C. R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série I, p. 613-616, 1999
Probabilités/*Probability Theory*

Quelques nouvelles identités de fluctuation pour les processus de Lévy

Larbi ALILI [a], **Loïc CHAUMONT** [b]

[a] Technische Universitat Wiedner Haupstrasse 8-10 A 1040 Wien, Autriche
Courriel : alili@fam.tuwien.ac.at

[b] Laboratoire de probabilités, tour 56, Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France
Courriel : loc@ccr.jussieu.fr

(Reçu le 10 janvier 1999, accepté le 28 janvier 1999)

Résumé. Soient τ et H les processus de temps et de hauteur d'échelle d'un processus de Lévy X. On établit une identité en loi entre (τ, H) et (X, H^*), H^* étant l'inverse continu à droite du processus H. Celle-ci permet de relier la loi d'entrée du processus X à la loi d'entrée de la mesure des excursions en dehors de 0 du processus réfléchi $(X_t - \inf_{s \leq t} X_s, t \geq 0)$. Des calculs explicites sont alors effectués dans le cas stable. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Some new fluctuation identities for Lévy processes

Abstract. *Let τ and H be the ladder time and ladder height processes of a Lévy process X. We give an identity in law between (τ, H) and (X, H^*), H^* being the right continuous inverse of the process H. The later allows us to get a relationship between the entrance law of X and the entrance law of the excursion measure away from 0 of the reflected process $(X_t - \inf_{s \leq t} X_s, t \geq 0)$. In the stable case, some explicit calculations are provided.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

1. Introduction et notations

L'objet de cette Note est de donner l'analogue en temps continu d'une identité de fluctuation pour des marches aléatoires, due à Alili et Doney [1], et d'en tirer de nouvelles applications. Nous commençons par un rappel de la construction des processus d'échelle pour un processus de Lévy réel X issu de 0 sous la loi $\mathbb{P}$. Celle-ci diffère fondamentalement du cas discret. En effet, en temps continu, lorsque 0 est régulier pour les demi-droites $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$, ce que nous supposerons dans toute la suite, les extremas de X sont presque sûrement atteints en un ensemble non dénombrable de points. Désignons alors par $\underline{X}$ et $\overline{X}$ les processus du minimum et du maximum passé de X :

$$\underline{X}_t = \inf_{s \leq t} X_s, \qquad \overline{X}_t = \sup_{s \leq t} X_s.$$

Note présentée par Marc YOR.

Il est bien connu (*voir* par exemple [4], théorème 2a), que les processus réfléchis $X - \underline{X}$ et $\overline{X} - X$ sont fortement markoviens. L'hypothèse de régularité faite ci-dessus entraîne que 0 est régulier pour lui-même pour chacun de ces processus. Soit alors L_t le temps local au niveau 0 et à l'instant $t \geq 0$ de $\overline{X} - X$, au sens des processus de Markov (ici, la normalisation choisie pour L est la même que dans [6], théorème 8). On désigne par τ_t l'inverse continu à droite au temps t de L et on pose $H_t = X_{\tau_t}$. Le processus (τ, H) est appelé processus d'échelle. Ce processus est un subordinateur bivarié dont l'exposant caractéristique $\kappa(\lambda, \beta)$ est donné par la formule suivante :

$$\kappa(\lambda, \beta) = k \exp\left(\int_{t=0}^{\infty} \mathrm{d}t \int_{x=0}^{\infty} (\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{\lambda t - \beta x}) t^{-1} \mathbb{P}(X_t \in \mathrm{d}x)\right). \tag{1}$$

Cette identité due à Fristedt figure par exemple dans [3], corollaire 10, p. 165.

Un problème important en théorie des fluctuations est de déterminer la loi du processus d'échelle. En effet, par la factorisation de Wiener–Hopf, la loi de X est entièrement caractérisée par les processus d'échelle associés à X et à son dual $-X$. Ainsi, ces processus interviennent dans le calcul de la loi de nombreuses fonctionnelles de processus de Lévy.

La section qui suit consiste à énoncer l'identité principale caractérisant la loi de (τ_u, H_u), pour $u \geq 0$ fixé, et à en donner une interprétation dans le cas des processus stables. Dans la section 3 on présente une application importante de ces identités qui est de déterminer la densité entre la loi d'entrée du processus X dans $(0, \infty)$ et celle de la mesure des excursions en dehors de 0 du processus réfléchi $X - \underline{X}$. Il est connu (*voir* [5]) que cette dernière loi est étroitement liée à celle du processus X conditionné à rester positif. Les résultats obtenus permettent alors de relier la loi d'entrée de ce processus à celle du processus initial X.

2. Identité fondamentale

Soit σ le processus des premiers temps d'atteinte de X : $\sigma_x = \inf\{t : X_t \geq x\}$, $x \geq 0$. Il est facile de voir que l'inverse du processus de hauteur d'échelle, que nous avons appelé H^* jusqu'alors, correspond au processus $(L_{\sigma_x}, x \geq 0)$. La preuve analytique de l'analogue en temps discret de la formule de Spitzer–Baxter (*voir* [1]). En s'inspirant de cette preuve, et en utilisant la formule de Spitzer–Baxter, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 1. – *Sur* $(0, \infty)^3$, *on a l'identité suivante entre mesures :*

$$t^{-1} \mathbb{P}(X_t \in \mathrm{d}x, L_{\sigma_x} \in \mathrm{d}u)\mathrm{d}t = u^{-1} \mathbb{P}(\tau_u \in \mathrm{d}t, H_u \in \mathrm{d}x)\mathrm{d}u. \tag{2}$$

Cette identité est une forme désintégrée de l'identité remarquée par Bertoin et Doney [2], lemme 3.

Dans le cas stable, grâce à la propriété de scaling, ce résultat peut être interprété comme une identité entre mesures de probabilités. Jusqu'à la fin de ce paragraphe, on suppose que X est un processus stable d'indice $\alpha \in (0, 2]$; autrement dit, notre processus X vérifie la propriété de scaling suivante :

$$(X_t, t \geq 0) \stackrel{(\mathrm{d})}{=} (s^{-1} X_{s^\alpha t}, t \geq 0),$$

pour tout $s > 0$. Ici le symbole $\stackrel{(\mathrm{d})}{=}$ désigne l'égalité en loi. Dans ce cas, le processus d'échelle (τ, H) satisfait la propriété de scaling d'indice $(\rho, \alpha\rho)$. Plus précisément, on déduit facilement de la formule de Fristedt que

$$(\tau_t, X_t, t \geq 0) \stackrel{(\mathrm{d})}{=} (s^{-1/\rho} \tau_{st}, s^{-1/\alpha\rho} H_{st}, t \geq 0),$$

où ρ est le coefficient d'asymétrie du processus X : $\rho = \mathbb{P}(X_1 \geq 0)$. Cette propriété nous permet d'interpréter le théorème 1 de la manière suivante :

COROLLAIRE 1. – *La loi du couple de variables* $(L_{\sigma_{X_1}}, X_1)$ *conditionnellement à* $X_1 \geq 0$ *est la même que celle de* $(\tau_1^{-\rho}, \tau_1^{-1/\alpha} H_1)$.

Notons que le processus bivarié $(L_{\sigma_{X_t}}, X_t, t \geq 0)$ hérite de X la propriété de scalling d'indice (ρ^{-1}, α). Par conséquent, le corollaire précédent se généralise à tout temps $t \geq 0$.

Le résultat ci-dessus permet d'obtenir une formule de désintégration de l'identité de fluctuation qui donne la loi du couple $(\overline{X}_t, G_t)$ pour $t > 0$ fixé ; ici G_t désigne le dernier instant où le maximum de X est atteint avant le temps t. On désigne par $\mathbb{P}(\overline{X}_t \in \mathrm{d}x | G_t = s)$ une version régulière en s de la loi conditionnelle de $\overline{X}_t$ sachant G_t.

COROLLAIRE 2. – *Pour tous s et t tels que $0 < s < t$ et $x > 0$, on a l'identité entre mesures suivante :*

$$\Gamma(1-\rho) s^{\rho} \mathbb{P}(\overline{X}_t \in \mathrm{d}x | G_t = s) = E(L_{\sigma_{X_s}}, X_s \in \mathrm{d}x).$$

On note que la loi conditionnelle du membre de gauche ne dépend pas de t. En termes de mesure de renouvellement g associée au processus d'échelle, ceci se traduit par :

$$\mathbb{P}(G_t \in \mathrm{d}s, \overline{X}_t \in \mathrm{d}x) = \frac{(t-s)^{\rho}}{\Gamma(1-\rho)} g(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \mathbb{1}_{\{s<t\}}.$$

3. Applications au processus X conditionné à rester positif

Dans cette section, on notera $\underline{n}$ la mesure des excursions en dehors de 0 du processus réfléchi $X - \underline{X}$. Il est connu que cette mesure, le processus canonique $(\omega_t, t \geq 0)$ est markovien. Son semi-groupe dans $(0, \infty)$ est celui de X tué lorsqu'il quitte la demi-droite positive. Un problème soulevé par Silverstein [6] est de déterminer la loi d'entrée sous la mesure $\underline{n}$: c'est-à-dire, en désignant par ζ la durée de vie des excursions sous $\underline{n}$, la mesure $q_t(\mathrm{d}y)$ telle que

$$\underline{n}(f(\omega_t), t \leq \zeta) = \int_0^{\infty} f(y) q_t(\mathrm{d}y),$$

pour tout $t > 0$ et toute fonction f borélienne bornée. Au corollaire suivant, nous donnons une représentation de cette mesure relativement à la loi d'entrée du processus X dans $(0, \infty)$.

COROLLAIRE 3. – *Pour tout $t > 0$, sur $(0, \infty)$, on a l'identité*

$$q_t(\mathrm{d}y) = k t^{-1} \mathbb{E}(L_{\sigma_y}, X_t \in \mathrm{d}y),$$

où k est une constante indépendante de y et de t.

Comme conséquence du théorème 1, la loi du couple $(L_{\sigma_{X_t}}, X_t)$ conditionnellement à $X_t \geq 0$ est caractérisée par la double transformée de Laplace suivante :

COROLLAIRE 4. – *Soit T un temps exponentiel de paramètre λ, indépendant de X. Pour tout couple (γ, β) de réels positifs, on a :*

$$\mathbb{E}(\exp(-\gamma L_{\sigma_{X_T}} - \beta X_T) \mathbb{1}_{\{X_T \geq 0\}}) = \frac{\kappa(\lambda, 0)}{\frac{\partial}{\partial \lambda}\kappa(\lambda, 0)} \frac{\frac{\partial}{\partial \lambda}\kappa(\lambda, \beta)}{\gamma + \kappa(\lambda, \beta)}. \tag{3}$$

En particulier, conditionnellement à $\{X_T \geq 0\}$, $L_{\sigma_{X_T}}$ suit une loi exponentielle de paramètre $\kappa(\lambda, 0)$.

Par inversion de la double transformée de Laplace ci-dessus, théoriquement la mesure $q_t(\mathrm{d}y)$ peut être explicitée relativement à la loi d'entrée du processus initial X dans $(0, \infty)$. Cependant, jusqu'à présent, il ne nous a pas été possible de traiter d'autres cas que celui, bien connu, des processus sans saut positif.

Maintenant, introduisons le processus $X_x^{\uparrow}$ dont la loi est celle de X issu de $x > 0$ et conditionné à rester positif. Nous référons à l'article de Chaumont [5] pour une étude plus détaillée de ce processus.

La définition de celui-ci nécessite les hypothèses supplémentaires suivantes. Supposons d'une part, que $\lim_{t\to\infty} \overline{X}_t = +\infty$ presque sûrement, et d'autre part, que le semi-groupe de X est absolument continu part rapport à la mesure de Lebesgue. Le processus $X_x^\uparrow$, $x > 0$, est markovien et est défini comme une h-transformée au sens de Doob du processus X partant de x et tué lorsqu'il quitte la demi-droite positive. Notons $q_t(x,y)$, $t, x, y > 0$, le semi-groupe de ce dernier et $p_t^\uparrow(x,y)$ celui associé à la famille $X_x^\uparrow$, $x > 0$. Plus précisément, on a :

$$p_t^\uparrow(x,y) = \frac{h(y)}{h(x)} q_t(x,y), \quad t, x, y > 0, \tag{4}$$

où h est la fonction positive et harmonique pour le semi-groupe $q_t(x,y)$ définie par :

$$h(x) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{X_t \geq -x\}} \mathrm{d}\widetilde{L}_t\right),$$

$\widetilde{L}$ désignant le temps local en zéro du processus $X - \underline{X}$ (*voir* [6]). Il est possible de construire la loi d'un processus que nous notons $X^\uparrow$ qui correspond au processus X issu de 0 et conditionné à rester positif et dont le semi-groupe dans $(0,\infty)$ est exactement $p_t^\uparrow(x,y)$. Toutefois, il n'est pas évident que celle-ci puisse être obtenue dans le cas général comme limite faible lorsque x tend vers 0 de la famille des lois de $X_x^\uparrow$, $x > 0$. Au théorème suivant, nous explicitons la loi d'entrée $p_t^\uparrow(\mathrm{d}y)$ de ce processus. Ce résultat est une conséquence du corollaire 3 et de la relation suivante tirée de [5], théorème 3 :

$$p_t^\uparrow(\mathrm{d}y) = h(y) q_t(\mathrm{d}y), \quad t, y > 0.$$

THÉORÈME 2. – *Pour tous t et $y > 0$, on a*

$$p_t^\uparrow(\mathrm{d}y) = k h(y) t^{-1} \mathbb{E}(L_{\sigma_y}, X_t \in \mathrm{d}y), \tag{5}$$

où k est une constante indépendante de y et de t.

Dans le cas particulier où X n'a pas de saut positif, on a $L_{\sigma_y} = y$, p.s. et l'on retrouve la relation déterminée par Bertoin [3], corollaire 16, p. 203.

Références bibliographiques

[1] Alili L., Doney R.A., Wiener–Hopf factorization revisted and some applications, Stoch. and Stoch. Reports (1999) (to appear).
[2] Bertoin J., Doney R.A., Spitzer's condition for random walks and Lévy processes, Ann. Inst. Henri-Poincaré (1997) 167–178.
[3] Bertoin J., Lévy Processes, Cambridge University Press, 1996.
[4] Bingham N.H., Fluctuation Theory in Continuous Time, Adv. Appl. Probab. 7 (1975) 705–766.
[5] Chaumont L., Conditionings and path decompositions for Lévy processes, Stoch. Proc. Appl. 64 (1996) 39–54.
[6] Silverstein M.L., Classification of Coharmonic and Coinvariant functions for a Lévy process, Ann. Probab. 8 (1980) 539–575.