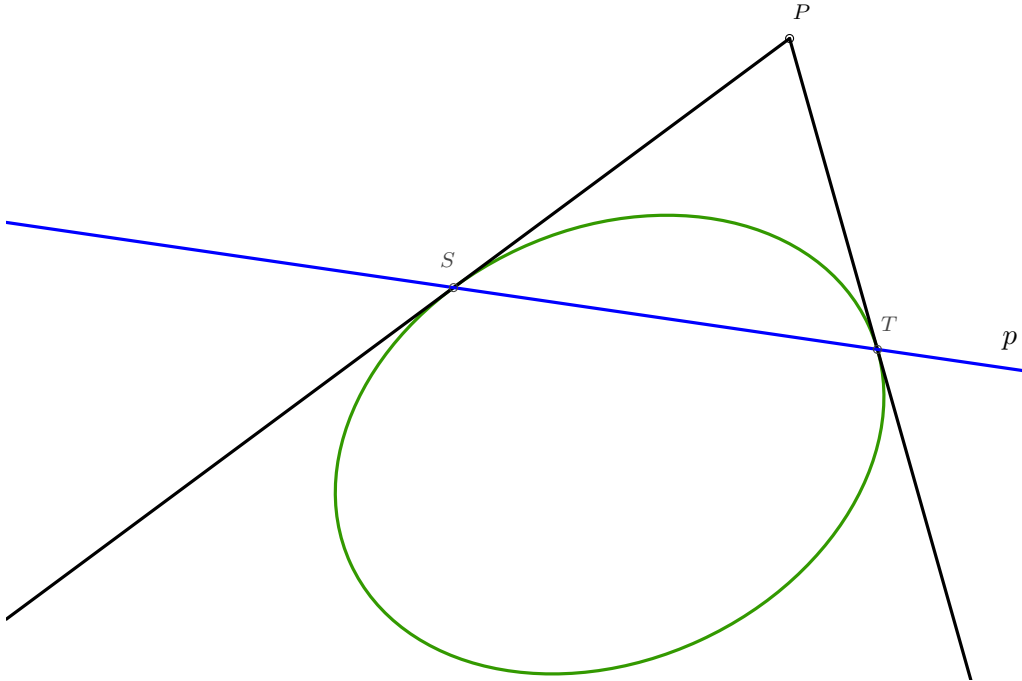
A simetria da relação de conjugação traduz-se, em termos de polares, no seguinte corolário óbvio:

Corolário 5.3.5 (Teorema de La Hire's). *Para quaisquer dois pontos A e B em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, tem-se $A \in b$ se e só se $B \in a$.*

Demonstração. Ambas as condições equivalem a A e B serem conjugados em relação a cónica considerada. \square

Resulta facilmente que a transformação que envia cada ponto na sua polar em relação a uma cónica fixa envia pontos colineares em rectas concorrentes. Podemos também utilizar o Teorema de La Hire's para dar uma descrição mais geométrica da polar de um ponto.

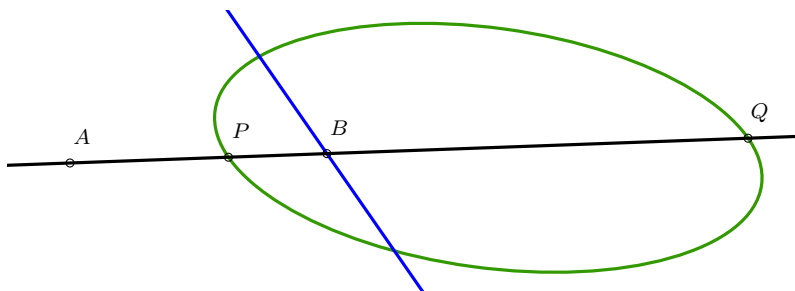
Proposição 5.3.6. *Seja P um ponto exterior à cônica regular C , e sejam S e T pontos em C tais que as retas PS e PT são tangentes a C . Então a polar p de P é a recta ST .*



Demonstração. Como s é a recta tangente a C em S , P pertence a s , e portanto S pertence a p pelo Teorema de La Hire's (Corolário 5.3.5). Analogamente, T pertence a p . Portanto p é a recta ST , como pretendido. \square

Por esta altura, os leitores mais atentos deverão estar a pensar “Mas nós já não tínhamos chamado polar a outra coisa, no final do Capítulo 3?”. Sim, tínhamos definido a polar de um ponto em relação a uma circunferência. E, portanto, não deve ser surpreendente saber que, quando a cônica regular com que estamos a trabalhar é (restrita a \mathbb{R}^2) uma circunferência, a polar conforme definida aqui é a mesma polar que definimos no Capítulo 3. A prova é imediata combinando o seguinte resultado com o Lema 3.6.3:

Lema 5.3.7. *Sejam C uma cônica regular em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ e A e B pontos distintos não pertencentes a C . Suponha-se que a recta AB intersecta C nos pontos P e Q . Então B pertence à polar de A em relação a C (ou seja, A e B são conjugados) se e só se $[P, Q; A, B] = -1$.*



Demonstração. Sejam X_0 e X_1 coordenadas homogêneas de A e B , respectivamente. Sabemos do Capítulo 3 que os pontos da recta r que passa por A e B são os pontos que admitem

coordenadas homogéneas da forma $sX_0 + tX_1$, com $(s, t) \neq (0, 0)$, e além disso a estrutura de recta projectiva em r é definida pela bijecção $r \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dada por

$$[sX_0 + tX_1] \mapsto [(s, t)]. \quad (5.6)$$

Suponha-se que \mathcal{C} é dada pela equação $F(X) = 0$, onde $F(X) = Q(X, X)$ e Q é uma forma bilinear simétrica. A intersecção de r e \mathcal{C} é dada pela equação $Q(sX_0 + tX_1, sX_0 + tX_1) = 0$, que, usando a bilinearidade de Q , equivale a

$$F(X_0)s^2 + 2Q(X_0, X_1)st + F(X_1)t^2 = 0.$$

Como A e B não pertencem a \mathcal{C} , $s = 0$ e $t = 0$ não são soluções da equação. Podemos assim supor que $t = 1$, e obtemos a equação

$$F(X_0)s^2 + 2Q(X_0, X_1)s + F(X_1) = 0.$$

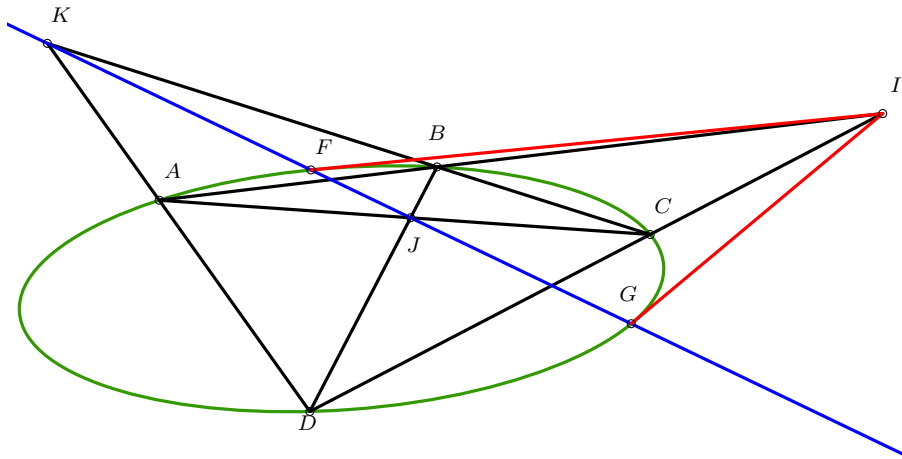
Designem-se por s_1 e s_2 as soluções desta equação, de modo que $P = [s_1X_0 + X_1]$ e $Q = [s_2X_0 + X_1]$. Pelas Fórmulas de Viète temos $s_1 + s_2 = -2Q(X_0, X_1)$. Logo A e B são conjugados em relação a \mathcal{C} se e só se $s_1 + s_2 = 0$.

Por outro lado, a bijecção dada por (5.6) envia P, Q, A e B nos pontos de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de coordenadas homogéneas $(s_1, 1), (s_2, 1), (1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente. Calculando a razão cruzada destes quatro pontos utilizando directamente a Definição 3.1.10, obtemos

$$[P, Q; A, B] = \frac{s_2}{s_1}.$$

Portanto a condição $[P, Q; A, B] = -1$ equivale a $s_1 + s_2 = 0$, que, como vimos, equivale a A e B serem conjugados, e isto conclui a prova. \square

Observação 5.3.8. De maneira semelhante ao Lema 3.6.3, este resultado dá-nos um método para construir a polar de um ponto em relação a uma cónica regular utilizando apenas uma régua não graduada.



Seja I um ponto do qual queremos determinar a polar em relação à cónica regular \mathcal{C} . Tomam-se duas rectas por I , uma intersectando \mathcal{C} em A e B e outra intersectando \mathcal{C} em C e D . Intersectam-se as rectas AC e BD em K e as rectas AD e BC em J . Então a recta JK é a polar de I .

Para justificar isto, observe-se que, pelo Lema 3.4.12, temos

$$[AD, BC; KI, KJ] = -1.$$

Se $T = JK \cap AB$ e $S = JK \cap CD$, então estas quatro rectas cortam AB nos pontos A, B, I, T e cortam CD nos pontos D, C, I, S . Portanto os quartetos (A, B, I, T) e (C, D, I, S) são harmónicos. Como T é o conjugado harmónico de I em relação ao par (A, B) , conclui-se do Lema 5.3.7 que T pertence à polar de I . Analogamente, S pertence à polar de I . Logo a polar de I é a recta ST , ou seja, a recta JK .

Adicionalmente, note-se que, se a polar de I (portanto, a recta JK) intersectar \mathcal{C} nos pontos F e G , então, como F está na polar de I , também I está na polar de F , e portanto IF é tangente a \mathcal{C} ; analogamente, IG é tangente a \mathcal{C} . Obtivemos portanto um método para construir as tangentes a uma cónica (em particular, a uma circunferência) por um ponto exterior utilizando apenas régua não graduada.

§5.4 Homografias de cónicas e os Teoremas de Pascal e Brianchon

Para concluir a nossa viagem pelas cónicas no plano projectivo complexo, vamos mostrar que, talvez surpreendentemente, as cónicas regulares admitem uma estrutura natural de recta projectiva. De facto, fixando um ponto P numa cónica regular \mathcal{C} , podemos considerar a bijecção que associa a cada ponto $Q \in \mathcal{C}$ a recta PQ (se $Q = P$, interpretamos esta recta como a recta tangente a \mathcal{C} em P) e obtemos assim uma bijecção de \mathcal{C} no feixe das rectas que passam por P ; como já temos uma estrutura de recta projectiva nesse feixe, obtemos uma estrutura de recta projectiva em \mathcal{C} . Mas não é nada óbvio que essa estrutura de recta projectiva não depende da escolha de P .

Antes de avançarmos, precisamos de rever brevemente a estrutura de recta projectiva num feixe de rectas. Recorde-se que, fixado um ponto P no plano projectivo, definimos na Observação 3.4.11 uma estrutura de recta projectiva no conjunto das rectas que passam por P enviando primeiro cada recta que passa por P na sua intersecção com uma recta fixa ℓ , e aproveitando depois a estrutura de recta projectiva em ℓ ; mostrámos que isto não dependia da escolha de ℓ .

Acontece que existe uma outra maneira natural de definir uma estrutura de recta projectiva no conjunto das rectas que passam por P . Suponha-se que P admite um triplo de coordenadas homogéneas (x, y, z) . As rectas que passam por P são aquelas que admitem um triplo de coordenadas homogéneas (a, b, c) que satisfaz $ax + by + cz = 0$. Ora, o conjunto desses tripletos (a, b, c) é um espaço vectorial de dimensão 2, e portanto, se fixarmos dois tripletos (a, b, c) e (a', b', c') correspondentes a rectas distintas (o que equivale a (a, b, c) e (a', b', c') serem linearmente independentes) todos os tripletos de coordenadas homogéneas de rectas passando por P são da forma $s(a, b, c) + t(a', b', c')$, com s e t não ambos nulos.

Podemos, então, definir uma estrutura de recta projectiva no conjunto das rectas que passam por P do seguinte modo: começamos por fixar duas rectas distintas que passam por P , com tripletos de coordenadas homogéneas u e v , e enviamos a recta de coordenadas homogéneas $su + tv$ no ponto $[(s, t)] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Esta estrutura de recta projectiva não depende da escolha de u e v (a prova é inteiramente análoga à do Lema 3.2.7). Mas o mais importante é que esta estrutura é exactamente a mesma estrutura que tínhamos definido anteriormente no conjunto das rectas que passam por P , e é isso que a próxima proposição afirma.

Proposição 5.4.1. *A estrutura de recta projectiva definida acima no conjunto das rectas que passam por P coincide com a estrutura de recta projectiva definida na Observação 3.4.11.*

Demonstração. Utilizando uma homografia apropriada, podemos supor que P admite coordenadas homogéneas $(1, 0, 0)$. A estrutura de recta projectiva que acabamos de definir resulta da bijecção que associa à recta de equação $sy + tz = 0$ o ponto $[(s, t)] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, já que as rectas de equação $y = 0$ e $z = 0$ são duas rectas distintas que passam por P .

Observe-se agora que a estrutura de recta projectiva na recta de equação $x = 0$ resulta da bijecção que associa ao ponto de coordenadas homogéneas $t(0, 1, 0) + s(0, 0, -1) = (0, t, -s)$ o ponto $[(s, t)] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Vejamos agora qual é uma bijecção que induz no conjunto das rectas que passam por P a estrutura *antiga* de recta projectiva. Uma recta que não passa por P é a recta de equação $x = 0$. Intersectando esta recta com a recta de equação $sy + tz = 0$ obtemos o ponto de coordenadas homogéneas $(0, t, -s)$, que posteriormente é enviado em $[(s, t)]$ por uma bijecção que induz a estrutura de recta projectiva na recta de equação $x = 0$. Esta é precisamente a bijecção que tínhamos obtido no parágrafo anterior, o que conclui a prova. \square

Estrutura de recta projectiva numa cónica regular

Precisamos, antes de mais, da seguinte definição:

Definição 5.4.2 (Pontos duplos de uma homografia). Sejam A e A' pontos distintos em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, e sejam $\mathcal{F}(A)$ e $\mathcal{F}(A')$ os feixes constituídos pelas rectas que passam por A e por A' , respectivamente. Seja $\pi : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A')$ uma homografia que não fixa a recta AA' . Um ponto diz-se um *ponto duplo* de π se for da forma $\ell \cap \pi(\ell)$ para alguma recta $\ell \in \mathcal{F}(A)$.

O resultado central no que toca aos pontos duplos de homografias entre feixes de rectas é o seguinte:

Lema 5.4.3. *Seja $\pi : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A')$ uma homografia que não fixa AA' . Então o conjunto dos pontos duplos de π é uma cónica regular que passa por A e A' .*

Demonstração. Utilizando uma homografia apropriada, podemos supor que A e A' admitem coordenadas homogéneas $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$, respectivamente.

A estrutura de recta projectiva em $\mathcal{F}(A)$ é induzida pela bijecção que envia a recta de equação $sy + tz = 0$ no ponto $[(s, t)] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$; a estrutura de recta projectiva em $\mathcal{F}(A')$ é induzida pela bijecção que envia a recta de equação $s'x + t'z = 0$ no ponto $[(s', t')] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Se a homografia π envia a recta de equação $sy + tz = 0$ na recta de equação $s'x + t'z = 0$, o ponto $[(s', t')]$ deve exprimir-se em função do ponto $[(s, t)]$ através de uma homografia de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, isto é, temos uma relação da forma

$$[(s', t')] = [(as + bt, cs + dt)]$$

onde a, b, c, d são tais que $ad - bc \neq 0$. Além disso, a condição de π não fixar a recta AA' (que é a recta de equação $z = 0$) garante que $b \neq 0$. A igualdade $[(s', t')] = [(as + bt, cs + dt)]$ equivale a ter-se

$$t'(as + bt) = s'(cs + dt),$$

isto é,

$$btt' + ast' - ds't - css' = 0. \quad (5.7)$$

Suponha-se agora que (x, y, z) são coordenadas homogéneas de um ponto duplo de π , isto é, de um ponto que pertence a rectas de equações $sy + tz = 0$ e $s'x + t'z = 0$ com s, t, s', t' relacionados por (5.7). Multiplicando (5.7) por z^2 , vem

$$b(tz)(t'z) + a(t'z)sz - d(tz)s'z - css'z^2 = 0$$

que, usando $tz = -sy$ e $t'z = -s'x$, simplifica para

$$ss'(bxy - axz + dyz - cz^2) = 0.$$

Portanto, pelo menos quando $ss' \neq 0$, o ponto duplo em causa pertence à cónica de equação $bxy - axz + dyz - cz^2 = 0$. Note-se que esta cónica passa por A e A' . Além disso, o caso $s = 0$ corresponde ao caso em que a recta escolhida a passar por A é a recta AA' (que dá o ponto duplo A) e o caso $s' = 0$ corresponde ao caso em que a imagem da recta escolhida a passar por A é a recta AA' (que dá o ponto duplo A'). Conclui-se que todos os pontos duplos de π pertencem à cónica \mathcal{C} de equação $bxy - axz + dyz - cz^2 = 0$. Como

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{2} & -\frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} & 0 & \frac{d}{2} \\ -\frac{a}{2} & \frac{d}{2} & -c \end{pmatrix} = \frac{-b(ad - bc)}{4} \neq 0$$

conclui-se que a cónica é regular.

Reciprocamente, suponha-se que (x, y, z) é um triplo de coordenadas homogéneas de um ponto V de \mathcal{C} , de modo que $bxy - axz + dyz - cz^2 = 0$; queremos provar que V é um ponto duplo de π . Suponha-se que as rectas AV e $A'V$ admitem equações $sy + tz = 0$ e $s'x + t'z = 0$; queremos provar que s, t, s', t' estão relacionados por (5.7). Para isso basta multiplicar a igualdade $bxy - axz + dyz - cz^2 = 0$ por ss' ; substituindo na igualdade obtida sy por $-tz$ e $s'x$ por $-tz$, obtemos a igualdade (5.7) multiplicada por z^2 , o que prova que temos (5.7) desde que $z \neq 0$. Se $z = 0$, da equação de \mathcal{C} resulta que $x = 0$ ou $y = 0$, pelo que $V = A$ ou $V = A'$; mas estes são evidentemente pontos duplos de π (porquê?), provando o resultado. \square

Podemos dizer algo ainda mais forte. *Todas* as cónicas regulares que passam pelos pontos de coordenadas homogéneas $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ têm equação da forma $bxy - axz + dyz - cz^2 = 0$, com $\frac{-b(ad-bc)}{4} \neq 0$. Mas então, da prova anterior, decorre que, dada *qualquer* cónica regular \mathcal{C} passando por A e A' , existe uma homografia $\pi : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A')$ (que não fixa AA') tal que \mathcal{C} é o conjunto dos pontos duplos de π . Ou seja, a correspondência que, dado um ponto $P \in \mathcal{C}$, associa à recta AP a recta $A'P$ é uma homografia.

Mas, fixado um ponto $A \in \mathcal{C}$, sendo \mathcal{C} uma cónica regular, podemos definir uma estrutura de recta projectiva em \mathcal{C} enviando inicialmente cada ponto $V \in \mathcal{C}$ na recta AV (se $V = A$, enviamos na recta tangente a \mathcal{C} em A) e, posteriormente, aproveitando a estrutura de recta projectiva já existente no feixe de rectas que passam por A . Isto induz uma noção de razão dupla de quaisquer quatro pontos distintos P, Q, R e S em \mathcal{C} , como sendo dada pela razão dupla $[AP, AQ; AR, AS]$. Suponha-se agora que escolhemos um ponto diferente A' . Então as rectas $A'P, A'Q, A'R, A'S$ são obtidas a partir de AP, AQ, AR, AS por uma homografia $\pi : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A')$, e portanto $[A'P, A'Q; A'R, A'S] = [AP, AQ; AR, AS]$. Ou seja, a noção de razão dupla obtida não depende da escolha de A , e portanto (pela Proposição 3.1.14) a estrutura de recta projectiva obtida não depende de A ! Temos assim uma estrutura natural de recta projectiva numa cónica regular.

Podemos assim falar em homografias entre cónicas regulares, e em particular de uma cónica regular em si mesma. Vamos provar um resultado simples sobre estas homografias a partir do qual obteremos os clássicos Teoremas de Pascal e Brianchon.

Proposição/Definição 5.4.4. Seja \mathcal{C} uma cónica regular em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, e seja $h : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ uma homografia diferente da identidade. Dado um ponto P , indicamos a sua imagem por h por P' . Então todos os pontos da forma $AB' \cap A'B$ estão sobre uma mesma recta. Essa recta diz-se o *eixo* da homografia h .

Para provar este resultado, precisamos de uma observação simples sobre homografias de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Proposição 5.4.5. *Seja ℓ um conjunto com uma estrutura de recta projectiva complexa, e seja $h : \ell \rightarrow \ell$ uma homografia. Então h tem (pelo menos) um ponto fixo.*

Demonstração. Podemos naturalmente supor que ℓ é $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$; suponha-se que $h = h_M$, onde M é uma matriz invertível 2×2 com entradas complexas. A aplicação linear $T_M : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ que tem M como matriz em relação à base canónica, como qualquer endomorfismo de um espaço vectorial complexo de dimensão finita, tem um valor próprio: seja ele λ , e seja v um vector próprio associado. Tem-se então

$$h([v]) = h_M([v]) = [T_M(v)] = [\lambda v] = [v]$$

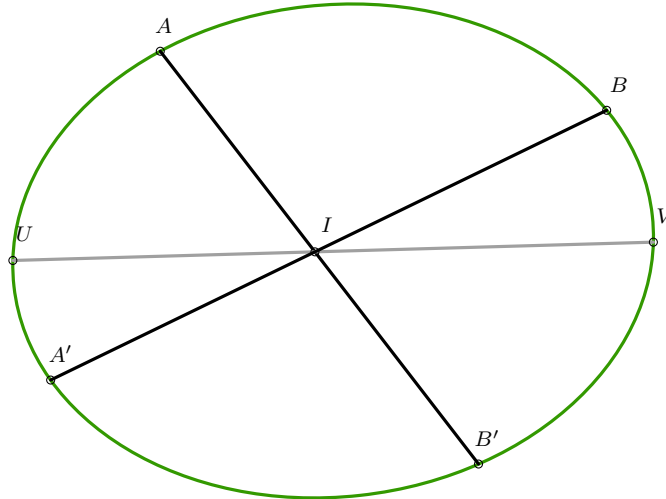
e portanto $[v]$ é um ponto fixo. \square

Com isto, estamos prontos para provar a Proposição 5.4.4.

Demonstração. Vamos ver dois casos.

Caso 1: h tem mais do que um ponto fixo.

Sejam U e V pontos fixos distintos de h . Sabemos então que não há mais pontos fixos (pois uma homografia de \mathcal{C} que fixe três pontos distintos é a identidade). Vamos provar que qualquer ponto da forma $AB' \cap A'B$ pertence à recta $r = UV$.



Se um dos pontos A e B é U ou V não há nada a provar. Suponha-se agora que não é o caso. Seja $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow r$ a projecção de \mathcal{C} em r de centro A' , isto é, a aplicação que a cada ponto X em \mathcal{C} faz corresponder a intersecção da recta $A'X$ com r (onde, como habitual, se $A' = X$ interpretamos a recta $A'X$ como a recta tangente a \mathcal{C} em A'). Seja $\psi : r \rightarrow \mathcal{C}$ a projecção de r em \mathcal{C} de centro A , isto é, a aplicação que a cada ponto X em r faz corresponder a segunda intersecção da recta AX com \mathcal{C} (tomamos a intersecção diferente de A , excepto se AX for tangente a \mathcal{C}).

As aplicações φ e ψ são ambas homografias, portanto a composta $\psi \circ \varphi$ também é uma homografia. Mas $\psi \circ \varphi$ envia A em A' e fixa U e V , portanto coincide com h em três pontos distintos. Logo $\psi \circ \varphi = h$. Seja agora $I = A'B \cap r$. A projecção φ envia B em I , e a projecção ψ envia I na segunda intersecção de AI com \mathcal{C} . Portanto $h = \psi \circ \varphi$ envia B na segunda intersecção de AI com \mathcal{C} , pelo que A , I e B' são colineares, e portanto AB' e $A'B$ intersectam-se em I , que pertence a r por construção.

Caso 2: h tem um único ponto fixo.

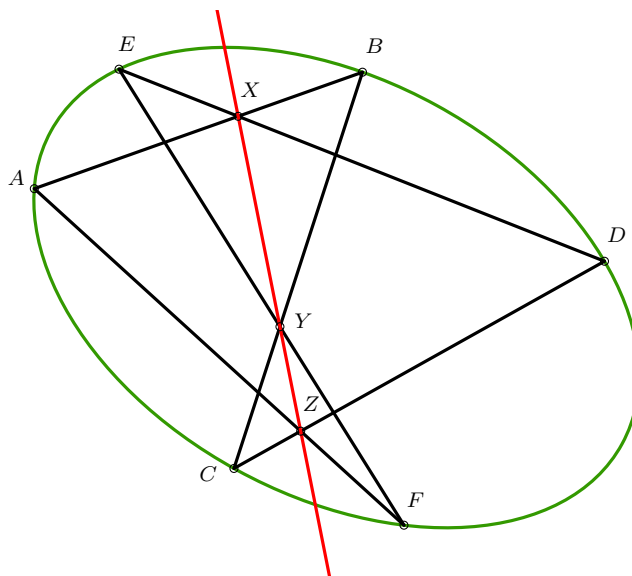
Seja U o único ponto fixo de h . Sejam A e B pontos distintos de U , e considere-se o ponto $I = AB' \cap A'B$.

Afirmamos que UI é tangente a \mathcal{C} . Se não for o caso, UI intersecta \mathcal{C} num segundo ponto V . Considere-se a projecção $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow UV$ com centro A' e a projecção $\psi : UV \rightarrow \mathcal{C}$ com centro A . A homografia composta $\psi \circ \varphi$ envia A em A' , B em B' e U em U . Portanto coincide com h em três pontos distintos, logo $h = \psi \circ \varphi$. Mas $\psi \circ \varphi$ fixa o ponto V , o que contradiz a suposição de que U é o único ponto fixo de h . Logo UI é tangente a \mathcal{C} .

Mas, como A e B são arbitrários, conclui-se que todas as intersecções da forma $AB' \cap A'B$ estão sobre a tangente a \mathcal{C} em U , e em particular estão sobre uma mesma recta, estando a prova terminada. \square

Desta noção resulta de graça uma das jóias da Geometria Projectiva: o *Teorema de Pascal*.

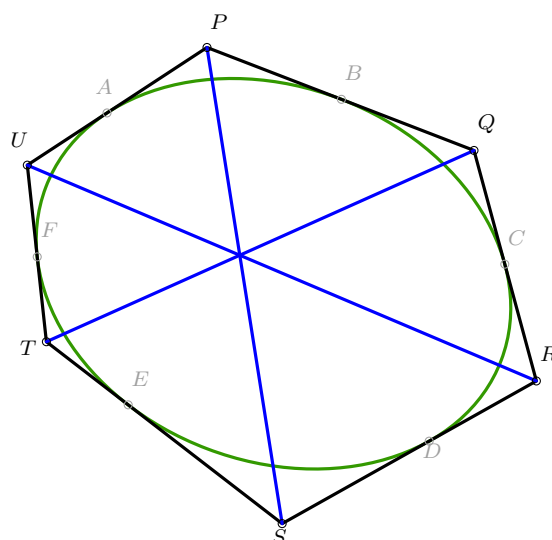
Teorema 5.4.6 (Teorema de Pascal). *Sejam A, B, C, D, E e F seis pontos distintos sobre uma cónica regular \mathcal{C} . Sejam $X = AB \cap DE$, $Y = BC \cap EF$ e $Z = CD \cap FA$. Então X, Y e Z são colineares.*



Demonstração. Seja h a (única) homografia de \mathcal{C} que envia A em D , B em E e C em F . Então X, Y e Z estão sobre o eixo de h , sendo portanto colineares. \square

Utilizando a teoria que desenvolvemos antes sobre polaridade, obtemos o seguinte resultado irmão:

Teorema 5.4.7 (Teorema de Brianchon). *As diagonais principais de um hexágono circunscrito a uma cónica regular são concorrentes. Isto é, se a, b, c, d, e e f são seis rectas tangentes a uma cónica regular \mathcal{C} e $P = a \cap b$, $Q = b \cap c$, $R = c \cap d$, $S = d \cap e$, $T = e \cap f$ e $U = f \cap a$, então as rectas PS, QT e RU são concorrentes.*



Demonstração. Sejam A, B, C, D, E e F os pontos de tangência de a, b, c, d, e e f , respectivamente, com \mathcal{C} . Pelo Teorema de Pascal os pontos $AB \cap DE$, $BC \cap EF$ e $CD \cap FA$ estão

sobre uma mesma recta k . Seja K o pólo de k em relação a \mathcal{C} . Vamos mostrar que K pertence às rectas PS , QT e RU .

Basta provar que K pertence à recta PS ; as outras são análogas. Pela Proposição 5.3.6, a polar p de P é a recta AB e a polar s de S é a recta DE . As rectas AB , DE e k (isto é, as rectas p , s e k) são concorrentes por construção; seja J o seu ponto de intersecção. Como J está nas polares de P , S e K , pelo Teorema de La Hire's (Corolário 5.3.5) P , S e K estão sobre a polar de J . Em particular, K é colinear com P e S , e a prova está acabada. \square

§5.5 Exercícios e Problemas

5.1. Dada uma cónica \mathcal{C} em \mathbb{R}^2 , chamamos *diâmetro* de \mathcal{C} a uma recta cujo pólo em relação a \mathcal{C} seja um ponto do infinito. Dois diâmetros de \mathcal{C} dizem-se *conjugados* se cada um deles passar pelo pólo do outro (isto é, se os pólos desses diâmetros forem pontos conjugados).

- (a) Como são os diâmetros de uma parábola? E de uma elipse ou hipérbole?
- (b) Suponha que \mathcal{C} é uma elipse/hipérbole de entro O , e que l e m são diâmetros conjugados de \mathcal{C} . Suponha ainda que l intersecta \mathcal{C} nos pontos P e Q . Mostre que as rectas tangentes a \mathcal{C} em P e em Q são paralelas a m , e que os pontos médios das cordas de \mathcal{C} paralelas a l pertencem todos a m .

5.2. Sejam A, B, C, A', B', C' seis pontos no plano projectivo sem três deles colineares. Prove o recíproco do Teorema de Pascal: se os pontos $X = BC' \cap B'C$, $Y = AC' \cap A'C$ e $Z = AB' \cap A'B$ forem colineares, então A, B, C, A', B', C' estão sobre uma mesma cónica.

5.3. Seja \mathcal{C} uma cónica regular no plano projectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ e seja P um ponto exterior a \mathcal{C} . Considere a aplicação $h : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ definida do seguinte modo: para cada $A \in \mathcal{C}$, $h(A)$ é o segundo ponto de intersecção da recta PA com \mathcal{C} ; se PA for tangente a \mathcal{C} , tomamos $h(A) = A$. Mostre que h é uma homografia de \mathcal{C} .

5.4. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} circunferências ortogonais no plano Euclidiano, e seja h a restrição a \mathcal{C} da inversão em \mathcal{D} . Mostre que h é uma homografia de \mathcal{C} .

5.5. (a) Seja \mathcal{C} uma cónica regular. Sejam T um ponto de \mathcal{C} , $P \neq T$ um ponto na tangente t a \mathcal{C} em T , e $A \neq B$ dois pontos de \mathcal{C} tais que $P \in AB$. Sejam ainda a e b as tangentes a \mathcal{C} em A e B , e sejam $R = a \cap b$, $D = t \cap a$ e $E = t \cap b$. Mostre que:

- (i) RT é a polar de P em relação a \mathcal{C} ;
- (ii) T é o conjugado harmónico de P em relação ao par (D, E) .

- (b) Conclua que, para qualquer recta t tangente a uma hipérbole, o ponto médio do segmento cortado em t pelas duas assíntotas é o ponto de tangência.

5.6. Dados quatro pontos A, B, C, D numa cónica regular \mathcal{C} , mostre que as seguintes condições são equivalentes:

- (i) As tangentes a \mathcal{C} por A e C intersectam-se sobre BD ;
- (ii) As tangentes a \mathcal{C} por B e D intersectam-se sobre AC ;
- (iii) $[A, C; B, D] = -1$.