指数大小的 ℓ_1 奇距子集
Exponential odd-distance sets under the Manhattan metric

闫俊

University of Warwick

合作者:

Alberto Espuny Díaz, Emma Hogan, Freddie Illingworth, Lukas Michel, Julien Portier

山东大学数学新星讲坛

2024 年 11 月 12 日

目录

等距子集

定义

度量空间 (M,d) 内的子集 S 是一个**等距子集 (equilateral set)**如果任意不同两点 $x,y\in S$ 之间的距离 $d(x,y)$ 都相等.

例子

(M,d)	$(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_1)$	$(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_2)$	$(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_\infty)$
S	$\{\pm\mathbf{e}_i \mid i\in[n]\}$	单位 n-单纯形	超方形 $=\{-1,1\}^n$
大小	$2n$	$n+1$	2^n

定义

对 $1\le p\le\infty$, 定义$e_p(n)$为 $\ell_p^n=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_p)$ 内**最大**的等距子集的大小.

等距子集: 已知结果

定理

- $e_2(n) = n + 1$.
- [Petty, 1971] $e_\infty(n) = 2^n$.
- [Alon, Pudlák, 2003] $e_1(n) = O(n \log n)$.

猜想 (Kusner, 1983)

- $e_1(n) = 2n$.
- 对任意 $1 < p < \infty$, $e_p(n) = n + 1$.

等距子集: 已知结果

猜想 (Kusner, 1983)

- $e_1(n) = 2n$.
- 对任意 $1 < p < \infty$, $e_p(n) = n + 1$.

定理 (Alon, Pudlák, 2003)

- 对任意奇数 $p \geq 1$, $e_p(n) = O_p(n \log n)$.
- 对任意 $1 \leq p < \infty$, $e_p(n) = O_p(n^{1+\frac{3}{2p-1}})$.

定理 (Swanepoel, 2004)

- $e_4(n) = n + 1$.
- 对任意偶数 $p \geq 2$, $e_p(n) \leq \frac{pn}{2} + 1$.
- 对任意 $1 < p < 2$, 只要 n 足够大, $e_p(n) > n + 1$. 例如对任意 $n \geq 6$, $e_{1.5}(n) \geq \left\lfloor \frac{4n}{3} \right\rfloor$.

奇距子集

定义

度量空间 (M,d) 内的子集 S 是一个奇距子集 (odd-distance set)如果任意不同两点 $x,y \in S$ 之间的距离 $d(x,y)$ 都是一个奇（整）数.

例子

(M,d)	$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$	$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$	$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$
S	$\{\pm\frac{1}{2}\mathbf{e}_i \mid i \in [n]\}$	单位 n-单纯形	超方形 $=\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}^n$
大小	$2n$	$n+1$	2^n

定义

对 $1 \le p \le \infty$, 定义$\mathrm{odd}_p(n)$为 $\ell_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ 内最大的奇距子集的大小.

奇距子集: 已知结果

定理 (Graham, Rothschild, Straus, 1974)

- $\mathrm{odd}_2(n) = \begin{cases} n+1, & n \not\equiv 14 \pmod{16}, \\ n+2, & n \equiv 14 \pmod{16}. \end{cases}$

定理 (Golovanov, Kupavskii, Sagdeev, 2023)

- $\mathrm{odd}_\infty(n) = 2^n$.
- $(\frac{7}{3} - o(1))n \le \mathrm{odd}_1(n) \le (4 + o(1))n!n\log n$.

奇距子集：我们的新结果

定义

- $\frac{1}{2}\mathbb{Z} = \{n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{n + \frac{1}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{a}{2} \mid a \in \mathbb{Z}\}$.
- $\mathcal{T} = \{\frac{a}{2^b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$.

定理 (Espuny Díaz, Hogan, Illingworth, Michel, Portier, Y., 2024+)

- $((\frac{1}{2}\mathbb{Z})^n, \|\cdot\|_1)$ 内**存在**一个大小为2^n的奇距子集.
  所以 $\mathrm{odd}_1(n) \geq 2^n$.

- $((\frac{1}{2}\mathbb{Z})^n, \|\cdot\|_1)$ 内**最大**的奇距子集大小为2^n.
- 如果 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ 内存在一个大小为 k 的奇距子集，那么 $(\mathcal{T}^n, \|\cdot\|_1)$ 内也存在大小为 k 的奇距子集.

目录

下界构造: 想法

定理 (Espuny Díaz, Hogan, Illingworth, Michel, Portier, Y., 2024+)

$((\frac{1}{2}\mathbb{Z})^n, \|\cdot\|_1)$ 内存在一个大小为 2^n 的奇距子集.

		平移		分裂
$(1.5, 0.5)$	$\to$	$(21.5, 0.5)$	$\to$	$(11, 10.5, 0.5)$
			$\to$	$(10.5, 11, 0.5)$
$(1, 0)$	$\to$	$(11, 0)$	$\to$	$(6, 5, 0)$
			$\to$	$(5.5, 5.5, 0)$
$(1, 1)$	$\to$	$(5, 1)$	$\to$	$(3, 2, 1)$
			$\to$	$(2.5, 2.5, 1)$
$(0.5, 0.5)$	$\to$	$(0.5, 0.5)$	$\to$	$(0.5, 0, 0.5)$
			$\to$	$(0, 0.5, 0.5)$

下界构造: 证明概述

定义

对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 定义 $\boldsymbol{f_1}(n) = (0.5n + 0.5, 0.5n - 0.5)$, $\boldsymbol{f_2}(n) = (0.5n, 0.5n)$.
$\boldsymbol{f_1}(n + 0.5) = (0.5n + 0.25, 0.5n - 0.25)$, $\boldsymbol{f_2}(n + 0.5) = (0.5n - 0.25, 0.5n + 0.25)$.

证明概述.

对 n 归纳: 假设 $(a_1, \boldsymbol{v}_1), \ldots, (a_{2^n}, \boldsymbol{v}_{2^n})$ 是 $(\frac{1}{2}\mathbb{Z})^n$ 内的一个奇距子集, 且满足 $a_1 \le \cdots \le a_{2^n}$.

平移: 对任意 $i \in [2^n]$, 设 $b_i = a_i + 2i$. 那么 $\boldsymbol{p}_1 = (b_1, \boldsymbol{v}_1)$, ..., $\boldsymbol{p}_{2^n} = (b_{2^n}, \boldsymbol{v}_{2^n})$ 仍是奇距子集. 此操作保证了下一步分裂后前两坐标大小顺序不变.

分裂: 对任意 $i \in [2^n]$, 把 $\boldsymbol{p}_i$ 换成 $\boldsymbol{p}_i^{(1)} = (\boldsymbol{f_1}(b_i), \boldsymbol{v}_i)$ 和 $\boldsymbol{p}_i^{(2)} = (\boldsymbol{f_2}(b_i), \boldsymbol{v}_i)$.

可验证对任意 $i \in [2^n]$, $\left\|\boldsymbol{p}_i^{(1)} - \boldsymbol{p}_i^{(2)}\right\|_1 = 1$,

$$\text{对任意 } r, s \in [2] \text{ 和不同的 } i, j \in [2^n],\ \left\|\boldsymbol{p}_i^{(r)} - \boldsymbol{p}_j^{(s)}\right\|_1 = \left\|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_j\right\|_1.$$

所以 $\boldsymbol{p}_1^{(1)}, \boldsymbol{p}_1^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{p}_{2^n}^{(1)}, \boldsymbol{p}_{2^n}^{(2)}$ 是一个 $(\frac{1}{2}\mathbb{Z})^{n+1}$ 内大小为 2^{n+1} 的奇距子集. $\square$

目录

上界进展

定理 (Espuny Díaz, Hogan, Illingworth, Michel, Portier, Y., 2024+)

$((\frac{1}{2}\mathbb{Z})^n, \|\cdot\|_1)$ 内最大的奇距子集大小为 2^n.

证明.

对 $x \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, 定义 $\varphi(x) = \begin{cases} 0, x \in \mathbb{Z}, \\ 1, x \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}. \end{cases}$

对 $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, 定义特征向量 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{p}) = (\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n))$.

如果 $\mathcal{P}$ 是一个奇距子集, 那么:

- 任意不同的 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{P}$ 必须满足 $\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{p})\|_1 \equiv \|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{q})\|_1 \pmod 2$,
  否则 $\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}\|_1$ 不是整数. 所以 $|\boldsymbol{\varphi}(\mathcal{P})| \leq 2^{n-1}$.
- 不存在三个不同的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{c})$,
  否则 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^n$, 所以 $\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|_1 + \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}\|_1 \equiv$
  $\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) + \sum_{i=1}^n (b_i - c_i) = \sum_{i=1}^n (a_i - c_i) \equiv \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}\|_1 \pmod 2$, 矛盾.

所以 $|\mathcal{P}| \leq 2 \cdot |\boldsymbol{\varphi}(\mathcal{P})| \leq 2^n$. $\square$

上界进展

定理 (Espuny Díaz, Hogan, Illingworth, Michel, Portier, Y., 2024+)

如果 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ 内存在一个大小为 k 的奇距子集 $\mathcal{P}$, 那么 $(\mathcal{T}^n, \|\cdot\|_1)$ 内也存在大小为 k 的奇距子集.

证明概述.

- 通过平移可以假设对任意 $i \in [n]$ 和不同 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{P}$, $|p_i - q_i| \geq 2$.
- 去掉绝对值符号后,$\mathcal{P}$ 是一个奇距子集这个条件等价于一个线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有实数解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$. 这里 A 是一个 $\binom{k}{2} \times kn$ 矩阵, 所有元素都是 $-1, 0, 1$. 每行代表一对 $\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}\|_1$ 为奇数, 所以向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标都是奇数.
- 这组方程的解包含一些自由变量和一些约束变量. 所有约束变量都是自由变量的有理数系数的线性组合. 所以存在一个有理数解 $\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}}$, 而且 $\|\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty < 1$.
- 平移保证了每个坐标内相对大小没变, 所以 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 对应一个 $(\mathbb{Q}^n, \|\cdot\|_1)$ 内大小为 k 的奇距子集.
- 给所有坐标同时乘上一个适当的奇数, 可以去掉所有分母内的奇因数, 由此得到 $(\mathcal{T}^n, \|\cdot\|_1)$ 内也存在大小为 k 的奇距子集. $\square$