Lizenziatsarbeit der Philosophischen Fakultät
der Universität Zürich

Martin Gallauer Alves de Souza

Beweise und mathematisches Wissen

Referent:
Prof. Dr. M. Hampe
ETH Zürich

Betreuer:
Prof. Dr. G. Sommaruga
ETH Zürich

März 2010
Philosophisches Seminar der
Universität Zürich

Danksagung

Ich möchte mich vor allem bei zwei Personen bedanken. Bei Herrn Giovanni Sommaruga dafür, dass er sich für die Betreuung der vorliegenden Arbeit so viel Zeit genommen und auch meine unausgereiften Entwürfe mit viel Sorgfalt gelesen hat. Bei Katharina aber dafür, dass sie mir das Studium in der von mir gewählten Form überhaupt erst ermöglicht hat.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Was ist mathematischer Fortschritt? Einer verbreiteten Vorstellung zufolge ist diese Frage denkbar einfach zu beantworten: Mathematischer Fortschritt findet statt, wenn unser mathematisches Wissen wächst; das mathematische Wissen wiederum besteht aus allen bewiesenen Sätzen der Mathematik. Folglich ist mathematischer Fortschritt gleichbedeutend mit der Entdeckung von Beweisen neuer mathematischer Sätze. Ich denke, dieser Vorstellung liegt zugrunde, was der Mathematiker William Thurston das „DTP-Modell“ der Mathematik genannt hat:

> In caricature, the popular model holds that
>
> **D.** mathematicians start from a few basic mathematical structures and a collection of axioms “given” about these structures, that
>
> **T.** there are various important questions to be answered about these structures that can be stated as formal mathematical propositions, and
>
> **P.** the task of the mathematician is to seek a deductive pathway from the axioms to the propositions or to their denials.
>
> We might call this the definition-theorem-proof (DTP) model of mathematics. (Thurston, 1994, S. 162–3)

In diesem Modell ist die Beziehung zwischen Beweisen und mathematischem Wissen also ebenfalls sehr einfach zu beschreiben: Beweise sind die Garanten dafür, dass mathematisches Wissen frei von (relativ zu den Axiomen) „falschen“ Sätzen bleibt. Sie spielen eine Validierungs- oder Rechtfertigungsrolle.

Das Problem mit diesem Modell ist natürlich, dass es nur einen kleinen Teil dessen erfasst, was sich Mathematikern und Mathematikerinnen heute in ihrer Tätigkeit präsentiert.[1] Fragen, welche in diesem Modell nicht beantwortet werden können, um-

[1]Noch kleiner wird dieser Teil, wenn man den Blick von Forschung und Lehre an universitären Mathematikinstituten heute löst und auch Mathematik vor hundert oder tausend Jahren, sowie im Alltag oder in anderen Wissenschaften mitberücksichtigt. Die Vertreterin des DTP-Modells dürfte natürlich bemerken, dass ihr nicht daran gelegen sei, etwa Anwendungen der Mathematik in der Physik zu beschreiben; schliesslich gehe es ihr nur um *mathematisches* Wissen und *mathematischen* Fortschritt. Es bleibt jedoch dabei, dass ihr zufolge vor Peano keine Zahlentheorie betrieben wurde, weder von Fermat noch Euler noch Lagrange noch Gauss ….

fassen beispielsweise die folgenden: Wie kommt der Mathematiker zu seinen „Strukturen" und wie werden ihm die Axiome „gegeben"? Woher bezieht er die „wichtigen Fragen"? Weshalb kann er sich mit seinen Kollegen und Kolleginnen auf solche einigen? Weshalb werden stets neue Beweise bereits bewiesener Aussagen gesucht?

Das primäre Ziel, das ich in der vorliegenden Arbeit verfolge, ist zu zeigen, dass die Beziehung zwischen Beweisen und mathematischem Wissen weit komplexer ist, als das DTP-Modell suggeriert. Daneben soll nachgewiesen werden, dass die zu Beginn beschriebene Vorstellung mathematischen Fortschritts ebenfalls viel zu simpel ist. Im Rest der Einleitung möchte ich dieses Unterfangen im Raum bisheriger Beiträge zur Philosophie der Mathematik (im 20. Jahrhundert) lokalisieren und im Anschluss einen Überblick über den Aufbau der Arbeit geben.

Zwei Methodologien

Einigkeit scheint in der Literatur darüber zu herrschen, dass es mathematisches Wissen gibt, und dass es sich dabei um ein philosophisch interessantes Untersuchungsobjekt handelt, ebenso, dass Beweise viel mit der Entstehung desselben zu tun haben. Es lassen sich jedoch zwei methodologisch unterschiedliche Weisen erkennen, diese beiden Gegenstände zu diskutieren und zueinander in Beziehung zu setzen: Bei der ersten ist eine bestimmte erkenntnistheoretische Position Ausgangspunkt; diese bestimmt die Perspektive, unter der Beweise diskutiert und zur Untermauerung der Position herangezogen werden. Bei der zweiten steht die Beschreibung der Beweispraxis in der Mathematik an erster Stelle; erst auf Basis dieser Beschreibung werden philosophische Konsequenzen für eine Theorie mathematischen Wissens gezogen.

Musterbeispiele der ersten Vorgehensweise lassen sich natürlich in den Grundlagenprogrammen in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts ausmachen. Zwar standen sich verschiedene Lager gegenüber, welche die „Grundlagenkrise der Mathematik" auf unterschiedliche Weisen zu lösen versuchten. Ihnen allen war jedoch gemeinsam, *dass* sie die Mathematik in einer Krise sahen und dass diese Sicht ihrer Überzeugung entsprang, mathematisches Wissen sei unzweifelhaft, absolut sicher. Berühmt ist etwa David Hilberts Aussage:

> Das Ziel, die Mathematik sicher zu begründen, ist auch das meinige; ich möchte der Mathematik den alten Ruf der unanfechtbaren Wahrheit, der ihr durch die Paradoxien der Mengenlehre verloren zu gehen scheint, wiederherstellen; (Hilbert, 1922, S. 160)

Zur Erreichung dieses Ziels, das mit einem epistemologischen Fundamentalismus verbunden war, sahen sich alle Lager dazu gezwungen, die Beweise der Mathematiker und Mathematikerinnen auf einen einzigen Aspekt, sei es den formalen, den logischen oder den intuitiv-konstruktiven, zu reduzieren.

Auch wenn die einzelnen Programme vielleicht aus unterschiedlichen Gründen an (philosophischem) Zuspruch verloren, die Zahl derjenigen, welche die gemeinsame Annahme des absolut sicheren mathematischen Wissens in Zweifel zogen, nahm in der Mitte des letzten Jahrhunderts zu. Exemplarisch dafür sei der Mathematiker und Logiker Haskell Curry zitiert:

> The search for absolute certainty was evidently a principal motivation for both Brouwer and Hilbert. But does mathematics need absolute certainty for its justification? In particular, why do we need to be sure that a theory is consistent, or that it can be derived by an absolutely certain intuition of pure time, before we use it? In no other science do we make such demands. (Curry, 1963, S. 16)

Imre Lakatos scheint als einer der ersten aus dem Scheitern der Grundlagenprogramme den Schluss gezogen zu haben, dass nicht nur ihre epistemologische Annahme zweifelhaft war, sondern ihr Vorgehen überhaupt. Mit seiner originellen Arbeit „Proofs and Refutations“ richtete er den Fokus der Mathematikphilosophie erstmals auf die Art und Weise, wie mathematisches Wissen in der Praxis entsteht.[2] Seine Ergebnisse in dieser Studie lassen sich kaum mit den in den Grundlagenprogrammen gezeichneten Bildern der Beweispraxis in der Mathematik in Einklang bringen und führen zur Erkenntnis, dass diese Programme zu einem Teil präskriptiver Natur waren.[3]

Mathematische Praxis

Die Folgen dieser Erkenntnis für die Philosophie der Mathematik in den letzten 40 Jahren sind offenbar nicht ganz einfach abzuschätzen. Während Aspray und Kitcher (1988) die Erben Lakatos’ Ende der Achtzigerjahre noch als „maverick tradition“ bezeichneten, konstatierten die Herausgeber einer weiteren Anthologie anfangs der Neunzigerjahre bereits: “the philosophy of mathematics presently is undergoing a rather dramatic transformation and reorientation.”[4] Nun, anfangs des 21. Jahrhunderts, bemerkt Paolo Mancosu hingegen: “[T]he ‘maverick tradition’ has not managed to substantially redirect the course of philosophy of mathematics.”[5] Viele Philosophen und Philosophinnen, so Mancosu, entwickeln ihre Positionen noch immer in Anknüpfung an die Grundlagenprogramme (er nennt Neologizismus, Strukturalismus und Nominalismus als Beispiele); Bezugspunkte bilden hierbei oft auch die beiden klassischen Artikel Benacerraf (1965, 1973).

[2] Man würde vielleicht erwarten, dass die mathematische Geschichtsschreibung schon vor Lakatos die Aufgabe wahrgenommen hätte, die mathematische Praxis in der Vergangenheit zu beschreiben. Doch über den deplorablen Zustand dieser Disziplin vor 1960 berichten Aspray und Kitcher (1988, S. 24).

[3] Vergleiche auch Fussnote 1. Für eine etwas andere Sicht siehe zum Beispiel Burgess (1992).

[4] Echeverria et al. (1992, S. ix)

[5] Mancosu (2008, S. 5)

Was aber ist es nun, das die Beiträge im Rahmen der „maverick tradition“ vereinigt? Thomas Tymoczko, der Herausgeber einer weiteren Anthologie mit dem programmatischen Titel „New Directions in the Philosophy of Mathematics“, formuliert es so:

> The common focus of the new directions movement is on the actual practice of mathematics; that is, how actual mathematicians continue the discipline of mathematics. This focus is pointedly not on mathematical theories and it rejects the assumption that mathematical theories capture the essence of mathematics. Furthermore, the focus on mathematical practice is meant to convey a distrust of a priori theorizing about the nature of mathematics and of philosophical theories that specify in advance how the practice of mathematics must be construed. (Tymoczko, [1986] 1998, S. 385)

Und als wichtige Fragen für diese „neue Bewegung“ erachten Aspray und Kitcher die folgenden: “How does mathematical knowledge grow? What is mathematical progress? What makes some mathematical ideas (or theories) better than others? What is mathematical explanation?”[6]

Wie ich bereits andeutete, stehen in der vorliegenden Arbeit die ersten beiden Fragen im Vordergrund. Sie stellt einen Versuch dar, einige wichtige Arten zu beschreiben, in welchen Beweise in der mathematischen Praxis zur Veränderung mathematischen Wissens beitragen. Insbesondere teile ich die von Tymoczko formulierten Ziele und Vorbehalte.

Beweise und Mathematisches Wissen

Der Aufbau der vorliegenden Arbeit lehnt sich grob an die auf Michael Polanyi zurückgehende Unterscheidung zwischen implizitem und explizitem Wissen an. Implizites Wissen bezeichnet im Gegensatz zu explizitem dasjenige Wissen einer Person, das diese nicht zu formulieren im Stande ist, wie etwa im folgenden Beispiel:

> Wir kennen das Gesicht von jemandem und können es unter Tausenden, ja unter einer Million wiedererkennen. Trotzdem können wir gewöhnlich nicht sagen, wie wir ein uns bekanntes Gesicht wiedererkennen. Das meiste dieses Kennens kann also nicht in Worte gefaßt werden. (Polanyi, 1985, S. 14)

Weitere Beispiele impliziten Wissens stellen etwa unsere Sprachkompetenz oder unsere Fähigkeit, komplexe motorische Handlungen zu vollführen, dar. In diesen und vielen weiteren Fällen offenbart sich, „daß wir mehr wissen, als wir zu sagen wissen.“[7] Weil das Konzept impliziten Wissens (vor allem in der Philosophie der Mathematik)

[6] Aspray und Kitcher (1988, S. 17)

[7] Polanyi (1985, S. 14, Hervorhebung entfernt)

eher unbekannt zu sein scheint, werde ich im zweiten Kapitel einen ausführlicheren Einblick in Polanyis Überlegungen dazu geben.

Ich schlage also vor, die Diskussion der Beziehung zwischen Beweisen und mathematischem Wissen in zwei (miteinander verbundene) Diskussionen zu unterteilen: Bevor im zweiten Kapitel die Beziehung zwischen Beweisen und implizitem Wissen untersucht und damit mathematikphilosophisch relativ unbekanntes Terrain begangen wird, bewege ich mich im ersten Kapitel in einer Erörterung der Beziehung zwischen Beweisen und explizitem Wissen auf ausgetretenen Pfaden. Explizites Wissen ist hauptsächlich in den bekannten, von der mathematischen Gemeinschaft akzeptierten Sätzen kodiert; wie also werden solche Sätze von der Gemeinschaft akzeptiert? Unstrittig ist, dass Beweise dabei eine zentrale Rolle spielen, doch eine präzise Beschreibung dieser Rolle stellt sich als erstaunlich schwierig heraus. Damit stelle ich mich in die nun schon lange Reihe derjenigen, die nach einer Definition von Beweisen suchen, welche mit den Beobachtungen der mathematischen Praxis verträglich ist – und wie die anderen zuvor werde ich nicht fündig werden. Das erste Kapitel beschliessen dann einige grundlegendere Überlegungen zur (Un-)Möglichkeit einer solchen Definition.

Bereits an vielen Stellen des ersten Kapitels wird deutlich, dass eine adäquate Beschreibung der Beweispraxis unmöglich ist ohne eine Diskussion impliziten Wissens in der Mathematik. Die Entdeckung, Prüfung und das Verstehen von Beweisen erfordern umfassendes mathematisches Vorwissen, das für die Mathematiker und Mathematikerinnen teilweise nicht explizit formulierbar ist. Die Rezeption von Beweisen *erfordert* aber nicht nur implizites Wissen; Beweise *vermitteln* dem Rezipienten oder der Rezipientin auch implizites Wissen in der Form von Beweisideen, Problemlösungsstrategien, Konstruktionsmethoden und Ähnlichem. Aus mathematikhistorischer Perspektive ist es ausserordentlich interessant zu beobachten, wie dieses implizite Wissen in einem mathematischen Gebiet oft den Status allgemeiner Bekanntheit erlangt und in neuen Beweisen (gar in anderen Gebieten) wieder verwendet, in verschiedener Weise verändert und verbessert wird und in vielen Fällen die weitere Entwicklung der Mathematik beeinflusst. Ich stelle mir für das zweite Kapitel die Aufgabe, diesen hier angedeuteten Prozess ausführlicher darzustellen und in der mathematischen Praxis nachzuweisen. Besonderes Augenmerk wird dabei auf den Fall gelegt, in dem zuvor implizites Wissen *expliziert* werden kann; ich halte dies für eine besonders wichtige Form von mathematischem Fortschritt – eine Form jedoch, die sich im Rahmen des DTP-Modells kaum beschreiben und schon gar nicht erklären lässt.

Kapitel 1

Explizites Wissen

Obschon viele Völker vor den Griechen der Antike Mathematik betrieben, finden sich erst bei letzteren mathematische Sätze mit Beweisen.[1] Es wäre interessant zu wissen, wann und weshalb die Griechen begannen, allgemeine Sätze (im Gegensatz zu spezifischen Problemen)[2] zu formulieren und zu beweisen. Aber darüber kann nur spekuliert werden, und diese Entwicklung wird zuweilen als „griechisches Mathematik-Wunder“ bezeichnet.[3] Und die Mathematiker nach den Griechen (Alexandrier, Araber und Inder) führten die Tradition des Beweisens offenbar nicht fort; auch hierfür sind die Gründe nicht ganz klar.[4] Während Geometer wie Desargues und Pascal im 17. Jahrhundert Beweise führten, verzichteten ihre Kollegen in der Algebra vollständig darauf.[5] Aus diesen Beobachtungen (und ähnliche liessen sich für nachfolgende Jahrhunderte machen) folgt bereits, dass Mathematik ohne Beweis kein Paradox ist.[6] Wie vor allem das letzte Beispiel zeigt, kann sich Mathematik auch in Abwesenheit einer Beweispraxis fruchtbar entwickeln.[7] In Bezug auf die Algebra im 17. Jahrhundert schreibt Morris Kline gar: "[I]t is fortunate that the mathematicians were so credulous and even naive, rather than logically scrupulous."[8] Wenn im Folgenden lediglich die Beziehung zwischen Beweisen und mathematischem Wissen diskutiert wird, ist damit also keinesfalls impliziert, dass eine Beweispraxis notwendig zur Weiterentwicklung der Mathematik ist.

---

[1] Dies zumindest ist die Standardansicht, vgl. Kline (1972, S. 14,20,22). Für eine andere Position siehe beispielsweise Høyrup (2005).

[2] Vgl. Kline (1972, S. 22–3)

[3] Siehe Kleiner (1991, S. 293)

[4] Vgl. Kline (1972, S. 144, 198)

[5] Vgl. Kline (1972, S. 282)

[6] Vgl. Kleiner (1991, S. 292)

[7] Noch eindrücklicher ist wohl das Beispiel der Analysis von Leibniz und seinen Nachfolgern im 17. und 18. Jahrhundert. Der Leibniz'sche Differenzialkalkül stellte Methoden zur Verfügung, mit deren Hilfe sich eine Vielzahl alter wie auch neuer Probleme lösen liess. Dass die Methoden im Allgemeinen korrekt waren, konnte jedoch keiner dieser Mathematiker beweisen, und obwohl sie sich dessen bewusst waren, scheinen sie darüber nicht allzu besorgt gewesen zu sein. Vgl. Kitcher (1983, Kap. 10).

[8] Kline (1972, S. 282)

Auf der anderen Seite darf die Rolle der Beweise in der mathematischen Praxis nicht unterschätzt werden. Viele der oben angedeuteten Resultate stellten sich (natürlich) als korrekt heraus und wurden zu einem späteren Zeitpunkt und von einer neuen Generation von Mathematikern bewiesen. Mathematische Publikationen heute, ob Forschungsartikel in einer Zeitschrift oder Lehrbücher für Mathematikanfänger, bestehen im Regelfall zu einem grossen Teil aus Beweisen; dasselbe gilt für Vorlesungen und Seminare an Universitäten. Nicht nur werden neue Resultate bewiesen, auch alte Beweise werden modifiziert und vereinfacht oder es finden sich für bereits bewiesene Aussagen vollständig neue Beweise. Nicht nur die professionelle Mathematikerin produziert regelmässig Beweise, auch der Studienanfänger der Mathematik hat sich darin zu üben. Wenn er dabei nicht erfolgreich ist, so wird er sein Studium kaum beenden können.

In diesem ersten Kapitel nun will ich mich mit einem bestimmten Aspekt der Beweispraxis beschäftigen, nämlich der Rolle von Beweisen in der Erweiterung expliziten mathematischen Wissens. Hierbei verstehe ich unter explizitem mathematischem Wissen diejenigen mathematischen Resultate, welche von der mathematischen Gemeinschaft akzeptiert sind.[9] Diese Rolle grob zu umschreiben fällt nicht schwer: *Damit* ein Resultat von der Gemeinschaft akzeptiert wird, müssen Gründe vorliegen, welche für die Korrektheit des Resultates sprechen. Als bevorzugter solcher Grund wird ein *Beweis* des Resultates angesehen. Die Rolle des Beweises ist somit diejenige der Rechtfertigung mathematischen Wissens.

Obschon dieser Aspekt der Beweispraxis im zwanzigsten Jahrhundert im Vordergrund des philosophischen Interesses stand, lässt sich heute nicht davon sprechen, dass wir ihn vollständig verstünden. Unbeantwortet geblieben ist vor allem die Frage, welche in der obigen Beschreibung der rechtfertigenden Rolle von Beweisen unterschlagen wird: *Weshalb* werden Beweise als (bevorzugte) Gründe für die Korrektheit mathematischer Resultate betrachtet?

Um die Frage zu motivieren, muss an dieser Stelle gleich ein mögliches Missverständnis aus dem Weg geräumt werden. In der „Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie“ etwa wird ein Beweis definiert als eine *Gewinnstrategie* für eine Behauptung: Das „nach Rede und Gegenrede [...] verlaufende Verfahren (die Beweisführung oder Argumentation) erlaubt erst dann von einem Beweis für die Behauptung zu sprechen, wenn der Behauptende sich nicht bloß gegen die eventuell mangelhafte Gegenrede ‚behauptet‘, sondern sich gegen jeden möglichen Einwand verteidigen kann, er also eine *Gewinnstrategie für seine Behauptung* hat.“[10] Was ich

[9] Ich verwende das Adjektiv „explizit“ in diesem Kapitel, um diese Form von Wissen von der in Kapitel 2 diskutierten „impliziten“ Form zu unterscheiden.

[10] Mittelstraß (1995, Eintrag „Beweis“, S. 304)

an dieser Definition bemerkenswert finde, ist die Tatsache, dass wir ihr zufolge von keiner Begründung jemals mit Sicherheit sagen können, sie sei ein Beweis einer Behauptung. Wir sind schlicht nicht in der Lage, sie an „jedem möglichen Einwand" zu testen.[11] Unter dieser „Ideal"-Vorstellung von Beweisen mag die Frage aus dem letzten Absatz als trivial abgetan werden, daher ist es wichtig im Auge zu behalten, dass „Beweis" in der Mathematik nicht diese Bedeutung haben kann – einfach, weil Mathematiker und Mathematikerinnen sehr wohl der Überzeugung sind, Beweise zu produzieren und untereinander auszutauschen.

Bisher habe ich nicht gesagt, was denn in der mathematischen Praxis unter einem Beweis verstanden wird – und ich werde auch weiterhin keine solche „Definition" vorschlagen. Ich denke, eine solche zu formulieren wäre ungefähr gleichbedeutend damit, eine Antwort auf die obige Frage zu geben (siehe dafür auch Abschnitt B), und ich habe bereits angedeutet, dass ich sie als ziemlich schwierig erachte. Trotzdem müssen wir wissen, von welchem Gegenstand im Folgenden gesprochen wird; daher soll hier als Beweis gelten, was die mathematische Gemeinschaft (zum jeweiligen Zeitpunkt) für einen Beweis hält. Dies setzt natürlich voraus, dass in der Gemeinschaft diesbezüglich ein Konsens herrscht. Ich glaube, dies ist in den allermeisten Fällen tatsächlich erfüllt, doch mehr dazu werde ich weiter unten zu sagen haben.

Die Frage, weshalb Beweise als (bevorzugte) Gründe für die Korrektheit mathematischer Resultate betrachtet werden, soll die Überlegungen auf den folgenden Seiten leiten. In Abschnitt A gehe ich sie aus „soziologischer" Perspektive an; ohne Beweise selbst genauer zu untersuchen, soll der Prozess beschrieben werden, der von der Entdeckung eines Beweises eines Resultates durch ein Mitglied der mathematischen Gemeinschaft zur Akzeptanz des Resultates samt Beweis durch dieselbe führt. In Abschnitt B diskutiere ich die beiden „Standardantworten" der Mathematikphilosophie auf unsere Leitfrage und zeige deren Schwächen auf. Dies führt zu grundsätzlicheren Überlegungen zur Möglichkeit einer Definition von Beweisen, und eine neuere Position, welche an dieser Möglichkeit Zweifel angebracht hat, soll in Abschnitt C kurz vorgestellt werden. Im ganzen ersten Kapitel dominiert die kritische, etwas skeptische Stimme, und eine abschliessende Antwort auf die Leitfrage ist keinesfalls zu erwarten. Stattdessen sehe ich die Erörterung hier auch als Vorbereitung auf die Diskussion im zweiten Kapitel.

A Sozialer Verifikationsprozess

Der wichtigste Grund für die zentrale Rolle von Beweisen in der mathematischen Praxis ist wie bereits oben angedeutet, dass sie die bevorzugte (wenn auch nicht immer benutzte) Methode darstellen, um mathematische Resultate zu rechtfertigen. Ich

[11] Und jedes Argument dafür, dass eine gegebene Begründung gegen jeden möglichen Einwand verteidigt werden könnte, müsste selbst gegen jeden möglichen Einwand verteidigt werden usw.

bezeichne als „Verifikationsprozess“ einen Vorgang, in dem zu ermitteln versucht wird, ob ein gegebener Beweis diese Rechtfertigungsfunktion wahrnehmen kann oder nicht. Im Idealfall entscheidet ein solcher Prozess darüber, ob der Beweis *korrekt* ist oder *inkorrekt*. Primär sind es Individuen, die Beweise überprüfen, und ich spreche in diesem Fall vom „Individuellen Verifikationsprozess“. Bevor ein neues mathematisches Resultat von der Gemeinschaft akzeptiert (oder verworfen) wird, durchläuft sein Beweis ebenfalls einen Verifikationsprozess; in diesem Fall sind jedoch stets mehrere Personen beteiligt und ich spreche hier vom „Sozialen Verifikationsprozess“. In diesem Abschnitt will ich eine Skizze dieses zweiten Vorganges geben, gewissermassen einen Blick aus der Vogelperspektive auf die Rolle von Beweisen bei der Erweiterung des expliziten mathematischen Wissens.[12] Im darauf folgenden Abschnitt B dann soll der Individuelle Verifikationsprozess eingehend untersucht werden.

Vor Beginn des sozialen Verifikationsprozesses steht die Entdeckung eines Beweises eines mathematischen Resultates durch ein oder mehrere Mitglieder der mathematischen Gemeinschaft. Der soziale Verifikationsprozess setzt dann ein, wenn Resultat und Beweis veröffentlicht werden.[13] Einzelne Mitglieder der Gemeinschaft unterziehen den Beweis einer Überprüfung, melden Fehler an und schlagen Verbesserungen vor (oder lehnen den Beweis ab). Diese Verbesserungen werden wiederum überprüft, modifiziert usw. Es entspannt sich also ein „Dialog“ zwischen den beteiligten Mathematikern und Mathematikerinnen, in denen alle sowohl die Rolle des „Proponenten“ als auch der „Opponentin“ einnehmen können.[14] Wie intensiv der Dialog geführt wird, hängt von verschiedenen Faktoren ab: Interesse seitens der Gemeinschaft am Resultat, Status der Proponenten in der Gemeinschaft, Länge und Schwierigkeit des Beweises usw. Interessant ist vielleicht, wie stark der Anteil der sich jeweils am Dialog beteiligenden Personen im Laufe der Zeit abgenommen hat. Während bis zum 19. Jahrhundert die meisten mathematischen Fragen von allen verstanden (und diskutiert) wurden, überschaut heute der oder die Einzelne nur noch einen winzigen Teil des in der Mathematik Erforschten.[15] Dies ruft auch in Erinnerung, dass man

[12] Diese soziologische Sicht auf die Beweispraxis findet sich viel ausführlicher in Heintz (2000) und MacKenzie (2001) dargestellt; ein klassischer Artikel dazu ist auch de Millo et al. (1979).

[13] Unter Veröffentlichung verstehe ich hierbei nicht notwendigerweise die Veröffentlichung in einer Zeitschrift oder in Buchform, sondern bloss die Handlung, durch welche Beweis und Resultat anderen Mitgliedern der mathematischen Gemeinschaft zugänglich gemacht werden. Die Kommunikationsform ist im Allgemeinen sowohl mündlich als auch schriftlich. Heute stehen für letztere Form etwa Vorabdruck-Server auf dem Internet zur Verfügung oder die E-Mail-Kommunikation. Erstere Form ist hingegen an Konferenzen vorherrschend. Es ist klar, dass zum Zeitpunkt der Publikation etwa in einer Zeitschrift der soziale Verifikationsprozess üblicherweise schon fortgeschritten ist. Vgl. Heintz (2000, S. 181, 202).

[14] Für eine ausführlichere Diskussion des dialogischen Charakters dieses Prozesses siehe Ernest (1998).

[15] Vgl. Heintz (2000, Abschnitt 5.2)

sorgfältig zwischen dem mathematischen Wissen eines Einzelnen und demjenigen der mathematischen Gemeinschaft unterscheiden muss.

Was passiert aber, wenn Proponent und Opponentin sich nicht einigen können? Etwa wenn diese einen Fehler im Beweis entdeckt haben will, der Proponent ihn jedoch weiterhin für korrekt hält? Gewiss wäre diese Frage aus soziologischer Perspektive interessant; sie könnte zu Erkenntnissen über Entscheidungsprozesse und soziale Strukturen in der Mathematik führen. Doch ich benutzte eben den Konjunktiv, weil sich die Frage (fast) erübrigt; Uneinigkeit über die Korrektheit von Beweisen scheint in der Geschichte der Mathematik einfach sehr selten aufzutreten.[16] Das soll nicht heissen, dass keine oder wenige Fehler gemacht werden. Beweise *werden* im Laufe solcher Dialoge überarbeitet und sie *werden* verworfen,[17] doch wenn in einem Beweis ein Fehler entdeckt wird, so ist der Urheber oder die Urheberin des Fehlers normalerweise sofort bereit, diesen zuzugeben. Man könnte vielleicht vermuten, dass der „Streit“ zwischen konstruktivistischer und „klassischer“ Mathematik von 1870 an eine Ausnahme hierzu bildete.[18] Es ist wahr, dass Konstruktivisten wie Leopold Kronecker und L.E.J. Brouwer nicht-konstruktive Beweise ihrer „klassischen“ Zeitgenossen ablehnten; doch in den meisten Fällen hielten sie diese Beweise nicht nur für inkorrekt, sondern gar sinnlos, weil sie von Objekten handelten, die auf nicht-konstruktive Weise definiert worden waren (beispielsweise für Brouwer transfinite Ordinalzahlen, für Kronecker bereits irrationale Zahlen[19]). Dies macht es schwierig davon zu sprechen, dass sie *Fehler* in diesen Beweisen entdeckten. Der Ausgang des „Streites“ ist bekannt: Statt die mathematische Praxis radikal zu verändern, wie dies vor allem Brouwer vorschwebte, hat die konstruktivistische Kritik zu einer neuen mathematischen Disziplin geführt, der „Konstruktiven Mathematik“.[20]

Ein zweites Beispiel betrifft Beweise, die nur mit Hilfe von Computern zustande kamen, wie etwa des Vierfarbensatzes und der Keplerschen Vermutung. Eine Menge wurde in der Philosophie der Mathematik über solche Beweise geschrieben und es wurden ganz gegensätzliche Schlüsse daraus gezogen. Ohne Zweifel herrschte zu Beginn ihrer Entdeckung Uneinigkeit unter Mathematikern und Mathematikerinnen darüber, ob die Korrektheit der betreffenden Resultate damit gezeigt war.[21] Auch hier ist es jedoch schwierig zu sagen, die Opponentinnen hätten Fehler in den Beweisen entdeckt, die von den Proponenten nicht akzeptiert wurden. Und auch hier hat sich

[16] Vgl. auch Heintz (2000, S. 233)

[17] Und dies auch, nachdem sie in Zeitschriften oder Büchern publiziert worden sind. Es wäre wahrscheinlich nicht nötig, diese Aussage zu belegen; zumindest um das Ausmass dieses Phänomens abzuschätzen, ist die Lektüre der folgenden Artikel hilfreich: Hersh (1979), Davis (1972).

[18] Für die Details dieser Gegenüberstellung siehe van Dalen und Troelstra (1998, Kap. 1).

[19] Vgl. Kline (1972, S. 1197)

[20] Oder eigentlich zu mehreren neuen Disziplinen; die Mathematics Subject Classification listet etwa deren fünf auf.

[21] Vgl. MacKenzie (2001, S. 101f.)

mittlerweile ein Konsens gebildet; Computerbeweise werden neben anderen Beweisen geduldet, wenn auch viele Mathematiker und Mathematikerinnen „traditionelle“ Beweise bevorzugen.[22]

Der Prozess des Akzeptierens eines Resultates in der mathematischen Gemeinschaft verläuft kontinuierlich, d. h. es gibt wohl keinen *bestimmten* Zeitpunkt, zu dem das Resultat den Status der Hypothese oder Vermutung verliert und als gesichert gilt. Ein klares Indiz dafür, dass es zum mathematischen Wissen gehört, ist natürlich, dass es von Mathematikern und Mathematikerinnen in eigenen Arbeiten benutzt wird, sei es in Artikeln, Lehrbüchern, oder Vorlesungen usw.:

> Mathematicians in every field rely on each other's work, quote each other; the mutual confidence which permits them to do this is based on confidence in the social system of which they are part. They do not limit themselves to using results which they themselves are able to prove from first principles. If a theorem has been published in a respected journal, if the name of the author is familiar, if the theorem has been quoted and used by other mathematicians, then it is considered established. Anyone who has use for it will feel free to do so. (Davis und Hersh, 1981, S. 390)

Bedeutet dies auch, dass der Soziale Verifikationsprozess irgendwann zum Abschluss kommt? Die eben erwähnte kontinuierliche Natur der Integration mathematischer Resultate in das mathematische Wissen macht es bereits unwahrscheinlich, einen *bestimmten* Zeitpunkt anzugeben, zu dem die Überprüfung derselben enden würde.[23] Ich bin jedoch davon überzeugt, dass die Überprüfung überhaupt nie zu Ende geht. Einen Zeitpunkt anzugeben, zu dem der Verifikationsprozess eines Beweises beendet ist, bedeutete, dass nachfolgende Kritik an diesem Beweis von der mathematischen Gemeinschaft einfach ignoriert würde. Mir scheint eine solche Haltung sehr unplausibel. Berühmt ist das Beispiel von A.B. Kempe, der 1879 einen „Beweis“ des Vierfarbensatzes veröffentlichte, in welchem erst elf Jahre später ein Fehler gefunden wurde, den Kempe nicht beheben konnte.[24] Hierbei handelt es sich um ein Resultat, das auf reges Interesse der Mathematiker stiess und (zwischen 1879 und 1890) weitere (fehlerhafte) „Beweise“ inspirierte. Obwohl der Beweis Kempes also breite Unterstützung fand und von der mathematischen Gemeinschaft akzeptiert war,[25] entwickelte sich 1890 bei der Veröffentlichung des Fehlers offenbar keine Diskussion darüber, ob am Beweis festzuhalten war. Alle beteiligten Personen waren sich darüber einig, dass

[22] Vgl. Heintz (2000, S. 183ff.), Tymoczko (1979, S. 57f.), MacKenzie (2001, S. 148f.)

[23] Keinesfalls kann etwa das Publikationsdatum (in einer Zeitschrift oder in einem Buch o.ä.) den fraglichen Zeitpunkt darstellen, weil sich zahlreiche Beweise erst nach ihrer Publikation als fehlerhaft herausstellten (vgl. Fussnote 17).

[24] Vgl. Mitchem (1981)

[25] Percy Heawood (1890), der diesen Fehler entdeckte, schrieb z. B.: "[I]t will be shown that there is a defect in the *now apparently recognized proof.*" (Hervorhebung von mir)

nach einem neuen Beweis gesucht werden müsse. Das Beispiel lässt auch erkennen, wie schwierig es zuweilen sein kann, Fehler in Beweisen zu entdecken.

Der letzte Absatz zeigt also, dass mathematisches Wissen revidiert werden kann. Auf diese Tatsache aufmerksam zu machen, war ein gemeinsamer Impetus der meisten Autoren im Anfangsstadium der „maverick tradition".[26] Entsprechend wurde ihre Position oft auch einfach als „Fallibilismus" bezeichnet.[27] Es ist klar, weshalb sie diesen fallibilistischen Aspekt der mathematischen Praxis hervorstrichen: Er ist unverträglich mit der These, mathematisches Wissen könne „auf ein sicheres Fundament gestellt werden" – eine These, die Teil aller Grundlagenprogramme war. Um dieser These gerecht zu werden, blieben deren Vertreter nur zwei Möglichkeiten: a) Die obigen Beobachtungen nicht zu berücksichtigen: "pretend not to notice the gap between preaching and practice."[28] Oder b) zu sagen, nicht alle in der Mathematik akzeptierten Resultate gehörten zum mathematischen Wissen (zumindest jene nicht, die irgendwann falsifiziert werden): "mathematics as practiced every day by mathematicians is not what mathematics really ought to be"[29]. Interessant – wenn auch nicht ganz überraschend – ist, dass sich im nächsten Abschnitt ein ähnliches Bild ergibt, insofern als die Vorstellung vieler Grundlagenvertreter bezüglich der Beweise von der tatsächlichen Beweispraxis in beträchtlichem Masse abweicht.

B Individueller Verifikationsprozess

Unsere Leitfrage formulierten wir zu Beginn des Kapitels folgendermassen:

(I1) Weshalb werden Beweise als (bevorzugte) Gründe für Korrektheit mathematischer Resultate betrachtet?

Nun wurde im letzten Abschnitt der Vorgang nachgezeichnet, der zum Akzeptieren oder zur Ablehnung eines Beweises bzw. eines Resultates in der mathematischen Gemeinschaft führt. Im Zentrum dieses Sozialen Verifikationsprozesses steht die Prüfung des Beweises durch den einzelnen Mathematiker und die einzelne Mathematikerin, d. h. der Individuelle Verifikationsprozess. Der nächste Schritt besteht in der Diskussion der folgenden Frage:

(I2) Wie „prüft" der Mathematiker oder die Mathematikerin einen Beweis? Oder: Wie lässt sich der Individuelle Verifikationsprozess beschreiben?

Nun ist sicherlich zu erwarten, dass eine Antwort auf (I2) die möglichen Antworten auf (I1) eingrenzt, weil die Mathematikerin den Beweis (u. a.) darauf prüft, *ob* jener

[26] Vgl. die Einleitung und beispielsweise Lakatos (1976*a*,*b*), Hersh (1979), Davis (1972), Putnam (1975)

[27] Vgl. Ernest (1998, S. 10)

[28] Hersh (1979, S. 42)

[29] Hersh (1979, S. 42)

diese Rechtfertigungsfunktion einnehmen kann (d. h. ob jener korrekt ist). Und umgekehrt dürfte eine Klärung dessen, wie ein Beweis zur Rechtfertigung herangezogen werden kann (also (I1)), Aufschluss darüber geben, worauf bei der „Prüfung“ in (I2) geachtet wird. Schliesslich bleibt, so denke ich, eine Theorie von Beweisen unbefriedigend, solange sie diese beiden Fragen nicht zu beantworten in der Lage ist. Ich möchte auf den folgenden Seiten daher die beiden in der Mathematikphilosophie verbreiteten „Standard-Theorien“ zu Beweisen genau darauf hin prüfen; grob gesagt ist dem ersten Vorschlag zufolge ein Beweis ein besonders überzeugendes Argument, dem zweiten zufolge eine formale Ableitung aus anerkannten Axiomen.[30]

B.1 Beweise und Überzeugung

Eine nahe liegende Weise, unsere Leitfrage (I1) zu beantworten, dürfte die folgende sein.

> Wenn wir den Beweis als *Grund* für die Korrektheit eines mathematischen Resultates bezeichnen, so wird damit die grundlegende Tatsache verschleiert, dass der *Beweis selbst* Gründe für diese Korrektheit angibt. In erster Linie nämlich ist ein Beweis ein Text (mit Diagrammen, Formeln, …), der (in den meisten Fällen) eine argumentative Struktur aufweist („daraus folgt“, „angenommen“, „wir schliessen somit“, …). Ein Beweis rechtfertigt also eine mathematische Aussage genau so, wie andere Argumente nicht-mathematische Behauptungen rechtfertigen. Ein Beweis *ist* ein Argument.
>
> Nun ist es wahr, dass nicht alle Argumente für eine mathematische Aussage in der mathematischen Gemeinschaft als Beweise angesehen werden. Mathematiker und Mathematikerinnen unterscheiden von Beweisen etwa Plausibilitätsüberlegungen oder numerische Evidenz. Diesen letzteren ist eigen, dass sie an der Korrektheit der Aussage noch Zweifel lassen; sie sind nicht *vollkommen* überzeugend. Beweise, folglich, sind vollkommen überzeugende Argumente.

Ich gehe mit vielem einig, was in dieser Antwort auf (I1) zum Ausdruck kommt; insbesondere finde ich es plausibel, dass eine Mathematikerin beim Prüfen eines Beweises sich durch diesen selbst von der Korrektheit der betreffenden Aussage überzeugen lässt (doch siehe unten), oder dass sich jemand beim Verfassen eines Beweises fragt, ob dieser die Leser überzeugen werde. Lakatos (1976*a*) zum Beispiel beschreibt

[30] Neben diesen beiden „Standard-Theorien“ gibt es natürlich eine Vielzahl anderer in der Literatur formulierter Antworten auf die Frage, was ein Beweis sei; leider können diese in der vorliegenden Arbeit nicht diskutiert werden. Ich denke dabei zum Beispiel an so originelle Beiträge wie Brian Rotmans semiotische und Eric Livingstons ethnomethodologische Analyse der mathematischen Praxis sowie Richard Tieszens phänomenologischen Ansatz (Rotman, 2006; Livingston, 1986; Tieszen, 1992).

auf luzide Art, wie im 18. und 19. Jahrhundert um den Status der Eulerschen Polyederformel „gerungen“ und „gefeilscht“ wurde. Dieser Prozess erinnert in seiner Art (wenn auch nicht in seinem Inhalt) jedenfalls sehr an philosophische Debatten, in denen Argumente und Gegenargumente ausgetauscht werden.

Das Problem dieser Antwort scheint mir nun im zweiten Absatz zu liegen. Was soll es genau heissen, bei Beweisen handle es sich um vollkommen überzeugende Argumente? Es ist uns (und damit meine ich den grössten Teil der Bevölkerung) doch in den meisten Fällen überhaupt nicht möglich zu entscheiden, ob ein gegebenes Argument vollkommen überzeugend ist; sei es aus dem trivialen Grund, dass wir die Sprache, in der das Argument geführt wird, nicht verstehen, oder sei es, weil uns das mathematische Wissen fehlt, um dies zu beurteilen (oder aus vielen anderen denkbaren Gründen). Dies ist natürlich bloss Ausdruck der Tatsache, dass Beweise (wie alle Argumente) eine kommunikative Funktion erfüllen und daher für ihr Funktionieren zwischen den Kommunikationspartnern ein zumindest teilweise übereinstimmendes Vorwissen erfordern. Genauer sollte man daher davon sprechen, dass ein Beweis Mathematiker und Mathematikerinnen überzeugen sollte, die mit dem entsprechenden Gebiet vertraut sind. Oder in den Worten Hershs: “In mathematical practice, in the real life of living mathematicians, proof is convincing argument, as judged by qualified judges.”[31] Trotzdem lassen sich meines Erachtens mindestens zwei Gründe angeben, die gegen diese (oder eine ähnliche) Antwort sprechen. Der erste ist, dass Beweise – vor allem längere und komplexere – *alleine* überhaupt nicht in der Lage sind, jemanden vollständig zu überzeugen; der zweite, dass es Argumente gibt, die nicht weniger überzeugend sind als Beweise, jedoch nicht als solche gelten. Ich möchte nun diese beiden Gründe ausführen.

Wie kommt es also dazu, dass ein Mathematiker oder eine Mathematikerin von einem (bewiesenen) mathematischen Resultat überzeugt wird? Ich kann natürlich keine vollständige Antwort darauf geben, doch das Folgende betrachte ich als selbstverständlich: Eine entscheidende Rolle (vor allem bei längeren und komplexeren Beweisen) spielt die Reaktion der mathematischen Gemeinschaft auf den Beweis und das Resultat, d. h. was wir oben als Sozialen Verifikationsprozess bezeichnet haben. Erst wenn dieser über längere Zeit keine Fehler im Beweis zu Tage gefördert hat, wird der oder die Einzelne das Resultat auch glauben. David Hume sah diesen sozialen Aspekt bereits deutlich:

> There is no algebraist nor mathematician so expert in his science, as to place entire confidence in any truth immediately upon his discovery of it, or regard it as any thing but a mere probability. Every time he runs over his proofs, his confidence encreases; but still more by the approbation of his friends; and is raised to its utmost perfection by the universal assent and applauses of the learned world. (Hume, [1739] 1973, 1. Buch, 4. Teil, 1. Abschnitt)

[31] Hersh (1993, S. 389)

Der Grund dafür ist, dass – wie im vorangehenden Abschnitt bereits betont – jeder Mathematiker und jede Mathematikerin sich (oft) täuscht und (viele) Fehler macht. Diese Erfahrung hat natürlich Auswirkungen auf die Einschätzung der eigenen Fähigkeit, Fehler in Beweisen zu erkennen.

Wenn wir uns auf einfachere Resultate beschränken, mag die Sache bedeutend anders aussehen; doch – und damit komme ich zum zweiten oben angesprochenen Grund – in einigen dieser Fälle sind auch überzeugende Argumente denkbar, die wir nicht als Beweise beschreiben würden. Betrachten wir etwa das in der Literatur oft erwähnte Beispiel:[32] Leonhard Eulers Bestimmung des Werts der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.[33] Um seine Überlegungen nachzuvollziehen, ist zu beachten, dass ein reelles Polynom (in der Variablen x)

$$a_0 - a_1x^2 + \cdots + (-1)^k a_k x^{2k}$$

vom Grad $2k$ mit $2k$ reellen Nullstellen $\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_k$ geschrieben werden kann als

$$a_0(1 - \frac{x^2}{\lambda_1^2})\cdots(1 - \frac{x^2}{\lambda_k^2})$$

(falls $a_0 \neq 0$). Euler dividierte in der Potenzreihenentwicklung von $\sin(x)$ durch x und betrachtete den resultierenden Ausdruck

$$1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \cdots \tag{1.1}$$

als „Polynom von unendlichem Grad". Dieses hat die „Nullstellen" $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ (weil $\sin(x)$ die Nullstellen $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ besitzt) und Euler schrieb daher wie oben

$$(1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})(1 - \frac{x^2}{9\pi^2})\cdots. \tag{1.2}$$

Durch Koeffizientenvergleich in (1.1) und (1.2) erhielt er die Gleichung

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots = \frac{1}{3!},$$

d. h.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{1.3}$$

Zur Bestätigung dieses Resultates berechnete Euler beide Seiten von (1.3) auf viele Dezimalstellen genau und fand Übereinstimmung. Kann man dennoch an der Richtigkeit von (1.3) zweifeln? Mark Steiner, der diese Herleitung von Euler ebenfalls diskutiert, schreibt dazu:

[32] Vgl. zum Beispiel Pólya (1954, II.6), Kitcher (1983, S. 196–7), Steiner (1975, S. 103–6).

[33] Euler (1992, S. 75–85, 138–142)

> True, it is generally held that because a mathematical proposition is verified for $n = 1$ to $n = 20$ one cannot conclude that it holds generally. But Euler's results schould give pause to such dogmatism. What we know, what *he* knew, about analysis made it impossible to believe that 20 places of the series $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \cdots$ should coincide with $\pi^2/6$ by "accident." The value $\pi^2/6$, after all, was not concocted ad hoc, as an approximation—it fell out of the blue, the outcome of operations that had initial plausibility. (Steiner, 1975, S. 104)

Zudem führte Euler dieselbe Herleitung für andere Koeffizienten in (1.1) durch, und auch in diesen Fällen fand er durch Approximation der betreffenden Ausdrücke Übereinstimmung auf viele Dezimalstellen genau. Schliesslich betrachtete er den Ausdruck $1 - \sin(x)$ als „Polynom unendlichen Grades" mit den „Nullstellen" $(k + 1/2)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, und bestimmte auf dieselbe Weise wie oben die Gleichung

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4},$$

ein Resultat, das zuvor von Leibniz sogar *bewiesen* worden war.

Diese Daten lassen keinen Zweifel an der Richtigkeit von (1.3), und Euler besass somit ein überzeugendes Argument dafür. Doch es konnte nicht als Beweis gelten, und dessen war sich Euler bewusst.[34] Die Analogie zwischen Polynomen endlichen und „unendlichen" Grades war nichts weiter als eine „perilous guess"[35].

Welche Schlüsse ziehen wir aus diesen Überlegungen im Hinblick auf (I1) und (I2)? Über die plausible These hinaus, wonach Beweise auch Argumente sind und entsprechend wie Argumente auf ihre Korrektheit (Schlüssigkeit) geprüft werden, scheint der diskutierte Vorschlag nur wenig Stimmiges zu liefern. Die Eigenschaft, ein (für die qualifizierte Mathematikerin) vollkommen überzeugendes Argument zu sein, ist für Beweise weder notwendige noch hinreichende Bedingung. Somit ergibt sich aus dem Vorschlag keine zufriedenstellende Antwort auf (I1), d. h. auf die Frage, weshalb Beweise eine bevorzugte rechtfertigende Rolle spielen. Dies gilt auch für (I2), die Beschreibung des Individuellen Verifikationsprozesses, denn wir haben gesehen, dass man Beweise prüfen, ohne Fehler zu finden, und trotzdem Zweifel am Resultat hegen kann; und natürlich ist man nicht selten umgekehrt auch vor der Prüfung eines Beweises bereits vom Resultat überzeugt.

B.2 Beweise und Ableitungen

Es wäre unverantwortlich, zur Aufklärung dessen, was unter einem Beweis zu verstehen ist, nicht jene zu befragen, welche sich gewissermassen von Berufs wegen mit

[34] Siehe Pólya (1954, S. 20–1). Wie Pólya (1954, S. 21) ebenfalls bemerkt, lieferte Euler später einen Beweis für das Resultat.

[35] Steiner (1975, S. 106)

Beweisen beschäftigen. Ich denke hierbei nicht an den Mathematiker, der Beweise in seiner Tätigkeit produziert und rezipiert, sondern an die Beweistheoretikerin, die also Beweise zu ihrem *Untersuchungsgegenstand* macht. Das grundlegende Konzept in der Beweistheorie ist dasjenige eines „formalen Systems“. Man versteht darunter eine formale Sprache (d. h. ein Alphabet und grammatikalische Regeln zur Bildung der „wohlgeformten Ausdrücke“ und „Formeln“) zusammen mit einer (möglicherweise leeren) Menge ausgezeichneter Formeln der Sprache („Axiome“ genannt) und Regeln zur Ableitung von Formeln aus diesen Axiomen. Dabei wird verlangt, dass sowohl die grammatikalischen als auch die Ableitungsregeln sowie die Axiomenmenge „mechanisch“ sind in dem Sinne, dass ein Computer in der Lage wäre, wohlgeformte Ausdrücke und Formeln von unzulässigen zu unterscheiden, und zu entscheiden, ob eine gegebene Zeichenfolge eine Ableitung gemäss den Ableitungsregeln aus der Axiomenmenge darstellt.[36] Der wesentliche Punkt ist, dass in einem formalen System die Formeln uninterpretiert und die Regeln rein syntaktischer Natur sind. Man spricht daher oft auch von „uninterpretierten Kalkülen“.[37]

In der Beweistheorie dann ist ein Beweis eine Ableitung in einem formalen System. Diese „formalistische“ Bestimmung von Beweisen wurde in den letzten hundert Jahren zur „offiziellen“ Doktrin der Mathematikphilosophie,[38] und fand auch bei Mathematikern und Mathematikerinnen Anklang, wie Zitate zweier einflussreicher Vertreter belegen:

> [C]'est par une comparaison, plus ou moins explicite, avec les règles d'un langage formalisé, que se fait l'essai de la correction d'un texte mathématique. (Bourbaki, 1970, EI.8)
>
> A mathematical proof is rigorous when it is (or could be) written out in the first-order predicate language $L(\in)$ as a sequence of inferences from the axioms ZFC, each inference made according to one of the stated rules. (Mac Lane, 1981, S. 377)

Dabei wird in diesen Zitaten jedoch auch deutlich, dass von einer *Identifikation* von Beweisen und Ableitungen nicht die Rede sein kann. In der Tat kommen Ableitungen als Beweise (im Gegensatz zu: „als Gegenstände der Untersuchung in der mathematischen Logik“) in der mathematischen Praxis nicht vor.[39] Dies wirft die Frage nach der

[36] Solche Voraussetzungen werden nicht immer gemacht, stellen für die folgende Diskussion jedoch keine Einschränkung dar.

[37] Die etwas umständliche Definition eines formalen System hatte zum Ziel, nicht nur – wie das oft getan wird – axiomatische Kalküle zu erfassen, sondern auch Systeme natürlicher Deduktion oder Sequenzenkalküle, also die wichtigsten Typen formaler Systeme.

[38] Vgl. den Soziologen MacKenzie (2001, S. 309): “[T]he canonical meaning of proof in modern philosophy is formal proof.” Noch bündiger formuliert es der Philosoph Steiner: “Proof is formal proof.” (Steiner, 1975, S. 96)

[39] Vgl. MacKenzie (2001, S. 316f.)

Beziehung zwischen Beweisen und Ableitungen auf, doch bevor ich darauf eingehe, möchte ich die formalistische Antwort auf (I1) studieren.

Ableitungen und (I1)

Wenn man bedenkt, dass die Beweistheorie aus dem Grundlagenstreit entstand, und dass dieser ein Streit darüber war, wie „die Mathematik sicher zu begründen" sei,[40] so erstaunt es nicht, dass die Formalistin die Frage nach der rechtfertigenden Funktion von Beweisen leicht zu beantworten weiss:

> Ein Beweis ist ein formaler Beweis (eine Ableitung) in einem formalen System. Dadurch wird gewährleistet, dass bewiesene Aussagen wahr sind, solange nur die Axiome des betreffenden formalen Systems wahr und die Ableitungsregeln „korrekt" sind. Falls, wie üblich, die Regeln „logischer" Art sind, dann folgen alle bewiesenen Aussagen also „deduktiv" aus den „mathematischen" Axiomen. Beweise reduzieren also die Frage nach der Korrektheit der bewiesenen Aussage auf diejenige nach der Korrektheit der betreffenden Axiome.
>
> Diese Reduktion ist erkenntnistheoretisch von grossem Nutzen, weil – und hier hat die Formalistin mehrere Möglichkeiten –: (a) die Axiome offensichtlich wahr sind; oder weil (b) die Anzahl der Axiome beschränkt ist und ihre Korrektheit einfacher einzusehen ist als diejenige ihrer Folgerungen; oder weil (c) (die voraussetzungsfreie Rechtfertigung von Aussagen ohnehin nicht zu erreichen ist, aber:) dadurch die möglichen Fehlerquellen einer mathematischen Theorie offen gelegt werden; oder weil …[41]

Wie schon beim in B.1 diskutierten Vorschlag muss an der formalistischen Antwort auf (I1) eine gewisse Ungenauigkeit bemängelt werden. Wenn die Wahl des formalen Systems so offen gelassen wird, ist es unmöglich, Beweise von „anderen Argumenten" zu unterscheiden. Dies lässt sich bereits an trivialen Beispielen erkennen: Sei $P(n)$ die Formel in der Sprache von PA (Peano-Arithmetik) in der Variablen n, welche die Unlösbarkeit von $x^n + y^n = z^n$ in den positiven ganzen Zahlen ausdrückt (eine solche existiert, weil das Potenzieren primitiv rekursiv ist). Paradigmatisch für ein „anderes Argument" dürfte ein Beweis p (in PA) von $P(n)$ für alle n (grösser als

[40] Vgl. das Zitat von Hilbert auf Seite 2

[41] Viele weitere Möglichkeiten wurden in der Philosophie (der Mathematik) diskutiert; auf die „Zweite Analytik" von Aristoteles geht zum Beispiel die Vorstellung zurück, es müssten die „letzten Gründe" (oder die „ersten Annahmen") einer Theorie aufgefunden werden, um wahres Wissen zu erwerben. In einem ähnlichen Sinne hat sich bekanntlich auch Frege in den Grundgesetzen geäussert; siehe Frege (1893, S. VIf.).

2 und) kleiner als eine feste grosse Zahl N gelten. Offensichtlich liefert p aber sofort eine Ableitung von $\forall nP(n)$ im formalen System PA + T, wobei T die Formel $\forall 2 < n < NP(n) \rightarrow \forall 2 < nP(n)$ bezeichne. Heute wissen wir, dass der Grosse Satz Fermats wahr ist; was jedoch, wenn jemand vor Andrew Wiles einen Beweis bloss von T für ein sehr grosses N erbracht hätte (so unwahrscheinlich dies auch sein mag)? Dann hätte es sich bei obigem p trotz allem um einen Beweis des Grossen Satzes von Fermat gehandelt. Meiner Meinung nach zeigt dieses (wenn auch sehr künstliche) Beispiel, dass es sehr schwierig sein dürfte, in der obigen Antwort die formalen Systeme nach rein *mathematischen* Kriterien einzugrenzen, um Beweise von anderen Argumenten zu unterscheiden.

Auch das andere Extrem, nämlich ein einzelnes formales System auszuzeichnen, in denen Beweise geführt werden sollen, ist nicht allzu Erfolg versprechend. Viele Logiker und Mathematikphilosophinnen halten zwar wie Saunders Mac Lane im obigen Zitat dafür, dass ein Argument genau dann ein Beweis ist, wenn es sich in ZFC (Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom) zu einer Ableitung „ausschreiben liesse".[42] Doch in der Literatur wurde dieser Ansicht bereits von verschiedenen Seiten widersprochen, und es reicht hier, die dabei vorgebrachten Argumente zu erwähnen. Die meisten dieser Argumente weisen einfach auf eine mathematische Praxis hin, in der Beweise geführt werden (bzw. wurden), die sich jedoch kaum in ZFC „ausschreiben liessen". Ein Beispiel für eine solche mathematische Praxis ist Konstruktive Mathematik, wie sie sich zum Beispiel in Bishop (1967) findet. Hier ist das System ZFC „zu stark", weil Junktoren und Quantoren der Logik erster Stufe von Konstruktivisten und Konstruktivistinnen intuitionistisch interpretiert werden.[43] Ein weiteres Beispiel ist Kategorientheorie, deren Objekte „zu gross" (Klassen) sind.[44] Auch wenn man in der Geschichte zurückgeht, stösst man auf Beispiele; eine der Erkenntnisse in Lakatos (1976*a*) ist ohne Zweifel, dass in der Geschichte des Eulerschen Polyedersatzes eine Definition von Polyedern Ziel und nicht Ausgangspunkt war, eine Wiedergabe der ersten Beweise dieses Satzes (auch der korrekten) in der Sprache der Mengenlehre scheint daher unmöglich. Ähnliches liesse sich für Begriffe wie Kurve, Tangente oder Fläche unter einer Kurve sagen, welche man während langer Zeit als „direkt gegeben" oder „natürlich" betrachtete.[45]

Das letzte Beispiel deutet das generelle Problem der Formalistin an, in ihrer Antwort auch Beweispraktiken zu berücksichtigen, die sich von den heutigen stark unterscheiden.[46] Reicht eine feste Familie von formalen Systemen aus, um alle vergangenen, gegenwärtigen und *zukünftigen* Beweispraktiken zu „kodieren"? Mir erscheint

[42] Auf den Aspekt des „Ausschreibens" komme ich weiter unten ausführlicher zu sprechen.
[43] Vgl. Rav (2007)
[44] Siehe Muller (2001)
[45] Breger (1992, S. 86)
[46] Vgl. auch Rav (2007)

dies äusserst zweifelhaft, aber ich gebe nicht vor, abschliessend darauf antworten zu können. Was ich zu zeigen versucht habe, ist, dass die unpräzise Formulierung des formalistischen Vorschlages ein Problem darstellt. Und ich glaube, der plausibelste Ausweg besteht darin, statt beliebiger formaler Systeme oder einer festen Familie formaler Systeme einzig *von der mathematischen Gemeinschaft akzeptierte* formale Systeme zuzulassen. Dies resultiert in einer Auffassung von Beweisen, welche gemäss Resnik ziemlich verbreitet ist: "A popular view is that no result has been fully demonstrated until it has been derived from an accepted set of axioms within an accepted formal system."[47]

ABLEITUNGEN UND (I2)

Kann eine solche (oder ähnliche) Auffassung von Beweisen die Art und Weise erklären, wie Mathematiker und Mathematikerinnen in der Praxis Beweise prüfen und korrekte von inkorrekten Beweisen unterscheiden? Diese Frage ist umso drängender, weil – wie oben bereits erwähnt – Beweise in der mathematischen Praxis *nie* formale Beweise sind. Wie also ist die Beziehung zwischen Beweis und entsprechender Ableitung zu verstehen? Und kann eine Antwort darauf helfen, den Individuellen Verifikationsprozess zu erklären?

Um eine positive Antwort auf die letzte Frage geben zu können, ist es offensichtlich notwendig, eine möglichst enge Beziehung zwischen Beweisen und formalen Ableitungen zu konstruieren. Und ich glaube, eine solche Konstruktion ist nicht nur leicht zu finden, sondern wird von vielen Anhängern und Anhängerinnen des Formalismus auch tatsächlich vorausgesetzt. In einem ersten Schritt wird dabei bereitwillig zugegeben, dass Beweise und ihre formalen Ableitungen nicht in *allen* Aspekten vergleichbar sind; als zentral stellt sich hier für die Formalistin die Unterscheidung zwischen Entdeckungs- und Rechtfertigungskontext heraus. Während sie eingesteht, dass die Entdeckung eines Beweises auf eine Weise erfolgt, die mit derjenigen einer Ableitung nicht in Einklang gebracht werden kann, betont sie auch gleichzeitig die Irrelevanz dieser Diskrepanz für die Philosophie (und insbesondere für (I2)). Stellvertretend für viele der Philosoph John Burgess:

> [I]t must be acknowledged that the requirements of rigor pertain to the context of justification, publication for collective evaluation by a community of colleagues, and not to the context of discovery, private mental processes of individual researchers. No one discovers a theorem by first discovering the first step of the proof, second discovering the second step of the proof, and so on. The role of inductive, analogical, heuristic, intuitive, and even unconscious, thought in the context of discovery has been emphasized by all mathematicians discussing mathematics [...]. (Burgess, 1992, S. 10)

[47] Resnik (1992, S. 12)

Die Untersuchung von Entdeckungskontexten gehört nach Burgess zur Aufgabe weder der Philosophie noch der Mathematik, sondern der Psychologie, einer der "so-called human or soft studies"[48].[49]

Wenn wir uns nun auf den Rechtfertigungskontext beschränken – so die Formalistin in einem zweiten Schritt –, ist die Beziehung zwischen Beweis und Ableitung tatsächlich sehr eng. Und um dies zu zeigen, erinnert sie an die uns allen bekannte Situation, einem Beweis „nicht folgen zu können", weil ein Beweisschritt unklar ist. Wenn wir etwa Zweifel anbringen an der Behauptung der beweisenden Person, B folge aus A, so könnte diese darauf antworten, indem sie auf die „Zwischenschritte" aufmerksam macht, welchen zufolge A_1 aus A, A_2 aus $A_1, \ldots$, und B aus A_n folge. Vielleicht sind wir mit allen Schritten einverstanden, vielleicht gibt es aber auch solche, die uns noch immer unklar sind, sodass die beweisende Person weitere Zwischenschritte angeben muss. Wir können schliesslich unser Problem also lösen, indem wir den Beweisschritt (B folgt aus A) „interpolieren", d. h. in mehrere Schritte aufteilen, die wir allesamt als korrekt erachten. Der Formalistin zufolge nun sind Formalisierung und Interpolation eng miteinander verknüpft:

> Um einen Beweis zu formalisieren, müssen die einzelnen Beweisschritte bloss so lange interpoliert werden, bis die Beweisschritte „genügend klein" sind, d. h. Instanzen der Ableitungsregeln im gegebenen formalen System. Formalisierung ist nichts anderes als wiederholte Interpolation, und wiederholte Interpolation bietet die Möglichkeit der immer besseren „Approximation" an die Ableitung. Die Beziehung zwischen Beweis und Ableitung ist also sehr einfach zu beschreiben: Beide sind von der gleichen Art, bloss ist die Ableitung etwas ausführlicher als der Beweis.

So ist bei den Bourbakisten die Rede von « la rédaction de textes se rapprochant de plus en plus d'un texte formalisé »[50]. Und bei Mac Lane lesen wir: "Actual proofs may cut a few corners or leave out some obvious steps, to be filled in if and when needed."[51]

Dieses Bild von Beweisen als „Ableitungsskizzen" weist meines Erachtens gewichtige Mängel auf; ich glaube, man kann zu Recht bezweifeln, dass die Interpolation eines (korrekten) Beweises im eben beschriebenen Sinne stets zu einer Ableitung in

[48] Burgess (1992, S. 11)

[49] Diese Position lässt sich zurückverfolgen bis zu Freges „Begriffsschrift", wo wir lesen:

> Es kann daher einerseits nach dem Wege gefragt werden, auf dem ein Satz allmählich errungen wurde, andrerseits nach der Weise, wie er nun schliesslich am festesten zu begründen ist. Erstere Frage muss möglicherweise in Bezug auf verschiedene Menschen verschieden beantwortet werden, letztere ist bestimmter, und ihre Beantwortung hängt mit dem innern Wesen des betrachteten Satzes zusammen. (Frege, 1879, S. III)

[50] Bourbaki (1970, EI.8)

[51] Mac Lane (1982)

einem vorgegebenen formalen System führt. Dies unter anderem deshalb, weil Beweise selten eine Abfolge von sorgfältig aufeinander aufbauenden Schritten darstellen. Vielmehr müssen die verschiedenen Teile des Beweises oft erst auf die richtige Weise „zusammengesetzt" werden, und dies erfordert seitens des Lesers oder der Leserin ein Weiterlesen und Vorausschauen, einen „Blick für das Ganze" und damit für die Rolle der einzelnen Beweisschritte im gesamten Beweis.[52]

Doch auch wenn Interpolation und Formalisierung in der vom Formalisten vertretenen Weise miteinander verbunden wären; ich glaube nicht, dass seine Antwort auf (I2) befriedigend ausfällt. Führen wir uns seine Position vor Augen: Mathematiker und Mathematikerinnen prüfen im Individuellen Verifikationsprozess gewisse Texte darauf hin, ob sie eine gewisse Aussage *beweisen*. Dem Formalisten zufolge ist letzteres genau dann der Fall, wenn die Texte Skizzen für Ableitungen in gegebenen formalen Systemen darstellen. Die natürlichste Möglichkeit für den Formalisten, diese Konzeption in die Beschreibung des Individuellen Verifikationsprozesses einfliessen zu lassen, besteht offenbar darin zu behaupten, die Mathematiker und Mathematikerinnen führten an den Texten in der Tat Interpolationsschritte durch um festzustellen, ob Ableitungen resultieren.

Dass dies nicht sein kann, ist einfach zu sehen: Nicht nur, dass die wenigsten Mathematiker und Mathematikerinnen die Regeln und Axiome eines formalen Systems kennen und in der Lage sind, eine Ableitung überhaupt hinzuschreiben. Der zeitliche Aufwand für die Formalisierung auch für Experten ist enorm.[53] Schliesslich sind formale Systeme eine etwas über hundertjährige Erfindung, während Beweise seit Jahrtausenden gelesen und geprüft werden.

Gibt es für den Formalisten eine Alternative? Leider haben sich Vertreter und Vertreterinnen des Formalismus meines Wissens nie mit der Frage beschäftigt, wie eine Antwort auf (I2) im Rahmen ihrer Theorie formuliert werden könnte, sodass wir hier über andere mögliche Antworten als die eben beschriebene nur spekulieren könnten. Meine Strategie im Rest dieses Abschnitts ist daher die folgende: Ich will auf eine Eigenschaft von Beweisen hinweisen, welche Ableitungen nicht zukommt, und sodann zu zeigen versuchen, dass diese Eigenschaft bei der Prüfung von Beweisen eine wesentliche Rolle spielt. Im Anschluss daran werde ich allfällige Hoffnungen zu dämpfen versuchen, dieses Phänomen liesse sich im Rahmen des Formalismus erklären.

---

[52] Ich werde in Abschnitt B des zweiten Kapitels auf dieses Erfordernis eingehender zu sprechen kommen. Für ein einfaches Beispiel siehe die Diskussion in Tragesser (1992, S. 176f.).

[53] Ein solcher Experte schätzt zum Beispiel, dass die Formalisierung einer Seite eines einfachen mathematischen Lehrbuches in der Sprache eines Beweisassistenten eine Woche dauert (Wiedijk, 2008). Der Grund kann hier nicht ausschliesslich in der grösseren Textmenge liegen: Wiedijk nennt eine Zahl von etwa 4 für das Verhältnis zwischen der Länge formalisierten und unformalisierten Textes (Wiedijk, nicht publiziert).

Vorwissen bei der Prüfung von Beweisen

Wir erinnern uns daran, dass der Formalist darauf bedacht war, den Entdeckungs- vom Rechtfertigungskontext zu unterscheiden. Wie Hans Reichenbach, der als einer der Begründer dieses Begriffspaares gilt, schreibt, besteht die Entdeckung von Beweisen nicht in der Befolgung gewisser formaler Regeln: "The act of discovery escapes logical analysis; there are no logical rules in terms of which a 'discovery machine' could be constructed that would take over the creative function of the genius."[54] „Verstehen" und „Intuition" der betreffenden Theorie spielen bei diesem Prozess eine wichtige Rolle.[55]

Doch die strikte Trennung zwischen Entdeckung und Rechtfertigung lässt sich bei der Prüfung von Beweisen nicht aufrecht erhalten, wie der Formalist mit der Beschreibung des Interpolationsprozesses implizit bereits zugestanden hat. Erscheint der Mathematikerin der Beweisschritt $A \rightarrow B$ zweifelhaft, so ist es an ihr, entweder einen Beweis dieser Implikation (z. B. $A \rightarrow A_1, \ldots, A_n \rightarrow B$) oder ein Gegenbeispiel zu finden. In beiden Fällen handelt es sich um einen Entdeckungskontext; die Mathematikerin greift auf ihre Kenntnis der betreffenden Theorie zurück, erinnert sich an analoge Beweise, welche sie früher angetroffen hat, wendet komplexe heuristische Methoden an, die sie vielleicht selbst nicht beschreiben könnte – kurz: sie benutzt Methoden, welche als „inductive, analogical, heuristic, intuitive, and even unconscious"[55] zu beschreiben sind. Dies unterscheidet die Prüfung von Beweisen von der Prüfung von Ableitungen: Wie zu Beginn von B.2 erwähnt, lässt sich mechanisch überprüfen, ob eine Zeichenfolge eine Ableitung gemäss den Regeln des betreffenden formalen Systems bildet.

Man kann diesen Befund auch etwas anders formulieren. Zur Prüfung von Ableitungen wird kein mathematisches Wissen benötigt, während die Prüfung eines Beweises ein grosses und dem jeweiligen mathematischen Gebiet eigenes Vorwissen erfordert. Um zu sehen, welch zentrale Rolle dieses Vorwissen im Individuellen Verifikationsprozess spielt, ist es instruktiv, Thurstons Diskussion eines von ihm selbst bewiesenen Resultates, der Geometrisierung von Haken-3-Mannigfaltigkeiten, zu skizzieren.[56] Dieser Satz verbindet mehrere mathematische Gebiete miteinander, die gemäss Thurston zur damaligen Zeit weit auseinander lagen, und es dauerte daher eine gewisse Zeit, bis die mathematische Gemeinschaft die Bedeutung des Satzes überhaupt verstand.[57] Die Beschreibung des Prozesses, in dem er den Beweis zu kommunizieren versuchte, ist ein längeres Zitat wert:

> It became dramatically clear how much proofs depend on the audience. We prove things in a social context and address them to a certain audience. [...] At

[54] Reichenbach (1938, S. 238)
[55] Vergleiche das Zitat von Burgess oben (S. 21).
[56] Siehe Thurston (1994)
[57] Thurston (1994, S. 14)

> that time, there was practically no infrastructure and practically no context for this theorem, so the expansion from how an idea was keyed in my head to what I had to say to get it across, not to mention how much energy the audience had to devote to understand it, was very dramatic. [...] I concentrated most of my attention on developing and presenting the infrastructure in what I wrote and in what I talked to people about. I explained the details to the few people who were "up" for it. I wrote some papers giving the substantive parts of the proof of the geometrization theorem for Haken manifolds [...] The result has been that now quite a number of mathematicians have what was dramatically lacking in the beginning: a working understanding of the concepts and the infrastructure that are natural for this subject. (Thurston, 1994, S. 15)

Erst nachdem sich diese Mathematiker und Mathematikerinnen die betreffende Art angeeignet hatten, gewisse mathematische Konzepte zu betrachten, waren sie also überhaupt in der Lage, dem Beweis der Geometrisierungs-Vermutung für Haken-Mannigfaltigkeiten zu folgen und ihn zu prüfen. Dies ist natürlich keine Ausnahmeerscheinung; Dawson (1984) berichtet beispielsweise, dass Gödels Beweis der Unvollständigkeitssätze von vielen Mathematikern jahrelang nicht verstanden wurde. Ähnlich wurden Grothendiecks Beiträge zur Algebraischen Geometrie in den Sechziger- und Siebzigerjahren als „Revolution“ empfunden, an die man sich erst „zu gewöhnen hatte“[58]. Und schliesslich ist *jeder* Beweis für Nichteingeweihte unverständlich; auch noch so unspektakuläre Beweise in Forschungsartikeln erfordern für ihre Prüfung oft ein längeres Training, einen Aufbau der „mentalen Infrastruktur“.

Das Phänomen, dass man mathematische Konzepte auf unterschiedliche Arten „sehen“ kann, lässt sich nach Thurston (1994, S. 3) an der Ableitung veranschaulichen: Ist diese die momentane Geschwindigkeit einer Funktion $f(t)$ in der Zeitvariablen t? Oder die Steigung der Tangente an den Graphen von f? Oder die beste lineare Approximation an f nahe des betreffenden Punktes? Oder der Grenzwert des Ausdruckes

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h},$$

wenn h gegen 0 geht? Nachdem er eine längere Liste solcher Möglichkeiten, die Ableitung zu betrachten, angegeben hat, bemerkt Thurston:

> This is a list of different ways of *thinking about* or *conceiving of* the derivative, rather than a list of different *logical definitions*. [...] I can remember absorbing each of these concepts as something new and interesting, and spending a good deal of mental time and effort digesting and practicing with each, reconciling it with the others. I also remember coming back to revisit these different concepts later with added meaning and understanding. (Thurston, 1994, S. 3)

[58] Michael Artin in Jackson (2004, S. 1196)

Es ist klar, dass jedes dieser „mentalen Modelle“ in bestimmten Situationen seine Berechtigung hat, und dass man Schwierigkeiten hätte, gewisse Beweise in der Mathematik zu verstehen, wenn man nur *eines* davon kennte. Auch ist jede Liste unvollständig; in der Differenzialgeometrie trifft die Studierende auf die Ableitung als 1-Form des Kotangentialbündels einer Mannigfaltigkeit, in der Kommutativen Algebra und Algebraischen Geometrie als Kählerdifferenzial usw.[59]

Ich glaube, diese Beobachtungen sind typisch, insofern Mathematiker und Mathematikerinnen in allen Gebieten viel Zeit damit verbringen, sich mit mathematischen Konzepten und Methoden „vertraut“ zu machen und die betreffenden mathematischen Theorien zu „verstehen“. Im zweiten Kapitel werde ich das Resultat dieses Vorgangs als „implizites Wissen“ beschreiben und zu präzisieren versuchen. Für die Diskussion in diesem Abschnitt lässt sich aus den letzten Absätzen entnehmen, dass das mathematische Vorwissen bei der Prüfung von Beweisen eine wesentliche Rolle spielt. Wie der Mathematiker und Philosoph Jeremy Avigad schreibt, ist nicht ersichtlich, wie im Rahmen des Formalismus mit diesem Vorwissen umgegangen werden soll:

> [I]t is not clear how to analyze the role of contextual background knowledge in the standard logical model. Our discussion shows that proofs are evaluated not just with respect to a particular set of goals and values, but also with respect to a set of resources that are assumed to be generally available. From the point of view of axiomatic deduction, however, a proof is a self-contained warrant, whose correctness is judged solely in the context of the relevant axiomatic system. (Avigad, 2006, S. 130)

Ein zentraler Grund dafür, dass Ableitungen von einigen Philosophen und Mathematikern als probates Instrument zur Lösung des Grundlagenproblems betrachtet wurden, liegt bestimmt darin, dass sie – wie Avigad hier ganz zutreffend schreibt – als Rechtfertigung einer mathematischen Aussage weitgehend „self-contained“ sind. Ihre Korrektheit lässt sich nach weitgehend „objektiven“ Kriterien feststellen. Ich glaube jedoch gezeigt zu haben, dass für Beweise in der mathematischen Praxis dasselbe nicht gilt. Und genau weil die „Autonomie“ oder „Objektivität“ ein so wichtiger Aspekt von Ableitungen darstellt, scheint es mir sehr zweifelhaft, dass die Prüfung von Beweisen innerhalb des formalistischen Rahmens adäquat beschrieben und erklärt werden kann.

C Soziologie des Beweises

Ich möchte nicht, dass meine Kritik an den beiden diskutierten „Definitionen“ von Beweisen missverstanden wird; ich habe zu zeigen versucht, dass diese die Fragen

[59] Siehe für diesen „proteischen“ Charakter der Mathematik auch Mac Lane (1992).

(I1) und (I2) nur unbefriedigend zu beantworten vermögen, nicht jedoch, dass sie die Realität mathematischer Praxis vollkommen verfehlten. Wie bereits bemerkt wurde, ist es durchaus plausibel, dass Beweise Argumente sind und ähnlich wie andere Argumente auf ihre Korrektheit hin geprüft werden. Ebenso plausibel ist die Vorstellung, für die meisten Gebiete der heutigen mathematischen Praxis liessen sich Axiomensysteme angeben, in denen Ableitungen und Beweise einander „entsprechen" (auch wenn diese Entsprechung vielleicht komplexer ist als gemeinhin angenommen).

Trotzdem ist es möglich, dass der Misserfolg dieser Charakterisierungen von Beweisen auf ein grundsätzliches Problem hinweisen; (der spätere) Wittgenstein hat die Ansicht vertreten, dass es sich beim Beweis um einen Familienähnlichkeitsbegriff handelt und eine Definition desselben daher unmöglich oder zumindest nicht hilfreich wäre.[60] Wir gingen von einer solchen nicht allzu hilfreichen Definition aus, als wir Beweise als dasjenige bestimmten, was die mathematische Gemeinschaft als solche erachtet, und vielleicht muss man sich damit abfinden, dass dies die einzige Weise darstellt, Beweise zu allen Zeiten und in allen mathematischen Gebieten zu charakterisieren. Zu dieser skeptischen Einsicht gelangt auch der Soziologe Donald MacKenzie (2001, S. 316ff). Er findet es zum Beispiel bemerkenswert, dass für einen Mathematikanfänger die einzige Möglichkeit zu lernen, was ein Beweis ist, darin besteht, genügend Beweise zu sehen, zu produzieren und dabei korrigiert zu werden. Keine Dozentin und kein Lehrbuch formuliert Kriterien, mit deren Hilfe er die Korrektheit von Beweisen zweifelsfrei überprüfen könnte. "As a professor of mathematics, 'you hope' that eventually students 'will cotton on' to what proof is. 'And the good mathematicians, I think, do. Those who don't, I'm afraid, don't become mathematicians.'"[61]

Die Feststellung in 1.A, dass sich die mathematische Gemeinschaft (zu einem bestimmten Zeitpunkt) über die Korrektheit und Inkorrektheit von Beweisen fast immer einig war, ist auch verträglich mit dem Urteil einiger Mathematik-Historiker und -Historikerinnen, wonach sich in der Vergangenheit veränderte, was für die Mathematiker und Mathematikerinnen als Beweis galt und was nicht. Es ist nicht so (wie oft angenommen wird), dass dabei stets zunehmend *höhere* Anforderungen gestellt wurden, wie Kleiner schreibt: "Standards of rigor have changed in mathematics, and not always from less rigor to more. The notion of proof is not absolute. Mathematicians' views of what constitutes an acceptable proof have evolved."[62] So galt während Jahrhunderten (im Zuge der Mathematik bei den Antiken Griechen, und insbesondere Euklids „Elemente") Geometrie als Inbegriff von Rigorosität, während sie im 19. Jahrhundert von Analysis und Arithmetik darin abgelöst wurde.[63] Und in jenen

[60] Vgl. Floyd (2001, S. 287)
[61] MacKenzie (2001, S. 317) zitiert aus einem Interview mit einem Mathematiker.
[62] Kleiner (1991, S. 314)
[63] Vgl. Kline (1972, z. B. S. 72, 176, 318, 391, 952, 972, 1025)

Phasen, in denen die Mathematik älterer Generationen explizit auf Grund fehlender Strenge verworfen und neu geschrieben wurde, haben nach Ansicht gewisser Historiker und Historikerinnen nicht nur epistemische Ideale eine Rolle gespielt. In ihrem Artikel „Is Mathematical Truth Time-Dependent?“ hat Judith Grabiner zum Beispiel gezeigt, dass die Veränderung der Haltung bezüglich den Grundlagen des Differenzialkalküls zwischen dem 18. und 19. Jahrhundert (deren Resultat üblicherweise als eine grössere Strenge in der Analysis beschrieben wird) sich nicht (alleine) auf die Absicht zurückführen lässt, damit Fehler in Zukunft zu vermeiden – schon deshalb nicht, weil zuvor kaum Fehler gemacht wurden. Einer der Gründe liegt ihres Erachtens eher darin, dass die Mathematiker zur damaligen Zeit damit begannen, ihr Geld mit der Lehre zu verdienen und sich dadurch „gezwungen“ sahen, ihre Methoden und Konzepte zu überdenken.[64]

Der Mathematik wurde stets eine epistemische Sonderrolle attestiert;[65] man hielt mathematisches Wissen für sicher, weil von der „Erfahrung“ unabhängig, auf blossem Denken beruhend. Die Grundlage für diese Position bilden einerseits die spezielle Rechtfertigungs- oder Validierungsmethode Beweis (im Gegensatz etwa zu einem Experiment oder anderen Argumenten) und andererseits die speziellen Entitäten, mit denen es die Mathematik zu tun hat (sie sind „abstrakt“, nicht direkt aus der „Erfahrung“ gewonnen). Dass „äussere“ Faktoren unser mathematisches Wissensgebäude beeinflussen, hielt man für eine abwegige Vorstellung (zumindest gilt dies für die grosse Mehrheit). Doch ich glaube, die letzten beiden Absätze wie auch schon die Abschnitte davor haben gezeigt, dass diese Vorstellung so abwegig nicht ist. Wie unabhängig kann dieses Wissen denn sein, wenn ihre Validierungsmethode sich auf Grund sozialer Prozesse verändert? Und wie sollte diese Unabhängigkeit einem Aussenstehenden plausibel gemacht werden, wenn die Validierungsmethode demselben nur nach jahrelangem „Training“ zugänglich ist?

“Perhaps mathematical truth is eternal, but our knowledge of it is not.”[66] So lautete Grabiners Antwort auf die Frage im Titel ihrer oben zitierten Arbeit. Wenn unser mathematisches Wissen sich auf Grund sozialer Prozesse ändert, dann dürfte eine Soziologie der Mathematik wichtige Erkenntnisse liefern. MacKenzie vermutet, “that there is no abstract, context-free way of demarcating what constitutes a proof; that there is no higher criterion than the judgement of the adequacy of a putative proof by the members of the relevant specialist mathematical community”[67], und sieht entsprechend darin die Grundlage einer „Soziologie des mathematischen Beweises“. Eine solche hätte unter anderem genau die Frage zu beantworten, welcher wir hier nachgehen; nach MacKenzie wäre ihre Aufgabe „to provide clear insight into the processes

[64] Grabiner (1974)
[65] Vgl. Heintz (2000, S. 17f. und Kapitel 2)
[66] Grabiner (1974, S. 364)
[67] MacKenzie (2001, S. 319)

by which, in the absence of any definitive abstract criterion, some arguments and not others achieve the status of 'proof'."[68] Wie MacKenzie und Bettina Heintz, auch sie eine Soziologin, feststellen, wurde ein Werk, das diesem Anspruch genügt, leider noch nicht geschrieben;[69] man darf auf jeden Fall gespannt sein, welche Antworten auf Fragen wie (I1) und (I2) aus soziologischer Perspektive in Zukunft gefunden werden.

[68] MacKenzie (2001, S. 320)

[69] MacKenzie (2001, S. 319f.) bzw. Heintz (2000, S. 23ff.). Als die bedeutendsten Versuche in diese Richtung gelten Eric Livingstons ethnomethodologischer und David Bloors wissenssoziologischer Ansatz. Für eine Kritik dieser beiden Ansätze siehe Heintz (2000, S. 23ff.).

Kapitel 2

Implizites Wissen

Wir haben im ersten Kapitel die Rolle von Beweisen im Prozess des Akzeptierens neuer mathematischer Resultate durch die mathematische Gemeinschaft untersucht, und es kann kein Zweifel darüber bestehen, dass diese Rolle stets im Zentrum des Interesses an Beweisen von Seiten der Philosophie stand. Doch dass Beweise in der mathematischen Praxis nicht alleine zur Validierung oder Rechtfertigung mathematischer Aussagen dienen, lässt sich bereits daran ablesen, wie Mathematiker und Mathematikerinnen über Beweise sprechen: Beweise können „erhellend", „originell", „elegant", „abstrakt", „schwierig", „schön", „anschaulich" oder „trivial" sein; sie können „Methoden aufzeigen" und „Verbindungen zwischen verschiedenen Theorien herstellen"; zuweilen lassen sie sich „verallgemeinern", in anderen Fällen basieren sie auf einem „Trick", der nur in der einen Situation anwendbar zu sein scheint. Wie bereits in der Einleitung kurz erwähnt, wäre es kaum zu erklären, weshalb Sätze wieder und wieder bewiesen werden, wenn der einzige Grund für einen Beweis in der Rechtfertigung oder Validierung des Bewiesenen bestünde. Ich will mich im Folgenden also mit einer weiteren Funktion des Beweises in der mathematischen Praxis beschäftigen.

In der Kritik an der formalistischen Auffassung von Beweisen in 1.B.2 wurde offenbar, dass nicht nur die Entdeckung, sondern auch die Prüfung von Beweisen ein spezifisches mathematisches Wissen erfordert, ein „Verständnis" der betreffenden Theorie. Darüber hinaus *erfordert* ein Beweis von der Leserin nicht nur Wissen oder Verständnis, er kann ihr solches auch *vermitteln* – dies zumindest ist meine These. Aus philosophischer Sicht interessant in diesem Zusammenhang dürften dann etwa folgende Fragen sein: Worin besteht dieses Wissen, das in einem Beweis vermittelt wird? *Wie* wird es vermittelt? Und wie verhält es sich zum Wissen, welches zur Entdeckung von Beweisen erforderlich ist? Ich möchte diese und ähnliche Fragen in diesem Kapitel diskutieren. Und ich schlage vor, die Diskussion auf dem Konzept impliziten Wissens zu basieren. Weil dieses Konzept (vor allem in der Philosophie der Mathematik) eher unbekannt zu sein scheint, sind hier einige Vorbemerkungen dazu angebracht, bevor in Abschnitt A dann eine ausführlichere Erörterung folgt.

Wissen, so die jahrtausendalte Annahme in der Erkenntnistheorie, ist Wissen von etwas, das einen Wahrheitswert besitzt, und das geglaubt und gerechtfertigt werden kann. In diesem Sinne ist implizites Wissen kein Wissen. Was implizites Wissen von diesem – zur Abgrenzung hier und bereits im ersten Kapitel „explizit" genannten – Wissen unterscheidet, ist unsere Unfähigkeit zu formulieren oder explizit zu machen, was wir wissen, und folglich auch unsere Unfähigkeit, dem Gewussten einen Wahrheitswert zuzuordnen. „Wir wissen mehr, als wir zu sagen wissen."[1] Mit dieser Devise wird die Existenz impliziten Wissens festgestellt.

Ein Beispiel impliziten Wissens ist die Fähigkeit, dieses oder jenes zu „tun", etwa Rad zu fahren oder eine Sprache zu sprechen. So sind wir in der Lage, mit anderen Personen in unserer Muttersprache zu kommunizieren, doch die solche Kommunikationshandlungen bestimmenden Regeln können wir nicht formulieren. Analog erlernen wir das Radfahren, ohne die physikalischen Gesetze zu kennen, welche die Gleichgewichtsbedingungen auf dem Fahrrad bestimmen. Unsere Unfähigkeit zu sagen, *was* wir in einem solchen Fall wissen, wird offensichtlich, wenn wir die Art und Weise betrachten, in der implizites Wissen erlernt wird. Wir lernen eine Sprache oder das Radfahren nicht (alleine) durch die Lektüre eines Lehrbuches; wesentlicher Bestandteil im Lernprozess sind die *Versuche*, zu sprechen oder Rad zu fahren, sowie die anschliessenden Rückmeldungen auf unsere Versuche (z. B. durch den „Lehrer").

Weshalb lässt man nun „Wissen" nicht „explizites Wissen" sein, und spricht statt von „implizitem Wissen" einfach von einer „Fähigkeit"? Vielleicht sollte dieser terminologischen Entscheidung nicht allzu viel Gewicht beigemessen werden, doch ich glaube, es lassen sich mindestens zwei Gründe anführen. Erstens passt das Wort „Fähigkeit" nicht zu allen Formen impliziten Wissens, die in der Folge diskutiert werden sollen. Ich werde versuchen zu zeigen, dass man das oben angesprochene Verständnis einer mathematischen Theorie als implizites Wissen beschreiben kann. Hier würden wir wohl kaum von einer Fähigkeit sprechen wollen. Zweitens und viel wichtiger ist mir aber, auf eine Gemeinsamkeit von implizitem und explizitem Wissen aufmerksam zu machen, nämlich auf die Tatsache, dass auch implizites Wissen eine Form von Rechtfertigung zulässt. Damit ist gemeint, dass die Aussage „X besitzt implizites Wissen y." ebenso wie „X weiss, dass y." gerechtfertigt sein kann oder nicht. Es stehen uns unzählige Möglichkeiten zur Verfügung in Erfahrung zu bringen, ob jemand Rad fahren kann oder eine bestimmte Sprache spricht. Natürlich ist es nicht klar, ob wir einer Person genau dann ein implizites Wissen zuschreiben, wenn sie „in der Lage ist", eine Rechtfertigung dafür zu produzieren. Eine erfahrene Radfahrerin kann einen Fehler machen, und eine deutschsprachige Person mag im Moment ein geläufiges deutsches Wort vergessen haben; aber genauso weiss jemand *eigentlich*, dass y, kann im Moment jedoch keine Rechtfertigung für y angeben.[2]

[1] Vgl. (Polanyi, 1985, S. 14) und unten, Abschnitt A

[2] Siehe dazu auch Ernest (1998, S. 138)

Es muss betont werden, dass die Unterscheidung zwischen explizitem und implizitem Wissen *nicht* mit einer Unterteilung der „Dinge“ in „explizierbare“ und „absolut nicht explizierbare“ einhergeht. Und zwar deshalb nicht, weil die Unterscheidung zwischen explizitem und implizitem Wissen selbst nicht „absolut“ ist; m. a. W. sie ist kontextabhängig. Was für mich implizit bleibt, mag für jemand anders oder zu einem späteren Zeitpunkt explizierbar sein. Es ist schwierig, ohne eine eingehendere Diskussion impliziten Wissens (wie sie in Abschnitt A geführt werden soll) genau zu sagen, was geschieht, wenn ein zuvor implizites Wissen „expliziert“ wird (dies ist der Gegenstand der Abschnitte B und C); doch ein Beispiel möge es andeuten. Auf die obige Behauptung, wir seien in der Lage zu kommunizieren, ohne die Sprachregeln zu kennen, liesse sich einwenden, dass die (z. B. deutsche) Sprachwissenschaft diese Regeln liefere. Dies ist zwar etwas übertrieben (die Sprachwissenschaftlerin würde sich heute vermutlich bescheidener ausdrücken), doch in der Tat kann man die Bemühungen um eine Syntax, Semantik und Pragmatik des Deutschen als Versuch sehen, die den Sprecherinnen und Sprechern dieser Sprache innewohnende Fähigkeit explizit zu machen. Unabhängig davon, wie erfolgreich der Versuch bis jetzt gewesen ist oder in Zukunft sein wird, zeigt er bereits, dass Sprache nicht von einem „absolut“ impliziten Charakter ist. Wie sich im Laufe dieses Kapitels zeigen wird, ist die Explizierung von zuvor implizit vorhandenem Wissen in der Mathematik allgegenwärtig.

Jemand, der sich mit implizitem Wissen in der Mathematik beschäftigt hat, ist der Philosoph Herbert Breger. In Breger (1992) macht er fünf nicht strikt voneinander zu trennende Formen davon aus:

- Vertrautheit mit oder Verständnis einer Theorie
- Know-How für Axiomatisierung
- Know-How für Problemlösung
- Know-How für die richtige Definition, Konstruktion oder Generalisierung
- Know-How für das Triviale

Dieses Wissen ist nicht Teil der mathematischen Theorien, sondern ein Wissen *über* die Theorien, und daher nach Breger auf einer Metaebene anzusiedeln. Seine interessante These lautet, dass dieses implizite Wissen auf der Metaebene einen wesentlichen Einfluss auf die Entwicklung der mathematischen Theorien (also auf die Objektebene) ausübt insofern, als es in vielen Fällen in einem Prozess der „Formalisierung“ in die mathematische Theorie „integriert“ wird. Dieser Übergang von der Metaebene zur Objektebene resultiert nach Breger oft in mathematischem Fortschritt und muss daher in der Philosophie der Mathematik untersucht werden:

> In the very beginning, the mathematician does not yet know what properties his objects have, so he just starts trying to work with them, and there is a certain

> element of chance in his first endeavors. [...] Gradually, the mathematician gets familiar with his objects; he acquires some know-how about them, but he does not know exactly what he knows nor is his knowledge clear, let alone formalizable. In the course of time this know-how increases; the expert mathematician acquires a certain feeling for how things work. [...] A growing familiarity with his objects allows the expert mathematician to develop one or several methods (note that a method is something on the meta-level). Perhaps he already knows that his method works for a particular class of cases, but he cannot yet specify a necessary and sufficient condition for the cases in which his method works. Finally he can specify such a solution, and this may well be the beginning of a new theory on a higher level of abstraction, with a new notation and newly-created objects. [...] I would like to argue that the neglect of knowledge gradually gained on the meta-level prevents an understanding of important aspects of mathematical progress. (Breger, 2000, S. 221–2)

Ein grosser Teil des zweiten Kapitels kann als Versuch angesehen werden, Bregers These und die eben zitierte Beschreibung auszuführen, zu präzisieren und Beispiele für den Prozess, in dem implizites Wissen auf diese Weise mathematische Theorien verändert, in der mathematischen Praxis zu präsentieren. Dabei halte ich es für unerlässlich, den Begriff des impliziten Wissens genauer zu studieren. Der Chemiker und spätere Wissenschaftsphilosoph Michael Polanyi hat sich in seinem Werk um die Mitte des letzten Jahrhunderts eingehend mit der „impliziten Komponente" des persönlichen Wissens eines Individuums sowie deren Rolle in der Wissenschaft beschäftigt, und in Abschnitt A soll ein Einblick in seine dabei gewonnenen Erkenntnisse gegeben werden. Dies erlaubt es, in den Abschnitten A und B der Behauptung Bregers, implizites Wissen lasse sich in der mathematischen Praxis ausmachen, Substanz zu verleihen und zu belegen; dabei wird ein besonderes Augenmerk auf implizites Wissen in Beweisen gelegt. Ich hoffe, bis zu dieser Stelle bereits Antworten auf die oben (Seite 31) formulierten Fragen bezüglich des in Beweisen vermittelten Wissen geliefert zu haben. In den Abschnitten B und C schliesslich soll der Prozess untersucht werden, in dem implizites Wissen in die mathematischen Theorien „integriert" wird; ich möchte diesen Prozess als Explizierung impliziten Wissens beschreiben und vor allem der Frage nachgehen, welche Konsequenzen eine solche Explizierung für den Fortgang der Mathematik im betreffenden Gebiet hat. Ich werde zu zeigen versuchen, dass – im Einklang mit Bregers These – in vielen Fällen ein klarer mathematischer Fortschritt zu diesen Konsequenzen gehört.

Zwei terminologische Bemerkungen noch: Erstens bin ich etwas unglücklich mit Bregers Rede davon, dass das implizite Wissen auf einer Metaebene anzusiedeln sei. Die Unterscheidung zwischen Meta- und Objektebene betrifft normalerweise sprachliche Phänomene, implizites Wissen ist jedoch genau dadurch charakterisiert, dass es nicht in sprachlicher Form vorliegt. Daher werde ich nicht von Meta- und Objektebene sprechen. Zweitens beschreibt Breger den Prozess der Integration impliziten Wissens in mathematische Theorien als „Formalisierung“, doch um jegliche Nähe zur formalistischen Position aus dem ersten Kapitel zu vermeiden, werde ich diesen Term hier nicht übernehmen.

A Polanyis „The Tacit Dimension“

Für Michael Polanyi spielte das Konzept impliziten Wissens stets eine zentrale Rolle; in seinem Hauptwerk „Personal Knowledge“ eingeführt, hat er ihm zahlreiche Artikel und mit „The Tacit Dimension“ ein eigenes Buch gewidmet. Die folgenden Ausführungen mit dem Zweck, dieses Konzept für die Diskussion im Rest des Kapitels bereitzustellen, stützen sich auf die deutsche Übersetzung dieses Buches (Polanyi, 1985).

Zum Ausgangspunkt seiner Überlegungen macht Polanyi (1985) die Feststellung, „daß wir mehr wissen, als wir zu sagen wissen.“[3] Damit ist gemeint, dass jeder von uns Dinge weiss, welche er nicht explizit zu formulieren weiss. Polanyi war nicht der erste, der diese Feststellung traf; Gilbert Ryle hat bekanntlich zwei Formen des Wissens, „knowing how“ und „knowing that“, identifiziert, und dafür argumentiert, dass sich die erste nicht auf die zweite reduzieren lässt.[4] Als Beispiel von „knowing how“ erwähnt er Humor:

> The wit, when challenged to cite the maxims, or canons by which he constructs and appreciates jokes, is unable to answer. He knows how to make good jokes and how to detect bad ones, but he cannot tell us or himself any recipes for them. (Ryle, 1949, S. 30)

Und auch in denjenigen Fällen, in welchen die jeweilige Praxis betreffende Regeln verfügbar sind, ist das Wissen dieser Regeln keineswegs mit der Fähigkeit gleichzusetzen, an der Praxis teilzunehmen. Man muss die Regeln auch „anwenden“ können.[5]

Polanyis Konzept des impliziten Wissens hat einiges mit Ryles „knowing how“ zu tun, und ich bin davon überzeugt, dass in jeder Form von „knowing how“ implizites Wissen beteiligt ist. Ich werde nicht mehr direkt auf diesen Punkt zurückkommen, doch ich glaube, einige Beispiele unten zeigen, dass die Umkehrung hiervon nicht gilt. Vor allem aber geht Polanyi insofern über die Ausführungen Ryles hinaus, als er den Akt impliziten Wissens analysiert und dabei eine Struktur zu Tage fördert. Dieser wollen wir uns nun an Hand seiner eigenen Beispiele impliziten Wissens zuwenden.

[3] Polanyi (1985, S. 14, Hervorhebung entfernt)
[4] Ryle (1949, Kap. 1)
[5] Ryle (1949, S. 41)

PROXIMALES UND DISTALES GLIED

Wir sind uns so gewohnt, das Gesicht einer uns bekannten Person auch unter vielen anderen zu erkennen, dass uns diese Fähigkeit kaum in Staunen zu versetzen mag. Doch es ist schwierig zu sagen, wie diese äusserst zuverlässige Erkenntnisleistung funktioniert. Sie ist umso erstaunlicher, weil wir im Allgemeinen nicht einmal in der Lage sind, die *einzelnen Bestandteile* des Gesichts *alleine* von denjenigen anderer Personen zu unterscheiden. Ganz ähnlich vollführen wir regelmässig komplexe motorische Handlungen, ohne die einzelnen dafür erforderlichen Bewegungen und deren Ablauf angeben zu können. Unsere Unfähigkeit in dieser Beziehung hat zum Beispiel Auswirkungen auf die Robotik, wo gerade die sensomotorische Koordination bei Robotern ausserordentliche Herausforderungen an die Entwickler stellt.[6]

In diesen Beispielen lassen sich nach Polanyi jeweils die beiden Glieder impliziten Wissens ausmachen: auf der einen Seite die einzelnen Merkmale des Gesichts und die einzelnen Bewegungen der motorischen Handlung, auf der anderen Seite das Gesicht und die Handlung selbst. Aus weiter unten noch zu erläuternden Gründen nennt Polanyi das erste Glied das „proximale“, das zweite das „distale“.[7] Offenbar spielen die beiden Glieder nicht dieselbe Rolle: „Wir kennen den ersten Term nur, insofern wir uns auf unser Gewahrwerden dieses ersten Terms verlassen, um den zweiten zu erwarten.“[8] Anders ausgedrückt richten wir unsere Aufmerksamkeit *vom* proximalen *auf* das distale Glied:

> Was den Fall der menschlichen Gesichtszüge angeht, würde ich nun sagen, daß wir uns auf unser Gewahrwerden ihrer Merkmale verlassen, um auf die charakteristische Erscheinung eines Gesichts zu achten. Wir richten unsere Aufmerksamkeit *von* den einzelnen Merkmalen *auf* das Gesicht und sind darum außerstande, diese Merkmale im einzelnen anzugeben. Und ebenso würde ich sagen, daß wir uns auf unser Gewahrwerden kombinierter Muskelleistungen verlassen, wenn wir uns der Ausführung einer Kunstfertigkeit zuwenden. Wir richten unsere Aufmerksamkeit *von* diesen elementaren Bewegungen *auf* die Durchführung ihres vereinten Zwecks und sind daher gewöhnlich unfähig, diese elementaren Akte im einzelnen anzugeben. (Polanyi, 1985, S. 19)

An anderer Stelle spricht er von „subsidiary awareness“ und „focal awareness“, um die unterschiedlichen Weisen zu bezeichnen, in denen wir die beiden Glieder wahrnehmen.[9] Wir können dann sagen, dass die bloss „unterstützende“ Aufmerksamkeit,

[6] So lautet ein berühmtes Zitat des Evolutionspsychologen Steven Pinker: “The main lesson of thirty-five years of AI research is that the hard problems are easy and the easy problems are hard. The mental abilities of a four-year-old that we take for granted – recognizing a face, lifting a pencil, walking across a room, answering a question – in fact solve some of the hardest engineering problems ever conceived.” (Pinker, 1994, S. 192–3) Siehe auch Moravec (1988, S. 9, 15f.).

[7] Polanyi (1985, S. 19)

[8] Polanyi (1985, S. 18, Hervorhebung entfernt)

[9] Polanyi (1966)

die wir dem proximalen Glied zukommen lassen, dafür verantwortlich ist, dass wir von diesem kein explizites Wissen besitzen.

Es gilt zu beachten, dass die Rede von proximalem und distalem Glied nur *innerhalb* eines Aktes impliziten Wissens Sinn macht; ein Objekt kann ohne weiteres in einem Akt distales und in einem anderen proximales Glied sein.[10] Polanyi betont jedoch, dass die Wahrnehmung dieses Objekts in den beiden Akten *nie* dieselbe ist.[11] Man vergleiche beispielsweise die Situation, in der eine Person mit geschlossenen Augen einen Stoss gegen die Hand erhält und das Material des Gegenstandes erraten soll, mit dem sie gestossen wurde, mit derjenigen, in welcher sie mit einem Stock ihren Weg abtastet. In der ersten Situation dürfte sie sich Details wie Temperatur und Härte des Gegenstandes bewusst werden, während in der zweiten Situation ein Stoss gegen ihre Hand als Widerstand in einem gewissen Abstand von ihr interpretiert wird, und Empfindungen an der Hand selbst untergeordnete Bedeutung besitzen.

Verinnerlichung

An dieser Stelle ist es von Vorteil, ein weiteres Polanyi'sches Paradigma impliziten Wissens einzuführen.[12] In der zweiten eben geschilderten Situation gilt die Aufmerksamkeit der Spitze des Stockes, was dazu führt, dass die Person ein „Gefühl" für die Spitze entwickelt (wie wir ein Gefühl für die Grenzen eines Fahrzeuges entwickeln, das wir lenken). Die *Bedeutung* der Empfindungen an der Hand wird an entfernter Stelle lokalisiert.[13] Dies ist nach Polanyi jedoch nur ein Spezialfall *aller* Wahrnehmung äusserer Gegenstände; wir sind uns unseres Körpers gewöhnlicherweise (d. h. wenn wir nicht etwa gerade Schmerzen an einem Körperteil verspüren) nur insofern bewusst, als wir damit in Kontakt mit der Welt um uns treten: „Wir werden der Dinge, die da in unserem Körper vorgehen, in Gestalt der Lage, Größe, Form und Bewegung eines Objekts gewahr, auf das wir unsere Aufmerksamkeit richten."[14] Und umgekehrt ist unser Körper das

> grundlegende Instrument, über das wir sämtliche intellektuellen oder praktischen Kenntnisse von der äußeren Welt gewinnen. In allen Momenten unseres Wachlebens sind uns die Dinge der äußeren Welt *dadurch gegenwärtig*, daß wir uns auf unser Gewahrwerden der Kontakte unseres Körpers mit ihnen *verlassen*. (Polanyi, 1985, S. 23)

Wir finden hier wiederum die beiden Glieder impliziten Wissens vor: der Körper (das proximale Glied), *von* dem aus wir unsere Aufmerksamkeit *auf* die äusseren Gegen-

[10] Vgl. auch den Beginn dieses Kapitels.

[11] Polanyi (1985, S. 23f.)

[12] Vgl. auch Polanyi (1967, S. 303ff.)

[13] Nach Polanyi tendiert jede Bedeutung dazu, sich in diesem Sinne von uns zu entfernen, und genau daher spricht er von *proximalem* und *distalem* Glied impliziten Wissens (Polanyi, 1985, S. 21).

[14] Polanyi (1985, S. 21f.)

stände (das distale Glied) richten. Gleichzeitig gewinnt unser Körper seine Bedeutung als unseren Körper (im Gegensatz zu einem äusseren Gegenstand) erst dadurch, dass er als proximales Glied in unserer Wahrnehmung der Welt um uns fungiert.

Der bloss negativen Charakterisierung von implizitem Wissen als nicht explizierbares Wissen tritt nun also eine zweite, „positive" gegenüber, die dem proximalen Glied *durch* seine Funktion als proximales Glied eine neue Bedeutung zuschreibt.[15] Der Stock gewinnt genau dadurch für uns eine neue Bedeutung, dass wir ihn zum Abtasten des Weges benutzen. Wir können sagen, dass wir ihn uns „einverleiben", um von ihm aus die Gegenstände vor uns zu erkennen:

> Wann immer wir bestimmte Dinge gebrauchen, um von ihnen aus auf andere Dinge zu achten – also so, wie wir unseren Körper stets gebrauchen –, verändern diese Dinge ihr Aussehen. Sie erscheinen uns *als* diejenigen Entitäten, auf die wir von jenen aus unsere Aufmerksamkeit richten, gerade so, wie wir unseren Körper *als* die äußeren Dinge empfinden, denen wir uns von ihm aus zuwenden. In diesem Sinne könnten wir sagen, daß wir uns die Dinge einverleiben, wenn wir sie als proximale Terme eines impliziten Wissens fungieren lassen – oder umgekehrt, daß wir unseren Körper soweit ausdehnen, bis er sie einschließt und sie uns innewohnen. (Polanyi, 1985, S. 23f.)

Diese Integration oder Verinnerlichung des proximalen Gliedes als zweite Möglichkeit, implizites Wissen zu charakterisieren, ist für uns von besonderem Interesse, weil sie eine (Teil-)Antwort auf die zu Beginn des Kapitels formulierte Frage erlaubt, wie das Verständnis des in Beweisen Vermittelten – oder allgemeiner: mathematischer Theorien – genauer beschrieben werden kann. Hierbei ist bei einer „Theorie" nicht bloss an eine Menge von Sätzen zu denken, sondern an eine „Lehre" oder ein „Denkgebäude": alles, was in dieser Theorie bewanderte Mathematiker und Mathematikerinnen an Wissen dazu teilen. Dies umfasst natürlich mathematische Sätze, aber auch Methoden zur Entscheidung gewisser Fragen (z. B. „Sind die beiden Gruppen isomorph?"), zur Berechnung gewisser mathematischer Objekte (z. B. die Homologiegruppen eines topologischen Raumes), oder die Beziehung zwischen den Sätzen, wichtige Beweismethoden (siehe nächsten Unterabschnitt) und etwa auch wichtige offene Fragen.[16]

Die Antwort lautet, dass wir eine Theorie verstehen, wenn wir sie als proximales Glied in einem Akt impliziten Wissens fungieren lassen können, d. h. wenn wir sie *verinnerlichen* können. Dies bedeutet, sich innerhalb der Theorie zu „bewegen", in ihr zu „denken", und die betreffenden Objekte „im Lichte dieser Theorie" zu sehen. Die

---

[15] Polanyi (1985, S. 25)

[16] Dies ist keine vollständige Liste. Philip Kitchers Konzept einer „mathematischen Praxis" (in Anlehnung an Kuhns „Paradigma" (oder „disziplinäre Matrix")) umfasst weitere relevante Elemente, aber auch metamathematische Ansichten, die wir nicht dazu zu zählen brauchen. Vgl. Kitcher (1983, Kap. 7).

Antwort ist so allgemein gehalten, dass sie auch in Bezug auf andere als mathematische Theorien anwendbar bleibt, etwa auf naturwissenschaftliche:

> Sich auf eine Theorie stützen, um die Natur zu verstehen, heißt, sie verinnerlichen. Denn von der Theorie aus wenden wir uns den Dingen zu und sehen sie in ihrem Lichte; wenn wir mit ihr arbeiten, nehmen wir diese Theorie *als* das Schauspiel wahr, das sie uns erklären soll. (Polanyi, 1985, S. 25)

Im Falle der Mathematik kann es sich sowohl um mathematische als auch um nichtmathematische Objekte handeln – wir würden dann von innermathematischen bzw. praktischen Anwendungen der mathematischen Theorie sprechen.[17] Natürlich gibt es nicht nur die beiden Zustände des Verstehens und Nicht-Verstehens einer Theorie. Wie Kinder die komplexen motorischen Handlungen und die Erkennung von Gesichtern erst lernen müssen und dabei immer bessere und bessere Ergebnisse erzielen, reicht das Spektrum des Theorieverständnisses von oberflächlicher Vertrautheit bis zur perfekten Integration.

Ob dies eine gute Antwort auf die zu Beginn des Kapitels gestellte Frage darstellt in dem Sinne, dass sie Erkenntnisse über das „Verstehen“ eines Beweises und über den Zusammenhang zwischen Beweisen und mathematischem Wissen liefert, wird erst noch zu entscheiden sein. Ich hoffe, in den folgenden beiden Abschnitten einige Schritte in diese Richtung unternehmen zu können. Mit dem Ziel, die obige Antwort plausibel zu machen, soll an dieser Stelle jedoch auf einige Phänomene der mathematischen Praxis aufmerksam gemacht werden (manche sind bereits aus dem ersten Kapitel bekannt), die meines Erachtens in engem Bezug zur eben beschriebenen Verinnerlichung mathematischer Theorien stehen.

Die Antwort passt offenbar gut zur häufig in Vorworten zu Lehrbüchern geäusserten Ansicht, dass die Arbeit mit den Beispielen und Aufgaben „eine unabdingbare Voraussetzung für ein vertieftes Verständnis des Stoffes“[18] bildet, stellt doch diese Arbeit eine Möglichkeit dar, sich im Akt impliziten Wissens, der Verinnerlichung des Stoffes, zu üben. Dies ist ganz in Analogie zur Tatsache, dass das Erlernen einer Sprache oder des Radfahrens zu einem wichtigen Teil aus praktischen Versuchen des Sprechens bzw. Radfahrens besteht, also auch ein „learning by doing“ ist. Diesen „praktischen“ oder „Anwendungsaspekt“, vor allem bei Beweisen, will ich im nächsten Abschnitt eingehender diskutieren.

Ebenso erlaubt die Antwort eine Erklärung einiger Beobachtungen, die wir in B.2 des ersten Kapitels anstellten. Dort hatten wir etwa festgestellt, dass für das Verstehen

[17] Polanyi (1985, S. 25) schreibt: „Darum auch können mathematische Theorien nur durch praktische Anwendungen erlernt werden; man hat sie erst dann wirklich begriffen, wenn man sie anzuwenden versteht.“ Doch dies ist zu eng gefasst, wenn „praktisch“ hier die Bedeutung von „nichtmathematisch“ hat, schliesslich existieren für einige Theorien der reinen Mathematik überhaupt keine nicht-mathematischen Anwendungen, trotzdem werden sie „verstanden“.

[18] Dies ist aus dem Vorwort zu einem bekannten deutschsprachigen Lehrbuch der Analysis (Amann und Escher, 2006, S. vi).

von Beweisen eine „mentale Infrastruktur“ Voraussetzung ist, und dass verschiedene Weisen, die Ableitung zu betrachten, sich in gewissen Situationen als unterschiedlich geeignet erweisen. Hier liegt die Vermutung nahe, dass die Mathematikerin verschiedene Theorien der Ableitung besitzt, in deren Lichte sie vorliegende Probleme betrachten kann. In einer Situation, in der sie die Ableitung als Geschwindigkeit betrachtet, stehen ihr auch Konzepte wie die Zeit und Beschleunigung zur Verfügung, während sie in einer eher „geometrischen“ Situation die Ableitung als Tangente sieht und auf geometrische Figuren und Relationen zurückgreifen kann, usw. Ich möchte hier an die – bereits zitierten – Worte Thurstons erinnern, in denen er den Status der verschiedenen „Theorien“ der Ableitung beschreibt, weil sie meiner Einsicht nach die Nähe dieses Phänomens zur Verinnerlichung auf schöne Weise illustrieren:

> This is a list of different ways of *thinking about* or *conceiving of* the derivative, rather than a list of different *logical definitions*. [...] I can remember absorbing each of these concepts as something new and interesting, and spending a good deal of mental time and effort digesting and practicing with each, reconciling it with the others. (Thurston, 1994, S. 3)

Schliesslich könnte die Antwort auch einen ersten Schritt in Richtung einer Theorie mathematischer Intuition darstellen. Dieses Konzept wird von Mathematikphilosophen zumeist nicht gerne verwendet, und wenn sie es doch tun, so bewegen sie sich ihrer Meinung nach auf „very slippery ground“[19]. Doch zweifellos sehen Mathematikerinnen zuweilen Tatsachen über mathematische Objekte, ohne sie beweisen zu können. Und ich glaube, implizites Wissen könnte zur Präzisierung dieser Beobachtung beitragen. So ist bei Beschreibungen von Intuition durch Mathematiker selbst die Feststellung wiederkehrend, dass diese mit der „Vertrautheit“ der betreffenden mathematischen Objekte, Konzepte oder Theorien wächst.[20] Nicht nur dies scheint auf die Möglichkeit hinzuweisen, Intuition durch implizites Wissen (Verinnerlichung) präziser fassen zu können; zumindest bei einem Philosophen lesen sich die Ausführungen zu mathematischer Intuition wie eine Beschreibung impliziten Wissens:

> I think the mathematician's intuition is a special case of the general human ability to recognize patterns or, more specifically, to synthesize complex structures from scattered cues. Thus I think the mathematician's intuition about a particular structure is simply the result of long experience with that structure. It is not different in kind from a carpenter's “feel” for his wood. (Goodman, 1979, S. 547)

Natürlich wäre zur Eluzidation des Konzepts der mathematischen Intuition jedoch eine eingehendere Untersuchung notwendig.

[19] Tharp, zitiert in Steiner (1975, S. 131)
[20] z. B. Bourbaki (1950, S. 227); vgl. auch Steiner (1975, S. 137)

B Implizites Wissen in Beweisen

Nach dieser allgemeinen Erörterung impliziten Wissens bei Polanyi möchte ich nun auf die eingangs dieses Kapitels erwähnte These zurückkommen, dass Beweise implizites Wissen vermitteln. Die folgenden Ausführungen verstehe ich dabei lediglich als Ausgangspunkt einer Theorie impliziten Wissens in Beweisen. Ich hoffe, mit dem Bezug zur Erörterung im letzten Abschnitt einen Rahmen bereitzustellen, in dem die erwähnten Phänomene für philosophische Betrachtungen fruchtbar beschrieben werden können. Ich möchte hier zwei Formen diskutieren, in denen implizites Wissen und Beweise in der Mathematik miteinander in Beziehung treten. Zum einen bietet die Lektüre[21] von Beweisen wie jede Beschäftigung mit Mathematik die Möglichkeit zur „Anwendung“ mathematischer Theorien, zum anderen vermitteln Beweise Beweisideen, Berechnungs- und Konstruktionsmethoden und Ähnliches, was sich für den Produzenten und die Rezipientin des Beweises nicht immer explizieren lässt. Diese beiden Formen sind nicht immer klar zu trennen, wie zu sehen sein wird.

B.1 Anwendung mathematischer Theorien

Eine unserer Beobachtungen in 1.B betraf das zur Verifikation eines Beweises notwendige Vorwissen; in der einfachsten Form ist der Leser eines Beweises mit einer Aussage wie „M besitzt die Eigenschaft P“ konfrontiert und hat zu entscheiden, ob sie wahr oder falsch ist. Ohne eine umfassende Beschreibung dieses Vorgangs zu versuchen (dieser unterscheidet sich natürlich von Situation zu Situation beträchtlich), bemerken wir, dass die Eigenschaft P Teil einer oder mehrerer mathematischer Theorien[22] ist (sonst wäre sie sinnlos), und der Leser im Rahmen dieser Theorien (hoffentlich) Resultate und Methoden kennt, um zu entscheiden, ob M P besitzt oder nicht. Vielleicht muss er dafür feststellen, ob M die Eigenschaft P_1 besitzt (weil P_1 P impliziert), oder – sollte dies nicht festzustellen sein – ob M die Eigenschaften P_2 und P_3 besitzt usw.[23] Ich habe im ersten Kapitel betont, dass der Leser im Allgemeinen – anders als im Falle von Ableitungen – keine Liste etwa aller P_i besitzt, welche er zur Prüfung der Korrektheit von „M besitzt die Eigenschaft P“ durchzugehen hätte; stattdessen ist er dafür ganz auf sein Vorwissen der betreffenden mathematischen Theorien angewiesen. Umgekehrt ist es die Beschäftigung mit Mathematik und insbesondere mit Beweisen, durch welche man sich dieses benötigte Wissen erwirbt. Ich habe im letzten Abschnitt im Anschluss an Polanyi skizziert, wie diese beiden Aspekte miteinander in Einklang gebracht werden können: Die Lektüre eines Beweises bie-

[21] Hier und im Folgenden benutze ich den Term „Lektüre“ als allgemeine Bezeichnung für die Beschäftigung der Mathematikerin mit einem Beweis, sei es zur Verifizierung, sei es zum Auffinden der Beweisidee (siehe unten), sei es aus anderen Gründen.

[22] Es sei an die Vereinbarung betreffend dieses Terms auf Seite 38 erinnert.

[23] Dies wurde in 1.B.2 „Interpolation“ genannt.

tet die Möglichkeit zur Anwendung und damit Verinnerlichung der mathematischen Theorie. Wie bei anderen Formen (etwa Radfahren oder Sprachkompetenz) handelt es sich um ein „Training" des impliziten Wissens. Die dadurch erreichte Vertrautheit mit der mathematischen Theorie, die Fähigkeit, mathematische Objekte im Lichte dieser Theorie zu betrachten, erlaubt dann eine einfachere und schnellere Prüfung eines Beweises. Ich möchte nun an Beispielen illustrieren, dass der erwähnte Anwendungscharakter von Beweisen in diesen oft eine wichtige Rolle spielt. Dabei beginne ich mit einem einfachen Beispiel aus der Algebra.

Angenommen, es soll bewiesen werden, dass die den Körpern der reellen und komplexen Zahlen zugrunde liegenden abelschen Gruppen isomorph sind, in Symbolen $(\mathbb{R}, +, 0) \cong (\mathbb{C}, +, 0)$.[24] Die Suche nach einem konkreten Gruppenisomorphismus erscheint nicht allzu viel versprechend; stattdessen führt der folgende „Trick" zum Ziel: Wir betrachten $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ (für den Moment) weder als Körper noch als Gruppen, sondern *als Vektorräume* über $\mathbb{Q}$, den rationalen Zahlen. Aus der Theorie der Vektorräume ersieht man jedoch, dass die beiden Vektorräume isomorph sind, weil sie dieselbe Kardinalität besitzen. A fortiori sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ isomorph *als Gruppen*.

Was ist hier geschehen? Die zu beweisende Aussage verweist eigentlich nur auf die Theorie von Gruppen (weil es ein Gruppenisomorphismus sein soll) und vielleicht auf diejenige von Körpern (weil $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ beide Körper sind). Mit dem Trick werden diese beiden Verweise jedoch „ignoriert" und stattdessen eine „weiter entfernte" Theorie herangezogen. Die beiden Objekte werden als Vektorräume betrachtet, der Beweis wird damit zu einer Anwendung von Vektorraumtheorie. Was hier als „Trick" bezeichnet wird, ist natürlich die *Idee* des Beweises. Ich möchte betonen, dass die einzige Schwierigkeit in der Entdeckung dieses Beweises (wenn man denn bei einem solch einfachen Beispiel überhaupt von einer „Schwierigkeit" sprechen möchte) darin besteht, die richtige *Perspektive* einzunehmen, eben die Perspektive der Vektorraumtheorie. Es ist an dieser Stelle, dass die beiden in diesem Abschnitt besprochenen Verbindungen zwischen Beweisen und implizitem Wissen, dem Anwendungsaspekt einerseits und den im Anschluss zu diskutierenden Beweisideen andererseits, sich überschneiden.

Weiter reichende Beispiele solch „unerwarteter" Anwendungen einer mathematischen Theorie finden sich in der mathematischen Praxis in grosser Zahl. Die Philosophin Emily Grosholz hat sich in mehreren Artikeln mit diesem Phänomen beschäftigt, am Beispiel vor allem von Descartes' Anwendung von Algebra auf geometrische Probleme, und Leibniz' Erweiterung davon auf die Dynamik.[25] In Grosholz (1985) diskutiert sie einen besonders schönen Fall aus dem zwanzigsten Jahrhundert, den von Marshall Stone bewiesenen Darstellungssatz für Boolesche Algebren.[26] Als Stone sich

[24] Für die die mathematischen Details sei auf den Anhang verwiesen.

[25] Vgl. Grosholz (1980, 1984)

[26] Die mathematischen Details hierzu finden sich im Anhang.

in den Dreissigerjahren mit Booleschen Algebren beschäftigte, waren diese schon unter anderem in der Mengenlehre (Mengenalgebra), der Logik (Lindenbaum-Tarski-Algebra) und der Funktionalanalysis (Algebra von Projektionen) bekannt. Lindenbaum und Tarski hatten schon gezeigt, unter welchen Bedingungen eine Boolesche Algebra mit einer Mengenalgebra identifiziert werden kann, doch es war ihnen nicht gelungen, eine allgemeine Darstellungstheorie Boolescher Algebren zu entwickeln. Stone löste dieses Problem in zwei Artikeln auf eine originelle und für die betreffenden Mathematiker und Mathematikerinnen befriedigende Weise.[27] Dazu zeigte er in einem ersten Schritt, dass Boolesche Algebren mit speziellen Ringen identifiziert werden können, und wandte in der Folge allgemeine Ringtheorie auf diesen speziellen Fall an. Insbesondere untersuchte er Ideale in Booleschen Algebren und zeigte in einem zweiten Schritt, dass die Menge der Primideale mit einer interessanten Topologie versehen werden kann. Die offen-abgeschlossenen Teilmengen dieses Raumes definieren auf natürliche Weise eine Boolesche Algebra, die zur ursprünglichen isomorph ist. Dies ist die Stone'sche Darstellung.

Gleich zwei Mal tritt uns hier also ein Perspektivenwechsel entgegen; einmal werden Boolesche Algebren *als Ringe* betrachtet, und dann eine Menge von Idealen *als topologischer Raum*. Oder mit anderen, dem letzten Abschnitt näheren Worten: Die Ringtheorie bzw. die Topologie „dehnen sich aus", bis sie Boolesche Algebren bzw. diese Menge von Idealen „einschliessen", und erschliessen sich damit neue Anwendungsfelder. Wenn Polanyi Recht hat, dann sollte eine solche Ausdehnung der Theorie zu einer veränderten Sicht der Mathematikerinnen auf diese Theorie selbst führen (vgl. das Zitat auf S. 38). In der Tat stellt der Philosoph David Corfield etwa fest, dass die Rezeption dieses Beweises dazu beigetragen hat, die Topologie von ihrer Nähe zur Geometrie zu befreien: "The act of topologising such a seemingly non-spatial set helped to free applications of topology from their then close association with ordinary geometric spaces."[28] Heute interagiert die Topologie mit beinahe jedem grösseren mathematischen Gebiet.[29]

Das offensichtlichere Resultat der Anwendung einer Theorie auf scheinbar „weit entfernte" Objekte lässt sich jedoch als Entwicklung einer Analogie zwischen den beiden Bereichen beschreiben. Eine solche Analogie erlaubt es den Mathematikern, Resultate und Methoden aus einem der beiden Gebiete auf das andere zu übertragen, und führt damit zur Vervielfachung der Problemlösungsstrategien. Als Stone Boolesche Algebren mit Ringen identifiziert hatte, wurde er gewissermassen dazu *geführt*, Ideale in Booleschen Algebren zu untersuchen, was wiederum ein notwendiger

[27] Stone (1936, 1937)

[28] Corfield (2003, S. 89)

[29] Mir ist eine ähnliche Wirkung des Beweises im Falle der Ringtheorie nicht bekannt; dies liesse sich aber dadurch erklären, dass Boolesche Algebren und Ringe als algebraische Strukturen schon zuvor weniger weit voneinander entfernt waren.

Schritt zu seiner Lösung des Darstellungsproblems darstellte. Die Rolle von Analogien in der Mathematik kann kaum überschätzt werden; der Mathematiker Michael Atiyah sieht in Analogien sogar ein wesentliches Merkmal der mathematischen Methode. Zu den Verbindungen zwischen Zahlentheorie, Algebra, Geometrie, Topologie und Analysis, die er zuvor diskutiert hat, schreibt er:

> This interaction is, in my view, not simply an occasional interesting accident, but rather it is of the essence of mathematics. Finding analogies between different phenomena and developing techniques to exploit these analogies is the basic mathematical approach to the physical world. It is therefore hardly surprising that it should also figure prominently internally within mathematics itself. (Atiyah, 1978, S. 75–6)

Die zentrale Rolle von Analogien in der Mathematik ist in den letzten hundert Jahren besonders deutlich sichtbar, weil sich diese durch ein stetes Streben nach Verallgemeinerung und damit durch die Suche nach Gemeinsamem in Unterschiedlichem auszeichnen.[30] Darauf werden wir in Abschnitt C zurückkommen.

Dass zwei Gebiete durch eine Analogie miteinander verknüpft sind, bedeutet jedoch nicht, dass sie miteinander zu verschmelzen brauchen und zu einem Gebiet werden. Der Analogie sind vielmehr Grenzen gesetzt: "Structural analogies are interesting not only in their development, but also in their limitations. [...] both fields, in resisting each other, show their own characteristic and irreducible texture."[31] Wo diese Grenzen liegen, wie weit die Analogie getrieben werden kann, stellt sich natürlich erst nach zuweilen langer Beschäftigung mit den beiden Gebieten heraus. Überhaupt ist oft nicht klar, *worin* die Analogie genau besteht, wie der Mathematiker André Weil in einer berühmten Passage andeutete: « Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à l'autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables ; »[32] Das Ziel, die Analogie besser zu verstehen und in mathematisch präziser Weise zu fassen, kann die Forschung massgeblich beeinflussen.[33] Um das Beispiel von oben aufzugreifen: Stones Analogie zwischen Topologie und Boolescher Algebra erlaubte nicht nur eine Darstellung von Booleschen Algebren als topologische Räume; sie zeichnete gleichzeitig eine Klasse von Räumen aus (heute „Stone-Räume" genannt), welche als Darstellungen Boolescher Algebren auftreten. In der Folge hat die Analyse der Analogie zu Tage gefördert, inwiefern die beiden Objekte genau miteinander korrespondieren; man beschreibt dies heute als eine duale Äquivalenz zwischen der Kategorie der Booleschen Algebren und der Kategorie der Stone-Räume. Nicht nur hat man in der Zwischenzeit

[30] Jean Dieudonné, Mitglied der Bourbakis, welche dieses Streben personifizierten, beschreibt diese „recherche des structures communes cachés sous des apparences parfois très diverses" denn auch als „Leitmotiv" des 20. Jahrhunderts (Dieudonné, 1969, S. 375).

[31] Grosholz (1985, S. 151)

[32] Weil (1979, S. 408)

[33] Vgl. Corfield (2003, S. 97f.)

viele weitere „Stone-Dualitäten“ zwischen topologischen und ordnungsrelationalen Kategorien entdeckt, Stones Darstellungssatz wird auch als wichtiger Wegbereiter für die Einführung der Kategorientheorie überhaupt angesehen.[34]

Die Bestimmung der Analogie als eine kategorielle Dualität ist ein Beispiel dessen, was ich weiter unten als eine Explizierung impliziten Wissens beschreiben werde. Wir können also sagen, dass zumindest in diesem Fall das Streben nach einer Explizierung zahlreiche wichtige mathematische Entdeckungen zur Folge gehabt hat. In Abschnitt C werde ich noch mehr Material zusammentragen, um die hier implizite These zu verteidigen: dass das Streben nach Explizierung impliziten Wissens (oft) zu mathematischem Fortschritt führt.

B.2 Beweisideen

Im vorangehenden Unterabschnitt wurde die Anwendung mathematischer Theorien unter zwei Gesichtspunkten diskutiert: einerseits als Akt impliziten Wissens, einer Verinnerlichung der mathematischen Theorie, und andererseits als Ursprung partieller Analogien zwischen verschiedenen mathematischen Gebieten. Hier möchte ich diesen zweiten Gesichtspunkt zum allgemeineren Phänomen in Beziehung setzen, welches dafür verantwortlich ist, dass Mathematiker und Mathematikerinnen das Gefühl haben, bei der Lektüre von Beweisen „Neues zu lernen“. Mac Lane nannte dasjenige, was hier gelernt wird, generell „Ideen“:[35] neue Konzepte, Methoden zur Lösung mathematischer Probleme, Zusammenhänge zwischen verschiedenen Konzepten und Theorien u. ä.; alles Dinge, welche zwar in Beweisen enthalten sind, nicht jedoch durch die Rechtfertigungsfunktion derselben erfasst werden. Dies hat den Mathematiker Yehuda Rav dazu veranlasst, das mathematische Wissen nicht in den Sätzen zu lokalisieren, sondern in Beweisen:

> Theorems are in a sense just tags, labels for proofs, summaries of information, headlines of news, editorial devices. The whole arsenal of mathematical methodologies, concepts, strategies and techniques for solving problems, the establishment of interconnections between theories, the systematisation of results—the entire mathematical know-how is embedded in proofs. (Rav, 1999, S. 20, Fussnote entfernt)

Während ich mit der Richtung, in welche diese Bemerkungen gehen, vollkommen einverstanden bin, lautet meine etwas weniger radikale These, dass die Entstehung und Entwicklung mathematischer Theorien in vielen wichtigen Fällen auf solche in Beweisen vermittelte Ideen zurückzuführen ist. Diese These zu vertreten, bedeutet hier erstens, diesen Prozess von der Idee zur mathematischen Theorie zu beschreiben, und zweitens, einige instruktive Beispiele dafür in der Geschichte der Mathematik

[34] Vgl. Johnstone (1982, S. xvi)

[35] Mac Lane (1981, z. B. S. 378)

zu präsentieren. Im Rest dieses Abschnittes gehe ich auf den Beginn dieses Prozesses ein, auf die Situation also, in der eine Idee implizit in einem Beweis enthalten ist; im folgenden Abschnitt soll der Übergang zur expliziten Form und die Entwicklung einer mathematischen Theorie thematisiert werden.

Mathematiker und Mathematikerinnen sprechen regelmässig von „interessanten“ und „Routinebeweisen“, ebenso von „interessanten“ und „Routinebeweisschritten“; und sie tun dies in solcher Übereinstimmung, dass wir bei der Thematisierung derselben nicht dem Vorwurf der Subjektivität ausgesetzt sind. Auch haben sie die Fähigkeit, „gleiche“, „ähnliche“ oder „verschiedene“ Beweise auszumachen, vermutlich dann, wenn diese „derselben“, „ähnlichen“ oder „verschiedenen“ „Beweisideen“ oder „-gedanken“ folgen. Betrachten wir eine der ältesten überlieferten Beweisideen:

> **Satz (Euklid)** Es gibt unendlich viele Primzahlen.
>
> *Beweis* Angenommen nicht; es seien $p_1,\ldots,p_r$ alle Primzahlen. Betrachte $n_r := p_1 \cdots p_r + 1$. Sei p_{r+1} eine Primzahl mit $p_{r+1}|n_r$ (eine solche existiert, wie Euklid zuvor gezeigt hat). Wäre $p_{r+1} = p_i$ für ein $1 \leq i \leq r$, so $p_{r+1}|n_r$ und $p_{r+1}|n_r - 1$, also $p_{r+1}|1$. Ein Widerspruch.

Ich denke, kaum jemand würde der Behauptung widersprechen, die Einführung dieser bestimmten Zahl n_r bilde die Beweisidee des Beweises, während der Rest „Routine“ sei.[36] Rav beschreibt die Einführung der Zahl n_r als „a purely creative, topic-specific move“, und fährt fort: “[T]his move, simple as it is, constitutes a contribution to mathematical knowledge which goes beyond the statement of the proposition.”[37] Weshalb sollte man diese Idee zum mathematischen Wissen zählen? Sie mag vielleicht hübsch oder clever sein – aber ist es nicht damit getan, dass der obige Satz bewiesen wurde? Weshalb sollte sie uns und die mathematische Gemeinschaft weiter kümmern? Der Grund ist, dass solche Ideen oft ein „eigenes Leben“ entwickeln; sie werden von Mathematikern und Mathematikerinnen in einem Beweis entdeckt, in ihr individuelles Wissen integriert und später in anderen Kontexten wiederverwendet. Mit der Zeit können sie so den Status allgemeiner Bekanntheit (in den entsprechenden mathematischen Gebieten) erlangen. So schreibt der Mathematiker William Thurston von „techniques that are generally known and accepted“[38] und in einem Buch über Elliptische Kurven kann man lesen, dass der Autor zu Beginn etwas Algebraische Geometrie betreiben möchte, “providing enough proofs so that the reader can gain a flavor for some of the basic techniques used in algebraic geometry.”[39] Weiter unten werden wir Beispiele solcher allgemein bekannter Techniken und Beweisideen antreffen.

[36] Interessanterweise führt Euklid den Beweis nur für $r = 3$; offensichtlich ist er der Meinung, der Leser oder die Leserin sehe ohne Mühe, dass dieselbe Beweisidee für alle r zum Erfolg führt.

[37] Rav (1999, S. 21)

[38] Thurston (1994, S. 168)

[39] Silverman (1986, S. 3)

Auch die euklidsche Beweisidee hat in anderen Kontexten Anwendung gefunden; so steht in der Einführung in die Zahlentheorie von Peter Bundschuh innerhalb des Beweises der Aussage, wonach unendlich viele Primzahlen der Form $4n+3$ existieren: „[Hierfür] folgt man dem Euklidschen Beweisgedanken [...], indem man setzt $n_r := 4p_1 \cdots p_r - 1$."[40] Der Rest des Beweises verläuft dann dem obigen ganz analog. Es wird oft gesagt, jemand habe einen Beweis verstanden, wenn er oder sie ihn „wieder entdecken" (im Gegensatz zu „wiedergeben") könnte. Dies würde im vorliegenden Fall hauptsächlich bedeuten, die Zahl n_r „wieder zu finden" (im Gegensatz zu „aus dem Gedächtnis abzurufen") – nicht nur beim Satz Euklids, sondern auch beim Resultat Bundschuhs und bei weiteren Resultaten dieser Form, die „denselben" Beweis zulassen (etwa die analoge Aussage für Primzahlen der Form $6n+5$). Kurz: Man sollte die *Beweisidee* verstanden haben und bei Bedarf anwenden können.

Gibt es eine Regel, welche die Umstände, unter denen die Einführung der Zahl n_r zum „Erfolg" führt, sowie die den Umständen angepasste Definition von n_r festhält? Bundschuh schreibt zum Dirichletschen Satz (für alle k, l teilerfremd existieren unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv l \pmod{k}$):

> Zur Behandlung der [Fälle $k = 3, 4, 5, 6$] seien jeweils $p_1, \dots, p_r$ paarweise verschiedene Primzahlen $\equiv l \pmod{k}$; mit mehr oder weniger Geschick, je nach Unterfall, wird zu diesen eine ganze Zahl $n_r > l$ so konstruiert, daß man zeigen kann: n_r hat einen von $p_1, \dots, p_r$ verschiedenen Primfaktor $p_{r+1} \equiv l \pmod{k}$, womit man dann fertig ist. (Bundschuh, 2002, S. 139)

Erschöpft sich darin nun die Beweisidee? Ich denke nicht. Sicherlich sind andere Kontexte denkbar, in denen Euklids Idee zu einem Beweis herangezogen werden kann. Rav erwähnt zum Beispiel Gödels Verwendung dieser Idee zum Beweis der Primitiv-Rekursivität der Funktion, welche die Primzahlen der Grösse nach aufzählt.[41] Auch erfahren wir hier über die Zahl n_r nicht mehr, als aus dem Beweisziel in dieser Situation ohnehin ersichtlich ist. Der Beweis Euklids liefert jedoch darüber hinausgehende Informationen, nämlich über die Art und Weise, wie die Existenz der gesuchten Primzahl p_{r+1} aus der Definition von n_r hergeleitet werden kann, oder allgemeiner: über die Rolle des Beweisschrittes innerhalb des Beweises (wir ersehen daraus etwa, weshalb das Produkt der $p_1, \dots, p_r$ in die Definition von n_r einfliesst, und weshalb sich n_r von diesem Produkt um 1 unterscheidet).

Es ist nicht offensichtlich, wie eine solche Regel auszusehen hätte, und ich vermute daher, dass man durch das Verstehen dieses Beweises ein *implizites* Wissen erwirbt; die Beweisidee zu verstehen bedeutet, ihre *Rolle* innerhalb des Beweises verstehen. Mit Polanyi können wir sagen, dass bei der Lektüre eines Beweises die einzelnen Schritte *als Bestandteile* des Beweises wahrgenommen werden, oder dass die Auf-

[40] Bundschuh (2002, S. 139)

[41] Siehe Gödel (1931, S. 182)

merksamkeit *von* den Beweisschritten *auf* den Beweis gerichtet ist. Daher geschieht es oft, dass man nach der Lektüre von der Korrektheit des Beweises überzeugt ist, folglich den Beweis als Ganzes „wahrgenommen" hat, jedoch nicht in der Lage ist, die einzelnen Schritte anzugeben oder den Beweis „wieder zu entdecken". Umgekehrt führt die eingehende Beschäftigung mit einem einzelnen Beweisschritt dazu, dass man dessen Rolle im Beweis und damit den Beweis selbst „aus den Augen verliert". Polanyi macht darauf aufmerksam, dass sich eine solche eingehende Beschäftigung mit den Einzelheiten aber in der Folge positiv auf das Verständnis der komplexen Entität auswirken kann: „In diesen Fällen dient die ausführliche Versenkung ins Detail [...] als Orientierung für eine nachfolgende Reintegration und verleiht damit den Einzelheiten eine treffendere und präzisere Bedeutung."[42] Man liest etwa den Beweis ein zweites Mal durch, sieht sich die einzelnen Schritte genauer an, untersucht, wie sie eine „Beweissituation" in eine andere überführen, und die Gründe dafür, d. h. untersucht ihre Beziehungen zum Rest des Beweises. Am Ende sieht man den Beweis und die Bedeutung der einzelnen Schritte (hoffentlich) klarer und wäre in der Lage, den Beweis „wieder zu entdecken".

Nach Polanyi existiert neben dieser „impliziten" Reintegration der Einzelheiten jedoch eine weitere Möglichkeit, ihnen ihre Bedeutung zurückzugeben, nämlich indem die Beziehung zwischen diesen explizit festgestellt wird. Damit ist einfach gemeint, dass implizites Wissen zuweilen in eine explizite Form gebracht, *expliziert*, werden kann. In der Einleitung habe ich zum Beispiel erwähnt, dass sich die deutsche Sprachwissenschaft (oder zumindest ein Teil davon) als Versuch sehen lässt, die implizite Sprachkompetenz der Deutsch Sprechenden explizit zu machen. Und im vorangehenden Unterabschnitt wurde erläutert, wie die Analogie zwischen Booleschen Algebren und Stone-Räumen in einer dualen Äquivalenz zwischen zwei Kategorien expliziert werden konnte. Dabei wird vor allem am ersten Beispiel deutlich, dass die Explizierung impliziten Wissens auch unvollständig bleiben kann; ich habe eben versucht zu zeigen, dass im Falle des euklidschen Beweisgedanken eine explizite Form (eine „Regel") (noch) gänzlich fehlt.

Die Gründe dafür, dass ein implizites Wissen nicht in explizite Form gebracht wird, können ganz unterschiedlicher Natur sein. Im folgenden Abschnitt wird die Lösung einer Rechenaufgabe diskutiert, die wir heute ohne grosse Schwierigkeiten explizit angeben können; für die antiken Griechen jedoch, die sich mit derselben Aufgabe beschäftigten, waren die Hürden viel höher, weil ihnen Zeichen für verschiedene Unbekannte in einer Gleichung fehlten. Im Falle des euklidschen Beweisgedankens ist hingegen eher zu vermuten, dass fehlendes Interesse für die Nichtexplizierung verantwortlich ist; die mathematischen Erkenntnisse, die sich in Folge einer Explizierung erwarten liessen, dürften von zu geringer Bedeutung sein, um den Aufwand

[42] Polanyi (1985, S. 26)

einer Explizierung zu rechtfertigen. Und *dass* Explizierung stets mit Aufwand verbunden ist, scheint klar, denn sie erfordert eine grosse Vertrautheit mit der betreffenden mathematischen Theorie. Es dauerte zum Beispiel Jahrzehnte, bis der Status der Stone-Dualität geklärt war – natürlich auch deshalb, weil dafür erst die kategorientheoretischen Grundlagen entwickelt werden mussten. Wie im nächsten Abschnitt gleich mehrmals zu sehen sein wird, hat eine einmal erlangte Explizierung zudem nicht immer Bestand; sie läuft stets Gefahr, durch eine vollständigere, befriedigendere abgelöst zu werden.

Dies sind wohl nicht die einzigen möglichen Gründe dafür (auch in der Mathematik alleine nicht), dass eine explizite Form in Fällen impliziten Wissens (noch) nicht bekannt ist, doch die Frage nach weiteren wird hier offen gelassen. Stattdessen wenden wir uns der Frage zu, wie sich die beiden Formen der Integration, der impliziten und expliziten, zueinander verhalten. Polanyi bemerkt vor allem die folgenden zwei Punkte:

(i) Die explizite Integration geht (wenn sie durchführbar ist) „über die Möglichkeiten einer impliziten Integration hinaus."[43]

(ii) Sie kann diese im Allgemeinen jedoch nicht ersetzen.[44]

Er gibt keine Argumente für (i) an und er sagt auch nicht, auf welche „Möglichkeiten" er sich bezieht;[45] ich werde im nächsten Abschnitt versuchen, dies (in Bezug auf implizites Wissen in der Mathematik) nachzuholen. In 2.A, im Zusammenhang mit „knowing how" und „knowing that", wurde bereits erwähnt, dass die Kenntnis der Regeln einer Praxis nicht ausreicht, um die Praxis zu beherrschen; man muss auch in der Lage sein, die Regeln anzuwenden. Bekanntlich hat Ryle daraus geschlossen, dass explizites Wissen implizites nicht ersetzen kann. Ist dies die Bedeutung von (ii)? Auch hier ist Polanyi weniger deutlich, als man sich wünschen dürfte,[46] aber ich denke, die obige Interpretation geht in die richtige Richtung. Eine Explizierung impliziten Wissens in der Mathematik findet innerhalb einer mathematischen Theorie statt; um die Explizierung zu verstehen und anwenden zu können, ist folglich die Kenntnis der betreffenden Theorie erforderlich, und damit wiederum implizites Wissen (wenn auch

[43] Polanyi (1985, S. 26)

[44] Polanyi (1985, S. 27)

[45] Er illustriert jedoch den Unterschied zwischen expliziter und impliziter Integration an mehreren Beispielen. Wir haben etwa eine Kenntnis unseres Körpers, doch die Kenntnisse des Physiologen „reichen viel weiter." (S. 27) Ebenso können wir mit einer Maschine umzugehen lernen, doch der Ingenieur besitzt ein „viel tiefer reichendes Verständnis ihrer Konstruktion und Wirkungsweise." (S. 27)

[46] Die Absätze 3 und 4 der Seite 27 legen die erwähnte Interpretation nahe; doch in Absatz 2, wo Polanyi (ii) formuliert, spricht er auch einfach davon, dass unsere Kenntnis unseres Körpers sich von derjenigen des Physiologen „beträchtlich unterscheide", oder dass die Geschicklichkeit eines Fahrers nicht durch eine Schulung in der Theorie der Kraftfahrzeuge erworben werden könne. Dies legt eher eine Interpretation nahe, welcher zufolge die implizite Integration in anderer Hinsicht „über die Möglichkeiten einer expliziten Integration hinausgeht".

anderes). In diesem Sinne ist implizites Wissen nicht vollständig aus der Mathematik eliminierbar. Auch dies soll im folgenden Abschnitt ausführlicher behandelt werden.

C Explizierung

Diophantos von Alexandrien befasste sich um den Beginn unserer Zeitrechnung mit der Lösung algebraischer Gleichungen in einer und mehreren Unbekannten. Eine der in seinem überlieferten Werk „Arithmetica" behandelten Aufgaben ist die folgende:[47] Für gegebene drei Quadratzahlen soll man drei rationale Zahlen finden, sodass das Produkt je zweier davon stets eine der Quadratzahlen ergibt. Nun besitzt Diophantos zwar ein Symbol für *eine* Unbekannte, nicht jedoch für die zweite und dritte und ebenso wenig für beliebige Konstanten. Stattdessen löst er die Aufgabe für ein konkretes Tripel von Quadratzahlen (4, 9, 16) und macht danach darauf aufmerksam, wie diese in das Resultat *einfliessen*. Als z. B. $\frac{6}{4}$ resultiert, weist er darauf hin, dass die 6 als Wurzel des Produkts von 4 und 9 berechnet wurde, und die 4 als Wurzel von 16. Obwohl er also die Lösung nur für ein konkretes Tripel formulieren kann, gelingt es ihm, dem Leser oder der Leserin die allgemeine Lösung der Aufgabe zu *vermitteln*. Für uns wäre es heute ein Leichtes, diese allgemeine Lösung aus seinem Beweis zu extrahieren und zu formulieren. Es würde sich dabei um ein besonders anschauliches Beispiel einer Explizierung handeln, wie sie oben eingeführt wurde und den Gegenstand dieses Abschnitts bildet. Nicht immer ist die explizite Integration so umfänglich möglich wie in diesem Fall, und selten lässt sich so einfach angeben, weshalb frühere Generationen den Schritt zur expliziten Formulierung nicht gegangen sind (hier: ungeeignete Notation)[48]. Im Folgenden werde ich zwei typischere Beispiele der Explizierung impliziten mathematischen Wissens aus dem zwanzigsten Jahrhundert etwas ausführlicher diskutieren.[49] Diese Diskussion wird uns in C.3 als Grundlage dazu dienen, die Rolle der Explizierung in der Entwicklung mathematischer Theorien zu beschreiben.

C.1 Beispiel Diagonalisierung

Als erstes Beispiel möchte ich den Beweis des ersten Unvollständigkeitssatzes durch Kurt Gödel betrachten.[50] Dieser Satz gilt als einer der zentralen Ergebnisse der mathematischen Logik; dabei wird jedoch vielleicht vergessen, dass auch die von Gödel benutzte Beweismethode zu diesem Status des Satzes beigetragen hat: Bestimmt bilden die (nachfolgend so genannten) „Gödelisierung der Syntax" und die dadurch er-

[47] Dieses Beispiel stammt aus Breger (2000, S. 222).

[48] Knobloch (1980) führt eine lehrreiche Diskussion der verschiedenartigen Beziehungen zwischen Notation und mathematischem Fortschritt.

[49] Mathematische Details zu den diskutierten Beispielen finden sich wiederum im Anhang.

[50] Siehe Gödel (1931)

möglichte „Diagonalisierungsmethode" „a contribution to mathematical knowledge which goes beyond the statement of the proposition".[51] Heute leitet man den Unvollständigkeitssatz aus „dem" Diagonalisierungslemma ab:

> Sei T eine „genügend mächtige" Theorie, es bezeichne $\ulcorner x \urcorner$ die Gödel-Nummer von x und es sei ψ eine beliebige Formel der Sprache von T mit einer freien Variable. Dann existiert ein Satz φ der Sprache von T mit
>
> $$T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\ulcorner \varphi \urcorner). \tag{2.1}$$

Der Beweis dieser Aussage geschieht genau mit den von Gödel entwickelten und oben erwähnten Methoden und wird entsprechend von Boolos et al. (2002) Gödels „exceedingly ingenious lemma" genannt.[52] Um den Unvollständigkeitssatz zu erhalten, zeigt man, dass es eine Formel χ in der Sprache von T gibt, welche die Beweisbarkeit in T „ausdrückt".[53] Setzt man $\neg\chi$ für ψ in (2.1) ein, so ergibt sich sofort der Unvollständigkeitssatz.

Dieser Beweis ist dem Original in Gödel (1931) nicht ganz treu, denn Gödel hat kein Diagonalisierungslemma formuliert und nicht einmal von „Diagonalisierung" gesprochen.[54] Es waren Rudolf Carnap (1934, S. 91) und Barkley Rosser (1939), die bemerkten, dass sich das Diagonalisierungslemma in der obigen Form aus dem Gödel'schen Beweis extrahieren lässt. Es kann kein Zweifel darüber bestehen, dass die Extraktion in diesem Fall jedoch ungemein schwieriger zu bewerkstelligen war als im obigen Beweis von Diophantos. So streicht auch der Logiker und Philosoph Haim Gaifman diese Leistung heraus:

> The generalization, which now appears obvious, was not at all obvious in 1934. Anyone who will go through Gödel's original proof will see that achieving the right perspective is not a trivial matter. (Gaifman, 2006, S. 710)

Interessant ist hier vor allem seine Feststellung, dass zur Extraktion des Diagonalisierungslemmas das Einnehmen der „richtigen Perspektive" notwendig ist. Mathematiker und Logikerinnen heute, die mit Diagonalisierung bestens vertraut sind, besitzen eine andere Perspektive als die ersten Leser des Gödel'schen Beweises; sie „sehen" in Gödels Beweis ganz einfach eine Instanz der generellen Idee der Diagonalisierung – dies ist eine Perspektive, die sich im Laufe der letzten achtzig Jahre aber erst entwickeln musste.

---

[51] Vgl. das Zitat von Rav auf Seite 45. Mendelson nennt die indirekte Selbstreferenz sogar "the key idea in the explosion of progress in mathematical logic that began in the 1930s." (Mendelson, 1997, S. 204)

[52] Boolos et al. (2002, S. 221)

[53] T muss dafür „genügend mächtig" und die Folgerungsbeziehung in T „genügend mechanisch" sein.

[54] Zuweilen wird das obige Lemma auch „Fixpunktlemma" genannt; Gödel hat jedoch ebenso wenig von „Fixpunkten" gesprochen.

Craig Smoryński (1981) hat die Geschichte des Diagonalisierungslemmas skizziert und beklagt, dass die Entwicklung dieser Idee allzu langsam vonstatten gegangen sei. Erst in den Sechzigerjahren wurde das Diagonalisierungslemma durch Ehrenfeucht und Feferman (1960) verallgemeinert, um in Montague (1962) die Form anzunehmen, welche Smoryński (1981, S. 357–8) auf Grund ihrer „proper generality" das „Endresultat" nennt:

> Sei T eine „genügend mächtige" Theorie, $0 \leq k \leq n$ und ψ eine beliebige Formel der Sprache von T mit freien Variablen $v_0,\ldots,v_n$. Dann existiert eine Formel φ der Sprache von T mit
>
> $$T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(v_0, \ldots, v_{k-1}, \ulcorner\varphi\urcorner, v_{k+1}, \ldots, v_n)$$
>
> und freien Variablen $v_0,\ldots,v_{k-1},v_{k+1},\ldots,v_n$.

Die langsame Entwicklung hat dazu geführt, dass erst spät ein systematisches Studium „arithmetischer Selbstreferenz" begonnen wurde.[55] Dieses produzierte dann jedoch unter anderem eine Fülle neuer, mächtiger Fixpunkte, die sich in ganz unterschiedlichen Situationen zur Anwendung empfehlen, sowie eine ziemlich extensive „modale Analyse" der Definierbarkeit von Fixpunkten.[56]

In eine etwas andere Richtung zielt der Versuch von William Lawvere ([1969] 2006), das Diagonalisierungslemma aus dem Kontext formaler Sprachen herauszulösen und seine Ähnlichkeit mit anderen „Diagonalisierungsargumenten" offenbar zu machen: "The similarity between the famous arguments of Cantor, Russell, Gödel and Tarski is well-known, and suggests that these arguments should all be special cases of a single theorem about a suitable kind of abstract structure."[57] Als geeignete „abstrakte Struktur" identifiziert er eine bestimmte Klasse von Kategorien (kartesisch abgeschlossene), formuliert also das Diagonalisierungsargument in einem allgemeinen kategorientheoretischen Rahmen. Yanofsky (2003) hat gezeigt, wie sich innerhalb dieses Rahmens tatsächlich auch viele weitere Argumente aus der Rekursionstheorie, Komplexitätstheorie und Theorie formaler Sprachen darstellen lassen.[58]

Sicherlich wären noch viele weitere Artikel zu zitieren, in denen sich Mathematiker und Logikerinnen (wie auch Philosophen) mit der Idee der Diagonalisierung beschäftigt haben, doch bereits an diesen wenigen Beispielen lässt sich das Streben nach Allgemeinheit in den Resultaten erkennen. Für Gödels Unvollständigkeitssatz reicht eine Instanz des Diagonalisierungslemmas von Rosser, und dieses ist wiederum nur eine Instanz desjenigen Montagues. Doch es scheint mir wichtig zu betonen,

[55] Smoryński (1982, S. 317)

[56] Für einen Einstieg in diese Theorien siehe Smoryński (1981) und weitere Referenzen dort für Fixpunkte, z. B. Smoryński (1985) und Boolos (1993) für die modale Analyse.

[57] Lawvere ([1969] 2006, S. 3)

[58] Siehe auch weitere Referenzen dort.

dass Verallgemeinerungen alleine nicht Ziel der Mathematiker sein kann. Lawveres kategorientheoretische Formulierung des Diagonalisierungsarguments stellt gegenüber Montagues Resultat eine nochmalige Verallgemeinerung dar (und andere – auch nicht-kategorientheoretische – wären möglich), trotzdem haben die formalsprachlichen Formulierungen für Logikerinnen ihre Bedeutung beibehalten; Montagues und nicht Lawveres Version besitzt für Smoryński die „proper generality". Andererseits wurde Lawveres Artikel nicht einfach ignoriert; die mathematische Gemeinschaft hat seine Ideen rezipiert und weiterentwickelt. Ich bin nicht in der Lage zu beurteilen, wie erfolgreich diese Sichtweise auf Diagonalisierung bisher gewesen ist, doch generell hat sich der Einsatz von Kategorientheorie in den letzten fünfzig Jahren ohne Zweifel in vielen Gebieten als sehr fruchtbar erwiesen.[59]

Am Beispiel der Diagonalisierung lässt sich zeigen, dass auch „pädagogische" Gründe für eine Explizierung impliziten Wissens in Beweisen mitverantwortlich sein können. Erstens ist es einfacher, explizites Wissen zu vermitteln als implizites. Letzteres kann nur durch Vorzeigen (hier: des Beweises) geschehen und setzt mit Polanyi (1985, S. 15) die „intelligente Mitwirkung" der lernenden Person voraus. Sie muss, so meine These des letzten Abschnitts, die Rolle der Diagonalisierungsmethode in diesem Beweis zu verstehen versuchen. Und zweifellos wird dies dadurch vereinfacht, dass z. B. im Beweis des Unvollständigkeitssatzes ein Diagonalisierungslemma explizit formuliert wird. Denn dieses gibt Antworten u. a. auf folgende Fragen:[60] Unter welchen (hinreichenden) Umständen ist die Methode anwendbar? Welche Eigenschaften besitzt der Satz, den sie hervorbringt? Und es macht es leichter zu sehen, wie diese Eigenschaften zum Beweis der Unvollständigkeit benutzt werden. Schliesslich bietet es eine Möglichkeit, die Diagonalisierungsmethode „auszuzeichnen", indem ihr ein eigenes Lemma und gar ein Name zugesprochen wird. Sie erhält damit gewissermassen einen Status, der über ihre Funktion im Beweis des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes hinausgeht. Insgesamt also ermöglicht die explizite Formulierung, die Beweisidee deutlicher hervortreten zu lassen. Oder in den Worten Milnes:

> The use of diagonalization within the theory [d. h. die explizite Formulierung des Diagonalisierungslemmas] places proofs of the First Incompleteness Theorem in a more abstract setting. […] This more abstract formulation has the merit, on the formal level, of letting one better see the essential mechanics of the proof, what really does the work. (Milne, 2007, S. 218)

Hiermit ist gleich ein zweiter „pädagogischer" Grund für die Explizierung impliziten Wissens angesprochen; sie erst ermöglicht nämlich eine abstraktere Formulierung und damit eine „Reduktion auf das Wesentliche" im Beweis. In einem modernen Lehrbuch der mathematischen Logik liest man etwa zu Gödels und Tarskis Beweis:

[59] Für einen Überblick hierzu siehe Mac Lane (1988).

[60] Vgl. auch die Diskussion des Beweises Euklids für die Unendlichkeit der Primzahlen (S. 46ff.).

> If these proofs strike the reader as somewhat mysterious, you are in good company; they were poorly understood by the mathematical community for some time after their publication in 1931 [...] However, the central idea is actually very simple and it is helpful to see it in abstract form. (Hinman, 2005, S. 319)

Und Lawvere erklärt im Kommentar zu seinem oben zitierten Artikel, sein ursprüngliches Ziel sei es gewesen, "to demystify the incompleteness theorem of Gödel and the truth-definition theory of Tarski by showing that both are consequences of some very simple algebra in the cartesian-closed setting."[61] Ich glaube, beide haben Recht darin, dass eine abstraktere Formulierung zur „Vereinfachung" des Arguments beitragen kann; doch diese Vereinfachung hat einen gewissen Preis, der sich gut an Lawveres Beispiel illustrieren lässt. Um die abstraktere Formulierung zu verstehen, ist die Kenntnis von Kategorientheorie erforderlich. Und um etwa den Unvollständigkeitssatz aus dieser abstrakten Formulierung abzuleiten, muss man wissen, wie formale Theorien als kartesisch-abgeschlossene Kategorien betrachtet werden können.[62] Dies gilt es generell zu berücksichtigen, wenn man die Frage diskutiert, inwieweit Explizierung impliziten Wissens gelingen kann. Da die Formulierung nur innerhalb einer Theorie durchgeführt werden kann, muss man ein gewisses Verständnis dieser Theorie (im Sinne von 2.A) besitzen, um der Formulierung überhaupt einen Sinn geben zu können. Dies bedeutet, dass *anderes* implizites Wissen erforderlich wird, und in diesem Sinne ist eine *vollständige* Explizierung impliziten Wissens nicht möglich, wie wir ja im letzten Abschnitt unter Punkt (ii) bereits vermuteten.

Versuchen wir einen Überblick über die hier skizzierte Entwicklung der Diagonalisierung zu gewinnen. Als Gödel der mathematischen Gemeinschaft seinen ersten Unvollständigkeitssatz präsentierte, war diese zwar bald von der Korrektheit des Beweises überzeugt, hatte jedoch Mühe, ihn zu *verstehen*. Der Beweis verwendete gänzlich neue Methoden; er wies gewiss auch eine Ähnlichkeit zu den Diagonalisierungsargumenten von Cantor und Russell auf, doch worin diese Ähnlichkeit genau bestand, dürfte zu Beginn noch unklar gewesen sein; der Beweis war für die damaligen Mathematiker und Mathematikerinnen schwierig. Darauf setzte ein Prozess ein, den wir nun als einen der „Entmystifizierung" beschreiben können. Carnap und Rosser klärten die Rolle der Diagonalisierung in Gödels Beweis, einige Jahrzehnte später wurde die Diagonalisierung selbst zum Gegenstand mathematischer Untersuchungen, und dabei das Diagonalisierungslemma von Rosser in verschiedene Richtungen verallgemeinert. Schliesslich wurde der Zusammenhang zwischen den Verwendungen der Diagonalisierung bei Cantor, Russell, Gödel und Tarski zu Tage gefördert und damit das „Wesen" der Diagonalisierung offenbar gemacht.

Die Explizierung war also in diesem Fall ein komplexer und langer Prozess. Verschiedene explizite Formen der Diagonalisierungsidee wurden von Mathematikern

[61] Lawvere ([1969] 2006, S. 2)
[62] Vgl. Lawvere ([1969] 2006, S. 9ff.)

und Mathematikerinnen im Laufe des zwanzigsten Jahrhunderts vorgeschlagen, lösten sich gegenseitig ab oder existierten nebeneinander. Smoryński spricht zwar von *seinem* „Endresultat“, der Prozess der Explizierung der ursprünglichen Idee muss für die gesamte mathematische Gemeinschaft jedoch überhaupt noch nicht abgeschlossen sein. Schon jetzt kann man eine Fülle an Resultaten und gar zwei ganze Theorien („arithmetische Selbstreferenz“ und „modale Analyse der Definierbarkeit von Fixpunkten“) ausmachen, die im Zuge dieses Prozesses entwickelt wurden.

C.2 Beispiel Homotopie

Als nächstes Beispiel möchte ich die Entwicklung des Begriffs der Homotopie in der Mathematik diskutieren, wobei ich mich auf eine ausführliche Darstellung in Vanden Eynde (1999) stützen kann. Wenn man Abbildungen zwischen Räumen betrachtet, ist es oft gar nicht von Interesse, wie die Abbildungen *im Detail* aussehen: Zwei Abbildungen, die sich „stetig ineinander überführen“ lassen, werden dann als äquivalent erachtet und in der Betrachtung nicht unterschieden. Homotopie ist der heute gebräuchliche Begriff zur Präzisierung dieser „Stetig-Ineinander-Überführbarkeit“.[63] Doch obwohl sich die Ursprünge dieses Begriffs mindestens bis ins 18. Jahrhundert zurückverfolgen lassen, erfolgte eine explizite Formulierung erst in der ersten Hälfte des letzten Jahrhunderts. Ich will nur einige der für uns interessanteren Stationen auf diesem Weg erwähnen, für die Details und die anderen Stationen verweise ich auf Vanden Eynde (1999).

Nach Vanden Eynde findet sich ein erstes (implizites) Vorkommnis einer Homotopie in der Variationsrechnung von Lagrange im 18. Jahrhundert. Dort war man mit dem Problem beschäftigt, für zwei Punkte in der Ebene eine Kurve dazwischen zu finden, die ein gewisses Funktional minimiert (oder maximiert). Autoren vor Lagrange hatten üblicherweise Polygonzüge vom ersten zum zweiten Punkt betrachtet und jeweils eine einzelne Ecke des Zuges (in einer Richtung) variiert, was durch den Übergang zu „unendlich feinen“ Polygonzügen zu Differenzialgleichungen führte, die es dann zu lösen galt. Lagranges Idee nun war es, stattdessen die gesamte Kurve „variieren“ zu lassen, indem er für eine Kurve dargestellt durch $y = \varphi(x)$ einen weiteren Parameter i einführte: Er betrachtete also eine Funktion $\varphi(x, i)$ mit der Bedingung, dass $\varphi(x) = \varphi(x, 0)$ (für alle x) gilt, und konnte dann für jedes Funktional $\mathcal{I}$ die notwendige Bedingung für einen lokalen Extremwert in φ formulieren:

$$0 = \left[\frac{\partial \mathcal{I}(\varphi(\cdot, i))}{\partial i}\right]_{i=0}$$

So nahe an unserer heutigen Definition von Homotopie (von Kurven) war nach La-

[63] Analog interessiert man sich oft auch nicht für die Details der betreffenden Räume und macht zwischen „homotopieäquivalenten“ Räume keinen Unterschied.

grange lange Zeit niemand mehr; Jean Dieudonné nannte es entsprechend „une première idée de ce qui sera plus tard l'homotopie“[64].

Den nächsten Auftritt hatte die Variation von Kurven bei Cauchys Untersuchung komplexer Integrale analytischer Funktionen. Nachdem Gauss und Poisson gezeigt hatten, dass ein Integral der Form

$$\int_{x_0+iy_0}^{x_1+iy_1} f(z)\mathrm{d}z \tag{2.2}$$

im Allgemeinen von der Wahl des Pfades von $x_0 + iy_0$ nach $x_1 + iy_1$ abhängt, war Cauchy in der Lage, mit der oben besprochenen Variationstechnik (die er bei Lagrange lernte) zu zeigen, unter welchen (hinreichenden) Bedingungen die Wahl ohne Einfluss bleibt. Er führte dazu zwei monotone reellwertige Funktionen $x = \varphi(t)$ und $y = \chi(t)$ ein und schrieb (2.2) um zu

$$\int_{t_0}^{t_1} f\left(\varphi(t) + i\chi(t)\right)\left[\varphi'(t) + i\chi'(t)\right]\mathrm{d}t.$$

Er zeigte dann, dass dieser Ausdruck unabhängig von der Wahl von φ und χ bleibt, wenn f für $x_0 \leq x \leq x_1$ und $y_0 \leq y \leq y_1$ genügend „zahm“ ist. Seine Vorstellung hierbei ist die einer „mobilen Kurve“, die in ihrer Gestalt variabel ist und zu verschiedenen Zeitpunkten mit φ bzw. χ übereinstimmt.

Wir haben es hier also mit einer Methode zu tun (eine „kontinuierliche Variation“ von Kurven), welche in Beweisen der Analysis fruchtbar verwendet werden kann, doch sie hatte zu diesem Zeitpunkt – obwohl sie bereits zwischen Mathematikern *vermittelt* worden war – noch nicht einen Status erlangt, der sie über ihre Funktion in diesen Beweisen erhoben hätte. Sie wurde bloss implizit benutzt, ohne zum *Gegenstand* mathematischer Untersuchung zu avancieren:

> Since the integration of analytic functions along homotopic paths in the complex plane from which the singularities are removed gives the same value for the integral, one would expect this subject to provide the appropriate ground for the concept of homotopy to appear in, but these appearances often remained implicit. Most authors failed to recognize that there was a new concept worth mentioning and used continuous deformation of paths as a means to an end, a tool to describe certain situations. (Vanden Eynde, 1999, S. 66)

Und dies änderte sich im Laufe des 19. Jahrhunderts auch nicht in den Arbeiten von Riemann, Abel, Jacobi, Puiseux, Jordan und Klein in anderen Gebieten der Analysis. In all diesen Fällen wurde das Konzept verwendet, ohne genau definiert worden zu sein und ohne überhaupt eine von seiner Funktion innerhalb der jeweiligen

[64] Dieudonné (1978*b*, S. 50)

Beweise gesonderte Behandlung zu erfahren.[65] Es war erst Poincaré ganz am Ende des Jahrhunderts, der erstens ganz bewusst den Begriff aus dem Kontext der Analysis herauslöste und in seine „Analysis situs“ (die spätere Topologie) integrierte, und zweitens erkannte, dass Homotopie wichtige Informationen über die Topologie einer Mannigfaltigkeit kodiert. Es verging nochmals mehr als ein Jahrzehnt, bis ihr Status als Äquivalenzrelation geometrischer Objekte festgehalten wurde. Bei Dehn und Heegard findet sich eine erste genaue Definition von Homotopie (und hier trat auch das Wort „homotop“ zum ersten Mal auf), doch diese betrifft nur Komplexe und ist extensionsgleich mit Homöomorphie. Bei Brouwer schliesslich nahm die Homotopie eine wichtige Rolle in den Beweisen ein,[66] z. B. im Fixpunktsatz sowie im Satz der Dimensionsinvarianz. Er ist auch der Erfinder der heute noch gültigen Definition von Homotopie sowie der erste, der explizit nicht einzelne Abbildungen, sondern „Homotopieklassen“ von Abbildungen betrachtete.

An dieser Stelle wandelt sich der Begriff der Homotopie von einem blossen Instrument zu einem Untersuchungsgegenstand an sich: Die Homotopietheorie als Teil der Algebraischen Topologie wird geboren. Hopf untersucht die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen zwischen Sphären, Čech und Hurewicz führen in Verallgemeinerung der von Fundamentalgruppe Poincarés höhere Homotopiegruppen ein, mehrere Mathematiker beginnen, Faserungen und die Homotopiehebungseigenschaft sowie die damit verbundene exakte Sequenz von Homotopiegruppen zu studieren. Es werden neue Methoden entwickelt, um Homotopiegruppen von Räumen zu berechnen, und die Beziehung zur Homologie wird geklärt. Was sich in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts abgespielt hat, kann ich aus Gründen fehlender Kompetenz wie auch fehlenden Platzes nicht einmal andeuten; Homotopietheorie ist heute ein weites Feld – und doch sticht (für die vorliegende Diskussion) eine Entwicklung, diejenige der Abstrakten Homotopietheorie, hervor. In den Sechzigerjahren hatte sich die Homotopietheorie bereits fest etabliert und die Mathematikerinnen besassen grosse Erfahrung mit deren grundlegenden Methoden und Resultaten; und eine solche Situation in einem mathematischen Gebiet hat im zwanzigsten Jahrhundert sehr oft zur Folge, dass die entsprechende Theorie axiomatisiert wird. Abstrakte Homotopietheorie entstand damals als Versuch, einen Rahmen zu formulieren,[67] in dem „Homotopietheorie betrieben werden kann“.[68] Eines der Resultate dieses Versuches ist die Anwendung homotopietheoretischer Methoden in der Algebraischen Geometrie, die zur gefeierten Lösung offener Vermutungen durch Voevodsky führte.[69]

[65] Dies führte unter anderem dazu, dass lange nicht sorgfältig genug zwischen Homotopie und Homologie unterschieden wurde; vgl. Vanden Eynde (1999, S. 80).

[66] Vgl. für das Folgende auch Marquis (2006) und Hirsch (1978).

[67] Ebenfalls wie so oft geschah dies in der Sprache der Kategorientheorie.

[68] Vgl. Dwyer und Spalinski (1995, S. 75)

[69] Vgl. Friedlander et al. (2003)

In diesem Beispiel wird, mehr noch als im Falle der Diagonalisierung, deutlich, wie stark die Explizierung impliziten Wissens den weiteren Verlauf einer mathematischen Theorie (hier: der Algebraischen Topologie) beeinflussen kann; sicherlich wäre Homotopietheorie in der heutigen Form (und damit meine ich auch: in der heutigen weite Teile der Algebraischen Topologie dominierenden Grösse) nicht möglich, ohne dass jemand zu einem Zeitpunkt eine Explizierung des „stetig ineinander Überführens" versucht hätte.[70]

C.3 Mathematischer Fortschritt

Es wurden nun drei Beispiele von Explizierungen impliziten Wissens aus verschiedenen mathematischen Beweisen diskutiert: die Analogie zwischen Booleschen Algebren und Stone-Räumen in Stones Darstellungssatz, die Diagonalisierung im Gödelschen Unvollständigkeitssatz und die Homotopie in verschiedenen Beweisen aus der Analysis. Dabei sticht ein Unterschied ins Auge: Während die Idee der Variation von Kurven oder Abbildungen in einer bzw. mehreren Definitionen ihre explizite Form fand, brachte die Idee der Diagonalisierung zumindest in den ersten Explizierungsversuchen keine neuen mathematischen Begriffe hervor, sondern ein mathematisches Resultat, das Diagonalisierungslemma. Im Falle der Stone-Dualität schliesslich finden sich – wie bei einem solch komplexen Phänomen wie der Analogie zwischen zwei mathematischen Gebieten zu erwarten – beide Formen der Explizierungen vor, sowohl neue mathematische Begriffe als auch neue Sätze. Den drei Explizierungen ist hingegen gemeinsam, dass sie die Mathematik in der Folge mitprägten und ich möchte dieses Kapitel damit beschliessen, einige Formen mathematischen Fortschritts aufzuzeigen, welche durch Explizierung verursacht werden können. Dies gibt mir gleichzeitig die Gelegenheit, mögliche Gründe für (i) des letzten Abschnitts anzugeben, also dafür, dass eine explizite Integration „über die Möglichkeiten einer impliziten Integration hinaus" geht.

Kommunikation und Vereinfachung Es wurde bereits einige Male auf die Tatsache hingewiesen, dass die Kommunikation zwischen Lehrendem und Ler-

[70] Nebenbei bemerkt ist es ganz interessant zu beobachten, dass sich Lagrange und seine Nachfolger für unterschiedliche Aspekte der Homotopie interessierten. Lagranges Interesse galt eindeutig dem *Prozess* des stetigen Variierens einer Kurve, weil dieser Prozess direkte Auswirkungen auf den Wert des betrachteten Funktionals hatte. Bei seinen Nachfolgern hingegen lag der Fokus auf der *Invarianz* gewisser Eigenschaften von Abbildungen unter diesem Prozess. So zeigte Cauchy beispielsweise, dass das Linienintegral bei genügender „Zahmheit" des Integranden invariant unter der stetigen Variation des Weges bleibt. Beide Aspekte flossen in die oben beschriebene Explizierung ein: Der modernen Definition zufolge ist eine Homotopie eine Abbildung, welche eine Abbildung in eine andere „überführt", und bildet damit eine präzisere Fassung des *Prozesses*, während zwei Abbildungen als homotop gelten, wenn sie sich durch eine Homotopie ineinander überführen lassen; dies erlaubt die Untersuchung *homotopieinvarianter* Eigenschaften von Abbildungen.

nenden durch die Explizierung von zuvor implizitem Wissen vereinfacht wird. Dieser Vereinfachung kommt im Falle mathematischer Beweise eine besonders grosse Bedeutung zu, weil (schriftliche) Beweise oft die einzige Form der Kommunikation zwischen den betreffenden Mathematikern und Mathematikerinnen darstellen.[71] Wie am Beispiel des Geometrisierungs-Theorems von Thurston zu sehen war (in Abschnitt 1.B.2), kann die Vermittlung mathematischer Inhalte in impliziter Form mühsam sein und einen zeitintensiven Aufbau einer „mentalen Infrastruktur" erforderlich machen. "[I]ndeed a deeper idea", stellt Mac Lane fest, "may be almost impossible to communicate and so may be recognized only after it has been embodied in some formalization."[72] Wie hinderlich es für mathematischen Fortschritt sein kann, wenn eine Idee in einem Beweis implizit bleibt, lässt sich an der nach Smoryński beklagenswert langsamen Entwicklung einer mathematischen Theorie der Diagonalisierung (bzw. arithmetischen Selbstreferenz) beobachten. Es brauchte eine „Entmystifizierung" des Gödel'schen Beweises, um diese Entwicklung in Gang zu bringen. Wie sehr sich die Kommunikation der Diagonalisierungsidee durch diesen Prozess vereinfacht hat, ist an der doch erstaunlichen Tatsache abzulesen, dass der einstmals so unverständliche Beweis heute in Einführungstexten zur mathematischen Logik für Studienanfänger Platz findet.

Perspektivenwechsel Natürlich generiert eine Explizierung auch neue mathematische Theorien bzw. modifiziert bestehende alleine dadurch, dass sie neue Objekte einführt, die mathematischer Untersuchung zugänglich sind. Beispielsweise ist eine Theorie über Homotopie im 18. und 19. Jahrhundert kaum vorstellbar; ihre Entstehung musste warten, bis Brouwer im 20. Jahrhundert Homotopie auf zufrieden stellende Weise definierte. Dies bedeutet nicht, dass eine Definition eines mathematischen Objekts stets notwendig ist, um Sätze über das Objekt zu beweisen; im ersten Kapitel wurde bereits erwähnt, dass vor allem früher viele Objekte als „natürlich" gegeben erachtet wurden, etwa Kurven, Tangenten oder Polyeder. Auch heute noch spielt die präzise Definition einer natürlichen Zahl in den meisten Gebieten der Zahlentheorie keine nennenswerte Rolle, und würde folglich auch nicht vermisst, wenn es sie nicht gäbe. Aber die Einführung eines mathematischen Begriffs, die Definition eines neuen, aber bereits implizit bekannten mathematischen Objekts, kann den entscheidenden *Anstoss* geben dafür, dass eine Theorie dazu (intensiver) entwickelt wird. Der Grund dafür ist, dass die Explizierung in der Form einer Definition eines mathematischen Objekts zu einer veränderten Sichtweise auf das entsprechende Gebiet führt:

[71] Die spezielle Kommunikationssituation in der Mathematik und die Rolle der Beweise dabei wurde von Heintz (2000, 6.2) diskutiert.

[72] Mac Lane (1981, S. 415)

> The formal recognition of a concept, already used for a long time, implies *seeing* the theory in a new way, or, in other words, a transformation in the value judgements connected with the theory, as for example in the decisions about what is essential. Above all it is the value judgements that determine the atmosphere of a theory. (Breger, 1992, S. 83)

Breger zeigt, wie die Einführung des Konzepts einer Homologietheorie durch Eilenberg und Steenrod als Explizierung eines impliziten Wissens der Experten zu einer veränderten Sichtweise auf die Algebraische Topologie führte: Der zuvor bestimmende geometrische Charakter (die geometrische „Atmosphäre der Theorie") wurde durch einen mehr algebraischen abgelöst.[73] Niemand dürfte heute bestreiten, dass die Algebraische Topologie durch diesen Perspektivenwechsel in der Homologietheorie entscheidende Impulse erfahren hat

Abstraktion Des Weiteren ermöglicht und initiiert die Explizierung oft einen Abstraktionsprozess, der zu mächtigeren Resultaten und einer „Vereinheitlichung" der Theorie führt; als wichtiges Instrument bei der „Vereinheitlichung" der Theorien in den letzten fünfzig Jahren hat sich die Sprache der Kategorientheorie etabliert, die heute zur Formulierung vieler „allgemeinster" Resultate benutzt wird – so etwa in den diskutierten Beispielen. Überhaupt scheint das Streben nach einer abstrakten Zugangsweise in der heutigen Mathematik besonders ausgeprägt zu sein, wie Breger feststellt:

> Whenever a class of problems arises an attempt is made in today's pure mathematics to go over at once to a higher level of abstraction; just this rapid transition appears to be the characterising style of thought of pure mathematics in the 20th century. (Breger, 1992, S. 87)

Entsprechend früh setzt die Explizierung in der heutigen mathematischen Praxis ein: Die Diskussion in Heintz (2000, 4.3, 6.2) zum Prozess des „Aufschreibens" eines Beweises suggeriert, dass bereits vor der Publikation eines mathematischen Resultates implizites Wissen in eine explizite Form gebracht werden muss. Entsprechend beschreiben die dort befragten Mathematiker diesen Prozess, in dem etwa die richtigen Definitionen und eine optimale Darstellung gefunden werden müssen, als zuweilen mühsam und schwierig.

Mathematische Erklärung Abstraktion ist eng mit Erklärung verbunden: "Abstraction and generalization are constantly pursued as the means to reach really satisfactory explanations which account for scattered individual results."[74] Und Er-

[73] Vgl. Breger (1992, S. 83f.) und Breger (1990, S. 51f.)
[74] Feferman (1964, S. 3)

klärungen wiederum spielen eine ausserordentlich wichtige Rolle in der mathematischen Beweispraxis.[75] Manche Beweise werden anderen gegenüber bevorzugt, weil sie den „wahren Grund“ für die Korrektheit der bewiesenen Aussage aufzeigen, und umgekehrt bleibt bei weniger explanativen Beweisen eine gewisse Unzufriedenheit zurück, wie der Mathematiker Louis Joel Mordell treffend beschreibt:

> Even when a proof has been mastered, there may be a feeling of dissatisfaction with it, though it may be strictly logical and convincing; such as, for example, the proof of a proposition in Euclid. The reader may feel that something is missing. The argument may have been presented in such a way as to throw no light on the why and wherefore of the procedure or on the origin of the proof or why it succeeds. (Mordell, 1959, S. 11)

Dieser Gegensatz zwischen dem bloss Überzeugenden und dem Erklärenden eines Beweises wird von verschiedenen Mathematikern betont,[76] und er ist zumindest mitverantwortlich dafür, dass Sätze wieder und wieder bewiesen werden.[77] Es mag nun kaum erstaunen, dass der Prozess der Explizierung dabei eine wichtige Rolle spielt: Die Suche geht oft dahin, den „wahren Grund“, in früheren Beweisen versteckt, *implizit* enthalten, an die Oberfläche treten zu lassen, *explizit* zu machen. Diese Rolle kommt etwa im folgenden Beispiel des Mathematikers Gian-Carlo Rota zum Ausdruck:

> Sometime in the fifties, Hans Lewy of Berkeley discovered the first example of a partial differential equation having no solutions whatsoever. In the succeeding thirty years, the idea hidden underneath Lewy's example was gradually made explicit, until the reason for such an impossibility became crystal clear. (Rota, 1997, S. 193)

Ich glaube, ganz Ähnliches liesse sich zum Gödelschen Unvollständigkeitssatz sagen. Ich habe oben erläutert, wie der Beweis in den frühen Dreissigerjahren des letzten Jahrhunderts zwar als korrekt erachtet, jedoch kaum verstanden wurde, und wie darauf in einem langen Prozess geklärt wurde, welche Rolle die Diagonalisierung im Beweis „wirklich“ spielt. Oder in den bereits zitierten Worten Milnes: “This […] formulation has the merit […] of letting one better see the *essential mechanics* of the proof, what *really* does the work.”[78]

[75] Vgl. Mancosu und Hafner (2005)
[76] Vgl. etwa Bourbaki (1950, S. 223), Rota (1997, S. 186f.), Mac Lane (1981, S. 378f.)
[77] Vgl. auch Mac Lane (1981, S. 432)
[78] Milne (2007, S. 218, Hervorhebung von mir)

Schlusswort

Worin liegt das Ziel der Mathematik? Nach dem DTP-Modell ist es die Aufgabe der Mathematiker und Mathematikerinnen,

> to seek a deductive pathway from the axioms to the propositions or to their denials.[1]

Besteht ihr Ziel also darin, möglichst viele mathematischer Wahrheiten aufzudecken? Oder hat Thurston Recht, der das mathematische Verständnis in den Vordergrund rückt?

> We are not trying to meet some abstract production quota of definitions, theorems and proofs. The measure of our success is whether what we do enables people to understand and think more clearly and effectively about mathematics. (Thurston, 1994, S. 340, Hervorhebung entfernt)

Natürlich sind damit nicht alle Optionen nicht erschöpft. Mein erster Punkt aber ist, dass sich die beiden obigen Antworten gar nicht gegenseitig ausschliessen, dass sie vielmehr zwei Seiten einer Medaille darstellen: Bis ein Theorem bewiesen werden kann, muss mathematisches Verständnis erworben werden, während umgekehrt die Kenntnis von mathematischen Sätzen unabdingbar für das Verständnis ist. Ein zweiter Punkt ist in dieser Arbeit hoffentlich klar geworden: Beweise spielen bei beiden Seiten der Medaille eine zentrale Rolle.

Die rechtfertigende oder validierende Rolle der Beweise in der mathematischen Praxis stand im ersten Kapitel im Vordergrund des Interesses. Eine unserer Erkenntnisse diesbezüglich, an und für sich kaum erstaunlich, verdient vor dem Hintergrund der die Mathematikphilosophie in der Vergangenheit dominierenden Positionen besondere Erwähnung: Es ist nicht so sehr das Individuum mit seiner Fähigkeit, die eigene Arbeit kritisch zu prüfen und allenfalls zu korrigieren, welches für die Zuverlässigkeit des mathematischen Wissensgebäudes verantwortlich ist. Das Vertrauen der Mathematiker und Mathematikerinnen selbst in die mathematischen Sätze basiert vielmehr

[1] Vgl. S. 1

auf ihrem Vertrauen in ihre Kollegen und Kolleginnen und auf deren *vereinten* Fähigkeit zur kritischen Prüfung ihrer Argumente (m. a. W. auf ihrem Vertrauen in den „Sozialen Verifikationsprozess“).

Die in diesem Zusammenhang wirklich drängende Frage – was befähigt Beweise zur Ausübung dieser rechtfertigenden oder validierenden Rolle? – konnte in dieser Arbeit nicht beantwortet werden. Die beiden meist verbreiteten Charakterisierungen von Beweisen scheiterten nicht nur mit ihren Antworten (wenn auch aus unterschiedlichen Gründen), es zeigte sich auch, wie unbefriedigend ihre „Charakterisierungen“ selbst sind. Vertreter und Vertreterinnen einer „Soziologie des Beweises“ sehen sich dadurch in ihrer Position bestätigt, könnte doch die Unfähigkeit zu definieren auf einer Un*möglich*keit beruhen: Wenn die Anforderungen seitens der mathematischen Gemeinschaft an einen Beweis auf Grund sozialer Prozesse einem steten Wandel unterworfen sind, so *kann* es vielleicht keine universell gültige Definition von Beweisen geben.

Mit dem zweiten Kapitel hinter uns können wir aber auch eine alternative Sichtweise einnehmen. Ich habe erwähnt,[2] dass das Erkennen und Produzieren von Beweisen ähnlich dem Radfahren oder einer Sprache in einem „Trainingsprozess“ erlernt wird:

> [T]he fundamentals of mathematical proof have rarely been taught in a systematic way. Most students of mathematics are expected to develop their understanding of proof and the associated theorem-proving skills by a process of ‘osmosis’ through encounters with the various techniques and methods. (Garnier und Taylor, 1996, S. vii)

Und die erfahrenen Mathematiker und Mathematikerinnen wissen ziemlich gut, ob es sich bei einem Argument um einen Beweis handelt oder nicht, sind jedoch nicht in der Lage anzugeben, auf Grund welcher Kriterien sie entscheiden. Die Fähigkeit zur Erkennung korrekter Beweise also ist ein *implizites* Wissen. Der die Mathematikphilosophie der letzten hundert Jahre dominierende Formalismus, welcher Ableitungen und Beweise identifiziert, gewinnt unter dieser Sichtweise einen anderen Status. Formale Systeme und Ableitungen lassen sich dann nämlich als Versuch sehen, dieses implizite Wissen zu explizieren. Diese Sichtweise ist nicht ganz neu; Corcoran (1973) und Barwise (1989) haben Ableitungen als „Modelle“ mathematischer Beweise betrachtet und auf Stärken wie auch auf Schwächen dieses Modells hingewiesen.

Auch wenn Corcoran und Barwise dies nicht bemerkten: Die grösste Schwäche des formalistischen Modells offenbart sich beim in Beweisen vermittelten mathematischen Wissen wie Beweisideen, Konstruktionsmethoden oder Problemlösungsstra-

[2] S. 27

tegien. Nach Mac Lane ist dies der Hauptgrund dafür, dass Ableitungen in der mathematischen Praxis keine Rolle spielen:

> Moreover, there are good reasons why Mathematicians do not usually present their proofs in fully formal style. It is because proofs are not only a means to certainty, but also a means to understanding. Behind each substantial formal proof there lies an idea, or perhaps several ideas. The idea becomes Mathematics only when it can be formally expressed, but that expression must be so couched as to reveal the idea; it will not do to bury the idea under the formalism. (Mac Lane, 1981, S. 378)

Das in Beweisen vermittelte oft implizite Wissen war Gegenstand des zweiten Kapitels meiner Arbeit. Ich habe im Rahmen von Polanyis Diskussion impliziten Wissens den Prozess zu beschreiben versucht, in dem solche „Ideen" von der mathematischen Gemeinschaft rezipiert und nach oft langer, mühsamer Arbeit und einer stetig wachsenden Vertrautheit damit in eine explizite Form gebracht werden können – oft um später durch „bessere" Explizierungen ersetzt zu werden. Ich denke, die etwas ausführlicher diskutierten Fallbeispiele haben gezeigt, dass eine solche Explizierung mathematischen Fortschritt bedeuten kann: Sie führt zur Vereinfachung (und damit zur besseren Kommunikation) von Argumenten oder ganzen Theorien, generiert neue mathematische Objekte und eröffnet neue, fruchtbare Perspektiven, sie erlaubt mächtigere Erklärungen und initiiert Abstraktionsprozesse.

Wie in der Einleitung versprochen, wurde in dieser Arbeit ein vielschichtiges Bild des Zusammenhangs zwischen Beweisen und mathematischem Wissen gezeichnet. Beweise dienen nicht nur zur Validierung mathematischer Sätze, sie stellen auch eine Form der Kommunikation mathematischen Wissens dar und können zum Beispiel durch die Explizierung des in ihnen implizit enthaltenen Wissens indirekt die Entwicklung mathematischer Theorien wesentlich beeinflussen. Natürlich ist dieses Bild noch unvollständig. Nicht nur klaffen beim Validierungsaspekt Lücken, es gibt neben dem Prozess der Explizierung auch noch weitere Weisen, wie das Beweisen die Entwicklung der Mathematik beeinflusst.[3] Trotzdem hoffe ich, diese Arbeit trage zur Erklärung der Tatsache bei, dass Beweise in der Mathematik eine solch zentrale Rolle spielen.

[3] Rav (1999) schildert beispielsweise auf eindrückliche Art, wie bereits die *Suche* nach einem Beweis ganze Gebiete entstehen lassen oder revolutionieren kann.

Anhang

An dieser Stelle sollen die mathematischen Details zu den im Haupttext diskutierten Fallbeispielen nachgeliefert werden. Dabei werden bloss minimale mathematische Kenntnisse vorausgesetzt.

Gruppen- und Vektorraumisomorphie (S. 42)

Eine *abelsche Gruppe* $G = (G, \oplus, \oslash)$ ist eine Menge G mit einer binären Operation $\oplus$ und einem ausgezeichneten Element $\oslash \in G$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) für alle $a, b, c \in G$ gilt $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$;
(ii) für alle $a, b \in G$ ist $a \oplus b = b \oplus a$;
(iii) für alle $a \in G$ gibt es ein $b \in G$ mit $a \oplus b = \oslash$;
(iv) für alle $a \in G$ gilt $a \oplus \oslash = a$.

Ist $G' = (G', \oplus', \oslash')$ eine weitere abelsche Gruppe, so nennt man eine Abbildung $\varphi : G \to G'$ einen *Gruppenmorphismus*, falls für alle $a, b \in G$ die Identität

$$\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) \oplus' \varphi(b)$$

gilt. Ein *Gruppenisomorphismus* ist ein bijektiver Gruppenmorphismus; existiert ein Gruppenisomorphismus $\varphi : G \to G'$, so nennt man G und G' *isomorph*.

Ein *Körper* $K = (K, +, 0, \cdot, 1)$ ist eine Menge K mit zwei binären Operationen $+, \cdot$ und zwei ausgezeichneten Elementen $0 \neq 1 \in K$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $(K, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe;
(ii) $(K \backslash \{0\}, \cdot, 1)$ ist eine abelsche Gruppe;
(iii) für alle $a, b, c \in K$ gilt $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Typische Beispiele von Körpern sind etwa die rationalen, reellen oder komplexen Zahlen $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation.

Sei K ein Körper wie eben; ein K*-Vektorraum* $V = (V, \oplus, \oslash, \otimes)$ ist eine abelsche Gruppe $(V, \oplus, \oslash)$ mit einer Operation $\otimes : K \times V \to V$, welche die folgenden Eigenschaften erfüllen:

(i) für alle $a \in K$ ist die Abbildung $\otimes_a : V \to V$, welche einem $v \in V$ $a \otimes v$ zuordnet, ein Gruppenmorphismus;

(ii) für alle $a, b \in K$ gelten die Identitäten $\otimes_a \oplus \otimes_b = \otimes_{a+b}$ und $\otimes_a \circ \otimes_b = \otimes_{a \cdot b}$ von Abbildungen (dabei bezeichnet $\circ$ die Hintereinanderschaltung zweier Abbildungen und $\otimes_a \oplus \otimes_b(v)$ ist natürlich $a \otimes v \oplus b \otimes v$);

(iii) die Abbildung $\otimes_1$ ist die Identität auf V.

Ist $(V', \oplus', \oslash', \otimes')$ ein weiterer K-Vektorraum, so heisst eine Abbildung $\varphi : V \to V'$ ein K-Vektorraummorphismus, falls für alle $v, w \in V$ und alle $a \in K$ die Identität

$$\varphi(v \oplus a \otimes w) = \varphi(v) \oplus' a \otimes' \varphi(w)$$

gilt. Wiederum ist ein K*-Vektorraumisomorphismus* ein bijektiver K-Vektorraummorphismus; existiert ein K-Vektorraumisomorphismus $\varphi : V \to V'$, so nennt man die beiden K-Vektorräume *isomorph*.

Ist L eine Teilmenge von K, sodass $(L, +, 0, \cdot, 1)$ wiederum ein Körper ist, dann ist $(K, +, 0, \cdot)$ ein L-Vektorraum. So kann man $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ also auf ganz natürliche Weise als $\mathbb{Q}$-Vektorräume betrachten.

Man zeigt, dass es zu jedem K-Vektorraum V wie eben eine Teilmenge $B \subset V$ gibt, eine sogenannte *Basis*, mit der Eigenschaft, dass jedes Element $v \in V$ genau eine Darstellung der folgenden Form hat:

$$v = \sum_{b \in B} a_b \otimes b$$

Dabei ist $a_b \in K$ für alle $b \in B$ und nur endlich viele a_b sind ungleich 0. Im Allgemeinen besitzt V viele verschiedene Basen, doch man kann ebenfalls zeigen, dass die Mächtigkeiten aller Basen identisch sind, und man nennt diese Mächtigkeit die *Dimension* von V. Die Dimension charakterisiert V „vollständig": Ist V' wie oben ein zweiter K-Vektorraum und $B' \subset V'$ eine Basis von V' mit derselben Mächtigkeit wie B, so sind V und V' isomorph. (Denn: Sei $f : B \to B'$ eine Bijektion; dann ist

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow V' \\ v = \sum_{b \in B} a_b \otimes b &\longmapsto \sum_{b \in B} a_b \otimes f(b) \end{aligned}$$

ein K-Vektorraumisomorphismus.)

Stone-Dualität (S. 42–45)

Eine *Partialordnung* $(M, \leq)$ auf einer Menge M ist eine Relation $\leq$ auf M, sodass für alle $a, b, c \in M$ gilt:

(i) $a \leq a$;
(ii) falls $a \leq b$ und $b \leq c$, so auch $a \leq c$;
(iii) falls $a \leq b$ und $b \leq a$, so ist $a = b$.

Ein *Verband* ist eine Partialordnung $(M, \leq)$, sodass je zwei Elemente $a, b \in M$ eine obere und eine untere Schranke besitzen: $a \vee b$ und $a \wedge b$ (d. h. $a, b \leq a \vee b$ und $a \wedge b \leq a, b$). Der Verband heisst *distributiv*, falls für alle $a, b, c \in M$ die Identität $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ gilt, und er heisst *komplementär*, falls er ein grösstes und ein kleinstes Element 1 bzw. 0 besitzt sowie für jedes $a \in M$ ein a^* mit $a \wedge a^* = 0$, $a \vee a^* = 1$. Eine *Boolesche Algebra* ist ein distributiver, komplementärer Verband $(M, \leq, \vee, \wedge, 0, 1, ^*)$.

Boolesche Algebren treten in verschiedensten Gebieten auf, zum Beispiel:

(i) Ist S eine Menge und $\mathcal{Q}$ eine Familie von Teilmengen von S, welche abgeschlossen ist bezüglich endlicher Vereinigung, endlichen Durchschnitts und Komplementbildung, dann enthält $\mathcal{Q}$ automatisch die leere Menge $\varnothing$ sowie ganz S und $(\mathcal{Q}, \subset, \cup, \cap, \varnothing, S, ^*)$ bildet mit den üblichen mengentheoretischen Operationen eine Boolesche Algebra, eine sogenannte *Mengenalgebra* (wobei $U^* = S \backslash U$).

(ii) Ist T ein formales System, so lässt sich auf den Sätzen ihrer Sprache eine Äquivalenzrelation $\sim$ definieren durch $p \sim q$ genau dann, wenn $T \vdash p \leftrightarrow q$.[1] Die Junktoren $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ und $\neg$ induzieren Operationen auf der Menge der Äquivalenzklassen $T_\sim$. Ist $\top$ bzw. $\bot$ die Äquivalenzklasse des logisch Wahren bzw. Falschen, so bildet $(T_\sim, \rightarrow, \vee, \wedge, \bot, \top, \neg)$ eine Boolesche Algebra, die sogenannte *Lindenbaum-Tarski-Algebra* zu T.

(iii) Ist V ein K-Vektorraum wie im vorangehenden Abschnitt, so heisst ein K-Vektorraummorphismus $\varphi : V \rightarrow V$ ein *Projektion* (auf V), falls $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Zwei Projektionen φ und ψ heissen *kommutierend*, falls $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Enthält nun eine Menge $\mathcal{B}$ von paarweise kommutierenden Projektoren auf V die Identität 1_V sowie die Nullabbildung 0_V, und ist sie bezüglich der Operationen

$$\varphi \wedge \psi := \varphi \circ \psi, \qquad \varphi \vee \psi := \varphi + \psi - \varphi \circ \psi$$

abgeschlossen, so bildet $(\mathcal{B}, \leq, \vee, \wedge, 0_V, 1_V, ^*)$ eine Boolesche Algebra, wobei

[1] Siehe für diese Schreibweise wie auch für die Definition einer Äquivalenzrelation den folgenden Abschnitt.

$\varphi^* = 1_V - \varphi$ und $\varphi \leq \psi$ genau dann, wenn $\varphi \wedge \psi = \varphi$. Es handelt sich hierbei um eine *Boolesche Algebra von Projektionen*.

Ein *Morphismus von Booleschen Algebren* ist eine Abbildung $\varphi : M \to M'$ zwischen Booleschen Algebren, der verträglich ist mit den Halb-Ordnungen und den Operationen der beiden Booleschen Algebren, und der die ausgezeichneten Elemente erhält (ähnlich wie im letzten Abschnitt bei den Gruppen und Vektorräumen). Ein *Isomorphismus* ist, ebenfalls wie im letzten Abschnitt, ein bijektiver Morphismus. Isomorphe Boolesche Algebren werden in den meisten Fällen identifiziert.

Der Begriff eines Rings verallgemeinert in gewisser Hinsicht denjenigen eines Körpers:[2] Ein (kommutativer) *Ring* (mit Eins) $R = (R, +, 0, \cdot, 1)$ ist eine Menge R mit zwei binären Operationen $+, \cdot$ und zwei ausgezeichneten Elementen $0, 1 \in R$, sodass für alle $a, b, c \in R$ gilt:

(i) $(R, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe;
(ii) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
(iii) $a \cdot b = b \cdot a$;
(iv) $a \cdot 1 = a$;
(v) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Insbesondere ist jeder Körper ein Ring. Ein *Ideal* in R ist eine nicht-leere Teilmenge $\mathfrak{a} \subset R$, sodass für alle $a, b \in \mathfrak{a}$ und $r \in R$ $a + r \cdot b$ wieder in $\mathfrak{a}$ ist. Für eine Familie von Idealen $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ kann man ihre Summe $\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ als das kleinste Ideal in R definieren, welches alle $\mathfrak{a}_i$ enthält (ein solches existiert stets, weil der Durchschnitt einer Familie von Idealen wiederum ein Ideal ist). Ein Ideal $\mathfrak{a} \subsetneq R$ heisst *Primideal*, falls für $a, b \in R$ $a \cdot b \in \mathfrak{a}$ impliziert, dass $a \in \mathfrak{a}$ oder $b \in \mathfrak{a}$.

Es ist nicht ganz offensichtlich, dass zwischen Ringen und Booleschen Algebren ein interessanter Zusammenhang besteht. Doch genau dies zeigte Marshall Stone: Ist $(M, \leq, \vee, \wedge, 0, 1, ^*)$ eine Boolesche Algebra, dann wird M zu einem Ring $(M, +, 0, \cdot, 1)$ durch die Festsetzungen

$$a + b = (a \wedge b^*) \vee (a^* \wedge b), \quad a \cdot b = a \wedge b.$$

Dieser Ring erfüllt die Eigenschaft, dass $a \cdot a = a$ für alle $a \in M$; man nennt Ringe mit dieser Eigenschaft *Boolesche Ringe*. Umgekehrt wird ein Boolescher Ring $(R, +, 0, \cdot, 1)$

[2]Siehe vorangehenden Abschnitt

zu einer Booleschen Algebra $(R, \leq, \vee, \wedge, 0, 1, ^*)$ durch die Festsetzungen

$$a \wedge b = a \cdot b, \quad a \vee b = a + b + a \cdot b, \quad a^* = a + 1,$$

und $a \leq b$ genau dann, wenn $a \cdot b = a$. Es ist einfach zu sehen, dass diese beiden „Übersetzungsvorschriften" zueinander invers sind. Diese Identifikation von Booleschen Algebren und Booleschen Ringen stellte den ersten Schritt des in Kapitel 2 diskutierten Stone'schen Beweises dar. Um den zweiten Schritt zu diskutieren, benötigen wir den Begriff eines topologischen Raumes.

Ein *topologischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Familie $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X (der *Topologie* von X), die folgende Eigenschaften erfüllen:

(i) $X, \varnothing \in \mathcal{O}$;
(ii) $A, B \in \mathcal{O}$ impliziert $A \cap B \in \mathcal{O}$;
(iii) ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X mit $A_i \in \mathcal{O}$ für alle $i \in I$, so gilt auch $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}$.

Man nennt die Elemente aus $\mathcal{O}$ die *offenen* Teilmengen von X, Komplemente offener Mengen heissen *abgeschlossen*. Teilmengen, welche sowohl offen als auch abgeschlossen sind, nennt man *offen-abgeschlossen*. Der Raum heisst *quasi-kompakt*, falls für jede Familie $(U_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{O}$ mit $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ eine endliche Teilmenge $J \subset I$ existiert, sodass $\bigcup_{i \in J} U_i = X$.

Ein Beispiel eines topologischen Raumes sind die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der „Standard"-Topologie: Diejenigen Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$ sind offen, welche mit jedem $x \in A$ ein ganzes Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$ beliebig klein) enthalten. Beispielsweise sind offene Intervalle (a, b) (d. h. ohne die Intervallgrenzen) offen, abgeschlossene Intervalle $[a, b]$ (d. h. mit den Intervallgrenzen) sind abgeschlossen – wie man erwarten dürfte. Dies überträgt sich auf die höherdimensionalen euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$: Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist offen, wenn sie mit jedem $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ eine ganze n-Kugel

$$\{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 < \varepsilon\}$$

für ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ enthält.

Ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge, so ist $(A, \{Y \cap A \mid Y \in \mathcal{O}\})$ ebenfalls ein topologischer Raum, ein sogenannter *Teilraum*.

Sei $(M, \leq, \vee, \wedge, 0, 1, ^*)$ nun eine Boolesche Algebra und $(R, +, 0, \cdot, 1)$ der dazu assoziierte Boolesche Ring. Es bezeichne $\mathrm{sp}(M)$ die Menge aller Primideale von R und für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R sei

$$\mathrm{U}(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{sp}(M) \mid \mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}\}.$$

Dann definiert $\mathcal{O}_M = \{\mathrm{U}(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a} \text{ Ideal von } R\}$ eine Topologie auf $\mathrm{sp}(M)$; es gilt nämlich

$$\mathrm{sp}(M) = \mathrm{U}(R), \qquad \varnothing = \mathrm{U}(\{0\}), \tag{1}$$

$$\mathrm{U}(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{U}(\mathfrak{b}) = \mathrm{U}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \text{ für alle Ideale } \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \text{ in } R, \tag{2}$$

$$\bigcup_{i \in I} \mathrm{U}(\mathfrak{a}_i) = \mathrm{U}(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i) \text{ für jede Familie von Idealen } (\mathfrak{a}_i)_{i \in I} \text{ in } R. \tag{3}$$

Der zweite Schritt in Stones Beweis besteht also darin, einer Booleschen Algebra einen topologischen Raum $(\mathrm{sp}(M), \mathcal{O}_M)$ zuzuordnen (das sogenannte *Spektrum*). Dieser Raum ist (auch für nicht-boolesche Ringe) quasi-kompakt, und zudem lässt sich jede offene Menge $A \subset \mathrm{sp}(M)$ als Vereinigung von offen-abgeschlossenen Teilmengen schreiben. Sei für diese zweite Aussage $r \in R$ ein beliebiges Element, und man betrachte das Ideal $\mathrm{I}(r) := \{r \cdot s \mid s \in R\}$; die dazugehörige offene Menge $\mathrm{U}(\mathrm{I}(r)) \subset \mathrm{sp}(M)$ ist zugleich abgeschlossen, weil das Komplement nichts anderes als $\mathrm{U}(\mathrm{I}(r+1))$ ist. Aber nun gilt für jede offene Teilmenge $A = U(\mathfrak{a}) \subset \mathrm{sp}(M)$, $\mathfrak{a}$ ein Ideal, offensichtlich:

$$A = \mathrm{U}(\mathfrak{a}) = \mathrm{U}(\sum_{r \in \mathfrak{a}} I(r)) = \bigcup_{r \in \mathfrak{a}} \mathrm{U}(I(r)),$$

die letzte Gleichheit wegen (3).

Ist umgekehrt $A \subset \mathrm{sp}(M)$ eine offen-abgeschlossene Teilmenge, so lässt sie sich nach dem eben Gezeigten schreiben als Vereinigung der Form $A = \bigcup_{r \in I} \mathrm{U}(I(r))$ für eine Teilmenge $I \subset R$; aber die Quasi-Kompaktheit von $\mathrm{sp}(M)$ und die Abgeschlossenheit von A implizieren, dass eine endliche Teilmenge $J \subset I$ existiert mit

$$A = \bigcup_{r \in J} \mathrm{U}(I(r)) = \mathrm{U}(\sum_{r \in J} I(r)) = \mathrm{U}(I(s)),$$

wobei $s = \sum_{r \in J} r \in R$. Somit sind die offen-abgeschlossenen Teilmengen von $\mathrm{sp}(M)$ genau die Teilmengen $I(r)$ für $r \in R$.

Nun sind die offen-abgeschlossenen Teilmengen in jedem topologischen Raum bezüglich endlicher Vereinigung, endlichen Durchschnitts und Komplementbildung offensichtlich abgeschlossen; zudem sind $\varnothing$ und $\mathrm{sp}(M)$ offen-abgeschlossen. Aber dies bedeutet, dass sie eine Boolesche Algebra $\mathcal{S}(M)$, genauer eine Mengenalgebra, bilden. Die Zuordnung

$$M = R \ni r \longmapsto U(I(r)) \in \mathcal{S}(M)$$

ist wegen (1)–(3) ein Morphismus von Booleschen Algebren; man sieht leicht, dass es sich gar um einen *Iso*morphismus handelt. Der Stonesche Darstellungssatz besagt also kurz, dass jede Boolesche Algebra isomorph ist zur Mengenalgebra der offen-abgeschlossenen Teilmengen eines topologischen Raumes (des Spektrums des assoziierten Ringes).

Aus Platzgründen bloss erwähnen möchte ich noch die Tatsache, dass ein Morphismus von Booleschen Algebren $M \to N$ einen „Morphismus“ von topologischen Räumen $\mathrm{sp}(N) \to \mathrm{sp}(M)$ induziert,[3] und ein solcher wiederum einen Morphismus von Booleschen Algebren $\mathcal{S}(N) \to \mathcal{S}(M)$. Diese beiden Zuordnungen definieren dann eine „duale Äquivalenz“ zwischen der Kategorie der Booleschen Algebren und der Kategorie der „Stone-Räume“. Wenn man die Bedingungen an Boolesche Algebren abschwächt, also allgemeinere Partialordnungen betrachtet, so erhält man ebenfalls duale Äquivalenzen „vom Stone-Typ“, jedoch mit Kategorien allgemeinerer topologische Räume.[4]

DIAGONALISIERUNG (S. 50–55)

Vielleicht zum ersten Mal wurde die Diagonalisierungsmethode in der Mathematik von Georg Cantor in Cantor (1890/91) verwendet; im Wesentlichen beweist er dort, dass die Menge der zahlentheoretischen Funktionen (d. h. Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$) nicht abzählbar ist, indem er zu jeder abzählbaren Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von zahlentheoretischen Funktionen eine neue zahlentheoretische Funktion χ definiert, welche mit keinem der f_i identisch ist. Die Methode zur Konstruktion dieses χ ist eben die Diagonalisierung: Man stelle sich die gegebene Funktionenfolge in einer „unendlichen“ Tabelle aufgelistet vor:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\
\hline
f_0 & f_0(0) & f_0(1) & f_0(2) & f_0(3) & \cdots \\
f_1 & f_1(0) & f_1(1) & f_1(2) & f_1(3) & \cdots \\
f_2 & f_2(0) & f_2(1) & f_2(2) & f_2(3) & \cdots \\
f_3 & f_3(0) & f_3(1) & f_3(2) & f_3(3) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

[3] Ein Morphismus zwischen topologischen Abbildungen heisst *stetige Abbildung* und wird im Abschnitt zu Homotopien definiert.

[4] Vgl. Johnstone (1982)

Die Diagonale dieser Tabelle definiert nun eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(i) = f_i(i)$. f hat die Eigenschaft, dass es mit jedem der f_i an mindestens einer Stelle übereinstimmt (mit f_i an der Stelle i). Dies bedeutet jedoch, dass wir f nur an jeder Stelle zu ändern brauchen, um eine Funktion zu erhalten, welche mit keinem der f_i übereinstimmt:

> Ist d eine zahlentheoretische Funktion ohne Fixpunkte,[5] so ist $\chi := d \circ f$ wie gewünscht.

In der Tat, angenommen $\chi = f_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$f_i(i) = \chi(i) = d \circ f(i) = d(f_i(i)),$$

ein Widerspruch zur Annahme, dass d fixpunktfrei ist.

Dieses Argument lässt sich ganz einfach auf Äquivalenzrelationen verallgemeinern. Eine Teilmenge $R \subset \mathbb{N}^2$ heisst *Äquivalenzrelation*, falls für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $(a, a) \in R$;
(ii) falls $(a, b) \in R$, so auch $(b, a) \in R$;
(iii) falls $(a, b), (b, c) \in R$, so auch $(a, c) \in R$.

Wir schreiben nun $a \sim b$ für $(a, b) \in R$.

> Ist d eine zahlentheoretische Funktion mit $d(i) \nsim i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so gilt $\chi := d \circ f \nsim f_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Umgekehrt: $\chi \sim f_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ hat $d(f_i(i)) \sim f_i(i)$ zur Folge.[6]

Nun kommen wir zur Diagonalisierung im Gödelschen Unvollständigkeitssatz; aus Platzgründen kann der erste Schritt des Beweises, die „Gödelisierung der Syntax", hier nicht detailliert behandelt werden. Ich will nur – auch zum Zwecke terminologischer Vereinbarungen – das Wichtigste dazu erwähnen.[7]

Ist T ein formales System wie in 1.B.2, in dem gewisse (hier nicht genauer spezifizierte) zahlentheoretische Sätze ausgedrückt und bewiesen werden können, so kann ein Grossteil der Syntax von T innerhalb von T selbst „kodiert" werden:

- Jedem wohlgeformten Ausdruck ψ wird eine eindeutige Zahl $\ulcorner\psi\urcorner \in \mathbb{N}$ zugeordnet (seine *Gödel-Zahl*).

[5] Dies bedeutet $d(i) \neq i$ für alle $i \in \mathbb{N}$; zum Beispiel kann man $d(i) = i + 1$ wählen.

[6] $\chi \sim f_i$ bedeutet natürlich: Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $\chi(k) \sim f_i(k)$.
Der Beweis der Aussage ist ganz einfach: $d(f_i(i)) = \chi(i) \sim f_i(i)$.

[7] Im Folgenden wird nur ein sehr spezieller Fall des Diagonalisierungslemmas diskutiert (und auch dieser nur sehr informell); das Ziel besteht hauptsächlich darin, die Parallele zum obigen Argument Cantors aufzuzeigen.

- Für syntaktische Eigenschaften wie „– ist eine Variable", „– ist ein wohlgeformter Ausdruck", … existieren Prädikate $\mathtt{var}(x)$, $\mathtt{wff}(x)$, … der Sprache von T, welche folgendem „Übersetzungsschema" gehorchen:

  Ist $n \in \mathbb{N}$ die Gödel-Zahl einer Variable (eines wohlgeformten Ausdrucks, …), so existiert in T eine Ableitung der Formel $\mathtt{var}(\underline{n})$, symbolisch:

  $$T \vdash \mathtt{var}(\underline{n}) \quad (T \vdash \mathtt{wff}(\underline{n}), \dots);$$

  hier bezeichnet $\underline{n}$ den Term in der Sprache von T, der für die Zahl n steht.

  Und ist $n \in \mathbb{N}$ nicht die Gödel-Zahl einer Variable (eines wohlgeformten Ausdrucks, …), so $T \vdash \neg\mathtt{var}(\underline{n})$ $(T \vdash \neg\mathtt{wff}(\underline{n}), \dots)$.

- Es gibt eine Funktion $s : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ und einen Term $\mathtt{s}$ mit zwei freien Variablen in der Sprache von T mit der folgenden Eigenschaft: Ist n die Gödel-Zahl einer Formel ψ mit einer freien Variable, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

  $$s(n,k) = \ulcorner\psi(\underline{k})\urcorner, \qquad T \vdash \mathtt{s}(\underline{n},\underline{k}) = \underline{s(n,k)}.$$

Wir wählen nun als Äquivalenzrelation $\{(\ulcorner\psi_1\urcorner, \ulcorner\psi_2\urcorner) \in \mathbb{N}^2 \mid T \vdash \psi_1 \leftrightarrow \psi_2\}$ und setzen $f_i(k) = s(i,k)$. Für eine beliebige Formel ψ in T mit einer freien Variable sei

$$d(k) = \ulcorner\psi(\underline{k})\urcorner, \quad \theta = \psi(\mathtt{s}(x,x)), \quad i = \ulcorner\theta\urcorner, \quad \varphi = \psi(\mathtt{s}(\underline{i},\underline{i})).$$

Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\chi(k) := d(f_k(k)) = d(s(k,k)) = \ulcorner\psi(\underline{s(k,k)})\urcorner \sim \ulcorner\psi(\mathtt{s}(\underline{k},\underline{k}))\urcorner = \ulcorner\theta(\underline{k})\urcorner = s(i,k) = f_i(k),$$

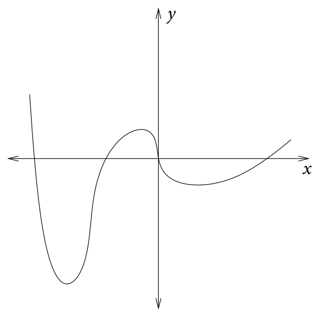
also $\chi \sim f_i$. Nach dem oben gezeigten „verallgemeinerten" Cantorschen Diagonalargument folgt $d(f_i(i)) \sim f_i(i)$, d. h.

$$T \vdash \psi(\underline{s(i,i)}) \leftrightarrow \psi(\mathtt{s}(\underline{i},\underline{i})), \qquad \text{oder} \qquad T \vdash \psi(\underline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \leftrightarrow \varphi.$$

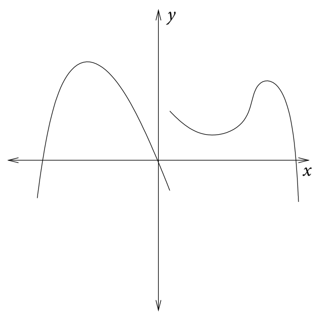
Wir haben das Diagonalisierungslemma bewiesen.[8]

[8] Diesen Beweis des Diagonalisierungslemmas habe ich beim Logiker Wilfried Buchholz gelernt.

Homotopie (S. 55–58)



(a) f stetig



(b) f nicht stetig

Abb. 1: Graph von $f(x) = y$

Wie im zweiten Kapitel erwähnt, gehört der Begriff einer Homotopie zur Topologie; der grundlegende Begriff der Topologie, derjenige eines topologischen Raumes, wurde bereits im Abschnitt zur Stone-Dualität eingeführt. Man nennt nun eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *stetig*, wenn das Urbild offener Mengen offen ist, d. h. wenn für alle $B \in \mathcal{O}_Y$ auch $f^{-1}(B) \in \mathcal{O}_X$ ist. Zum Beispiel ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von den reellen Zahlen in sich selbst (mit der „Standard"-Topologie) genau dann stetig, wenn ihr Graph in der reellen Ebene keine „Sprünge" aufweist (siehe Abbildung 1).

Ist $(X, \mathcal{O})$ ein beliebiger topologischer Raum, dann nennt man eine *(stetige) Kurve* (oder einen *(stetigen) Pfad*) in X eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ vom Intervall $[0,1]$ (mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}$) nach X. $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$ heissen *Anfangs-* beziehungsweise *Endpunkt* von γ. Man stellt sich also vor, dass γ den Anfangs- mit dem Endpunkt „verbindet" (siehe Abbildung 2).

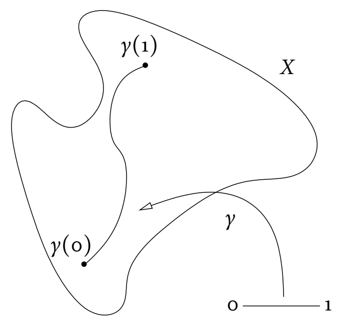


Abb. 2: Kurve in X

Was bedeutet es nun, dass man eine Kurve „variieren" lässt? Ist $\tilde{\gamma} : [0,1] \to X$ eine weitere Kurve mit demselben Anfangs- bzw. Endpunkt wie γ, dann ist eine *Homotopie* von γ nach $\tilde{\gamma}$ (bei festen Anfangs- und Endpunkten) eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ mit

(i) $H(0,s) = \gamma(s)$,

(ii) $H(1,s) = \tilde{\gamma}(s)$,

(iii) $H(t,0) = \gamma(0)$ und $H(t,1) = \gamma(1)$

für alle $s, t \in [0,1]$. Schreibt man h_t für die Abbildung $[0,1] \to X$, $s \mapsto H(t,s)$, $(0 \leq t \leq 1)$, so kann man die Bedingungen (i) bis (iii) auch folgendermassen schreiben:

(i) $h_0 = \gamma$;
(ii) $h_1 = \tilde{\gamma}$;
(iii) h_t ist eine Kurve mit Anfangspunkt $\gamma(0)$ und Endpunkt $\gamma(1)$ für alle $t \in [0,1]$.

Daraus ist ersichtlich, dass H eine „stetige Familie“ von Kurven von $\gamma(0)$ nach $\gamma(1)$ definiert; den Parameter t in h_t hat man sich dabei als „Zeit“ vorzustellen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ stimmt H mit γ überein; dann findet eine stetige Deformation der Kurve statt, bis H zum Zeitpunkt $t = 1$ mit $\tilde{\gamma}$ übereinstimmt: γ wurde zu $\tilde{\gamma}$ deformiert (siehe Abbildung 3).

Nichts verhindert die Verallgemeinerung des Homotopiebegriffs auf beliebige Abbildungen (also nicht notwendigerweise Kurven): Ist $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein weiterer topologischer Raum und $A \subset Z$ ein Teilraum, so ist für zwei stetige Abbildungen $f, g : Z \to X$ mit $f\restriction_A = g\restriction_A$[9] eine *Homotopie relativ A* von f nach g eine stetige Abbildung $H : Z \times [0,1] \to X$ mit den Eigenschaften

(i) $h_0 = f$;
(ii) $h_1 = g$;
(iii) $h_t\restriction_A = f\restriction_A$ für alle $t \in [0,1]$.[10]

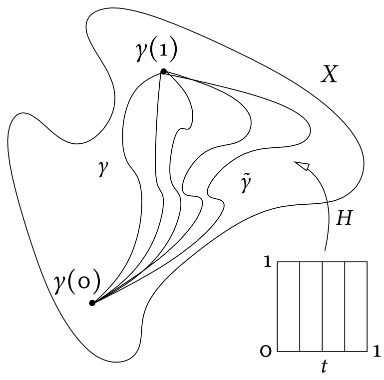


Abb. 3: Homotopie von γ nach $\tilde{\gamma}$

(Die oben diskutierte Homotopie zwischen Kurven ist dann der Spezialfall $Z = [0,1]$ und $A = \{0,1\}$.) Es ist nicht schwer zu zeigen, dass die Festsetzung

$$f \sim_A g \text{ genau dann, wenn es eine Homotopie relativ } A \text{ von } f \text{ nach } g \text{ gibt}$$

eine Äquivalenzrelation[11] auf den Abbildungen $f, g : Z \to X$ definiert. Zwei Abbildungen $f, g : Z \to X$ mit $f \sim_A g$ werden *homotop relativ A* genannt. Es bezeichne nun $[f]_A$ die Menge der zu f relativ A homotopen Abbildungen, die *Homotopieklasse von f relativ A*. Ist $x \in X$ ein beliebiger Punkt, und ist $s \in S^n$ ein beliebiger Punkt der

[9] $f\restriction_A$ bezeichnet die *Einschränkung* von f auf A, d. h. $f\restriction_A : A \to X$, $f\restriction_A(x) = f(x)$ für alle $x \in A$.

[10] Ich habe noch nicht gesagt, welche Topologie der Raum $Z \times [0,1]$ trägt; man kann zeigen, dass es eine „kleinste“ („schwächste“) Topologie auf dieser Menge gibt, sodass die beiden kanonischen Abbildungen $Z \times [0,1] \to Z$, $Z \times [0,1] \to [0,1]$ stetig sind. Diese Topologie ist üblicherweise gemeint, wenn man von einem Produkt von topologischen Räumen spricht.

[11] Siehe vorangehenden Abschnitt

n-Sphäre[12], so heisst

$$\pi_n(X,x) := \{[f]_{\{s\}} \mid f : S^n \to X, f(s) = x\}$$

die n-te *Homotopiegruppe von X mit Basispunkt x*. (Natürlich trägt sie diesen Namen, weil man (für $n > 0$) eine natürliche Gruppenstruktur (ähnlich wie im ersten Abschnitt dieses Anhangs) definieren kann.) Beim Fall $n = 1$ handelt es sich um die *Fundamentalgruppe von X mit Basispunkt x*.

[12] $S^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ mit der Teilraumtopologie.

Literaturverzeichnis

H. Amann und J. Escher (2006): *Analysis I*, Birkhäuser Verlag, Basel – Boston – Berlin, 3. Auflage

W. Aspray und P. Kitcher (Hg.) (1988): *History and Philosophy of Modern Mathematics*, *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, Band XI, University of Minnesota Press, Minneapolis

M. Atiyah (1978): "The Unity of Mathematics", *Bulletin of the London Mathematical Society* 10, S. 69–76

J. Avigad (2006): "Mathematical Method and Proof", *Synthese* 153, Nr. 1, S. 105–159

J. Barwise (1989): "Mathematical Proofs of Computer System Correctness", *Notices of the American Mathematical Society* 36, S. 844–51

P. Benacerraf (1965): "What Numbers Could not Be", *The Philosophical Review* 74, Nr. 1, S. 47–73

—— (1973): "Mathematical Truth", *The Journal of Philosophy* 70, Nr. 19, S. 661–679

E. Bishop (1967): *Foundations of Constructive Analysis*, Academic Press, New York

G. S. Boolos (1993): *The Logic of Provability*, Cambridge University Press, Cambridge

G. S. Boolos, J. P. Burgess und R. Jeffrey (2002): *Computability and Logic*, Cambridge University Press, Cambridge, 4. Auflage

N. Bourbaki (1950): "The Architecture of Mathematics", *American Mathematical Monthly* 57, Nr. 4, S. 221–232

—— (1970): *Théorie des Ensembles*, Diffusion CCLS, Paris, neue Auflage

H. Breger (1990): „Know-How in der Mathematik. Mit einer Nutzanwendung auf die unendlichkleinen Grössen“, in: D. D. Spalt (Hg.), *Rechnen mit dem Unendlichen - Beiträge zur Entwicklung eines kontroversen Gegenstandes*, S. 43–58, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin

—— (1992): "Tacit Knowledge in Mathematical Theory", in: Echeverria et al. (1992), S. 79–90

—— (2000): "Tacit Knowledge and Mathematical Progress", in: Grosholz und Breger (2000), S. 221–30

P. BUNDSCHUH (2002): *Einführung in die Zahlentheorie*, Springer, Berlin, Heidelberg, 5., überarbeitete und aktualisierte Auflage

J. P. BURGESS (1992): "Proofs about Proofs: A Defense of Classical Logic", in: Detlefsen (1992), S. 8–23

G. CANTOR (1890/91): „Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* S. 75–8

R. CARNAP (1934): *Logische Syntax der Sprache*, Springer, Wien

J. CORCORAN (1973): "Gaps Between Logical Theory and Mathematical Practice", in: M. BUNGE (Hg.), *Methodological Unity of Science*, S. 23–50, Reidel, Dordrecht

D. CORFIELD (2003): *Towards a Philosophy of Real Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge

H. CURRY (1963): *Foundations of Mathematical Logic*, McGraw-Hill, New York

P. J. DAVIS (1972): "Fidelity in Mathematical Discourse", *American Mathematical Monthly* 79, S. 252–262, wieder abgedruckt in Tymoczko ([1986] 1998)

P. J. DAVIS UND R. HERSH (1981): *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston

J. W. DAWSON, JR. (1984): "The Reception of Gödel's Incompleteness Theorems", *Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association* 1984, S. 253–271

R. DE MILLO, R. LIPTON UND A. PERLIS (1979): "Social Processes and Proofs of Theorems and Programs", *Communications of the ACM* 22, Nr. 5, S. 271–280

M. DETLEFSEN (Hg.) (1992): *Proof, Logic and Formalization*, Routledge, London & New York

J. DIEUDONNÉ (1969): « Richard Dedekind », *Encyclopedia Universalis* 5, S. 373–5

J. DIEUDONNÉ (Hg.) (1978*a*): *Abrégé d'Histoire des Mathématiques 1700–1900*, Hermann, Paris

J. Dieudonné (1978*b*): « L'analyse mathématique au XVIIIe siècle », in: Dieudonné (1978*a*), S. 19–53

W. G. Dwyer und J. Spalinski (1995): "Homotopy Theories and Model Categories", in: I. M. James (Hg.), *Handbook of Algebraic Topology*, S. 73–126, Elsevier, Amsterdam

J. Echeverria, A. Ibarra und T. Mormann (Hg.) (1992): *The Space of Mathematics - Philosophical, Epistemological, and Historical Explorations*, Grundlagen der Kommunikation und Kognition, Walter de Gruyter, Berlin New York

A. Ehrenfeucht und S. Feferman (1960): "Representability of Recursively Enumerable Sets in Formal Theories", *Archiv für Mathematische Logik und Grundlagenforschung* 5, S. 37–41

P. Ernest (1998): *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, State University of New York, Albany, N.Y.

L. Euler (1992): *Opera Omnia*, *1*, Band 14, Birkhäuser

S. Feferman (1964): "Systems of Predicative Analysis", *The Journal of Symbolic Logic* 29, S. 1–30

J. Floyd (2001): "Prose versus Proof: Wittgenstein on Godel, Tarski and Truth", *Philosophia Mathematica* 9, Nr. 3, S. 280–307

G. Frege (1879): *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Louis-Nebert, Halle

—— (1893): *Grundgesetze der Arithmetik*, Band 1, Hermann Pohle, Jena

E. M. Friedlander, M. Rapoport und A. Suslin (2003): "The Mathematical Work of the 2002 Fields Medalists", *Notices of the American Mathematical Society* 50, Nr. 2, S. 212–217

H. Gaifman (2006): "Naming and Diagonalization, from Cantor to Godel to Kleene", *Logic Journal of IGPL* 14, Nr. 5, S. 709–728

R. Garnier und J. Taylor (1996): *100% Mathematical Proof*, Wiley, Chichester

K. Gödel (1931): „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I", *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37, S. 173–198

N. D. Goodman (1979): "Mathematics as an Objective Science", *American Mathematical Monthly* 86, Nr. 7, S. 540–551, wieder abgedruckt in Tymoczko ([1986] 1998)

J. V. GRABINER (1974): “Is Mathematical Truth Time-Dependent?”, *American Mathematical Monthly* 81, Nr. 4, S. 354–65

E. GROSHOLZ (1980): “Descartes’ Unification of Algebra and Geometry”, in: S. GAUKOGER (Hg.), *Descartes: Philosophy, Mathematics and Physics*, S. 156–68, Harvester Press, Brighton

—— (1984): “Leibniz’ Unification of Geometry with Algebra and Dynamics”, *Studia Leibnitiana Sonderheft* 13, S. 198–208

—— (1985): “Two Episodes in the Unification of Logic and Topology”, *The British Journal for the Philosophy of Science* 36, Nr. 2, S. 147–157

E. GROSHOLZ UND H. BREGER (Hg.) (2000): *The Growth of Mathematical Knowledge*, *Synthese Library*, Band 289, Kluwer, Dordrecht, Boston, London

P. HEAWOOD (1890): “Map-Colour Theorems”, *Quarterly Journal of Mathematics* 24, S. 322–338

B. HEINTZ (2000): *Die Innenwelt der Mathematik - Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*, Springer, Wien New York

R. HERSH (1979): “Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics”, *Advances in Mathematics* 31, S. 31–50, wieder abgedruckt in Tymoczko ([1986] 1998)

—— (1993): “Proving is Convincing and Explaining”, *Educational Studies in Mathematics* 24, Nr. 4, S. 389–399

D. HILBERT (1922): „Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung.“, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 1, S. 157–177

P. G. HINMAN (2005): *Fundamentals of Mathematical Logic*, A. K. Peters, Wellesley, Massachussets

G. HIRSCH (1978): « Topologie », in: Dieudonné (1978*a*), S. 211–266

J. HØYRUP (2005): “Tertium Non Datur: On Reasoning Styles In Early Mathematics”, in: Mancosu et al. (2005), S. 91–121

D. HUME ([1739] 1973): *A Treatise of Human Nature*, Oxford University Press, Oxford

A. JACKSON (2004): “Comme Appelé du Néant—As If Summoned from the Void: The Life of Alexandre Grothendieck”, *Notices of the American Mathematical Society* 51, Nr. 10, S. 1196–1212

P. JOHNSTONE (1982): *Stone Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge

P. Kitcher (1983): *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, New York Oxford

I. Kleiner (1991): „Rigor and Proof in Mathematics: A Historical Perspective“, *Mathematics Magazine* 64, Nr. 5, S. 291–314

M. Kline (1972): *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York Oxford

E. Knobloch (1980): „Einfluß der Symbolik und des Formalismus auf die Entwicklung des mathematischen Denkens“, *Berichte zur Wissenschaftsgeschichte* 3, S. 77–94

I. Lakatos (1976*a*): *Proofs and Refutations - The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, Cambridge

—— (1976*b*): “A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics?”, *The British Journal for the Philosophy of Science* 27, Nr. 3, S. 201–223, wieder abgedruckt in Tymoczko ([1986] 1998)

W. F. Lawvere ([1969] 2006): “Diagonal Arguments and Cartesian Closed Categories”, *Reprints in Theory and Applications of Categories* , Nr. 15, S. 1–13, ursprünglich erschienen 1969 in *Lecture Notes in Mathematics*, Band 92, S. 134–145, Springer

E. Livingston (1986): *The Ethnomethodological Foundations of Mathematics*, Studies in Ethnomethodology, Routledge & Kegan Paul, London

S. Mac Lane (1981): *Mathematics: Form and Function*, Springer, New York

—— (1982): “Proof, Truth, and Confusion. The 1982 Nora and Edward Ryerson Lecture at The University of Chicago”, Wieder abgedruckt in: *Solstice: An Electronic Journal of Geography and Mathematics* 2, Nr. 2, Ann Arbor: Institute of Mathematical Geography, 1991

—— (1988): „Concepts and Categories in Perspective“, in: *A Century of Mathematics in America*, Band 1, S. 323–65, American Mathematical Society, Providence

—— (1992): “The Protean Character of Mathematics”, in: Echeverria et al. (1992), S. 3–13

D. A. MacKenzie (2001): *Mechanizing proof: Computing, Risk, and Trust*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts

P. Mancosu (Hg.) (2008): *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford University Press, New York

P. MANCOSU UND J. HAFNER (2005): "The Varieties of Mathematical Explanation", in: Mancosu et al. (2005), S. 215–50

P. MANCOSU, K. F. JØRGENSEN UND S. A. PEDERSEN (Hg.) (2005): *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, Synthese Library, Springer, Dordrecht

J.-P. MARQUIS (2006): "A Path to the Epistemology of Mathematics: Homotopy-Theory", in: J. FERREIRÓS UND J. J. GRAY (Hg.), *The Architecture of Modern Mathematics. Essays in History and Philosophy*, S. 239–260, Oxford University Press, Oxford

E. MENDELSON (1997): *Introduction to Mathematical Logic*, Chapman & Hall, London, 4. Auflage

P. MILNE (2007): "On Gödel Sentences and What They Say", *Philosophia Mathematica* 15, S. 193–226

J. MITCHEM (1981): "On the History and Solution of the Four-Color Map Problem", *The Two-Year College Mathematics Journal* 12, Nr. 2, S. 108–116

J. MITTELSTRASS (Hg.) (1995): *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*, Band 1, J.B. Metzler, Stuttgart

R. MONTAGUE (1962): "Theories Incomparable with Respect to Relative Interpretability", *The Journal of Symbolic Logic* 27, Nr. 2, S. 195–211

H. MORAVEC (1988): *Mind Children. The Future of Robot and Human Intelligence*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts

L. J. MORDELL (1959): *Reflections of a Mathematician*, Canadian Mathematical Congress, Montreal

F. MULLER (2001): "Sets, Classes, and Categories", *The British Journal for the Philosophy of Science* 52, Nr. 3, S. 539–573

S. PINKER (1994): *The Language Instinct*, Morrow, New York

M. POLANYI (1966): "The Logic of Tacit Inference", *Philosophy* 41, Nr. 155, S. 1–18

—— (1967): "Sense-Giving and Sense-Reading", *Philosophy* 42, Nr. 162, S. 301–325

—— (1985): *Implizites Wissen*, Suhrkamp, Frankfurt am Main, Übersetzung von Horst Brühmann, Titel der Originalausgabe: *The Tacit Dimension* (1966), Doubleday & Company, Inc., Garden City, New York

G. Pólya (1954): *Induction and Analogy in Mathematics*, *Mathematics and Plausible Reasoning*, Band 1, Princeton University Press, Princeton, New Jersey

H. Putnam (1975): "What is Mathematical Truth?", *Historia Mathematica* 2, S. 529–543, wieder abgedruckt in Tymoczko ([1986] 1998)

Y. Rav (1999): "Why Do We Prove Theorems?", *Philosophia Mathematica* 7, Nr. 1, S. 5–41

—— (2007): "A Critique of a Formalist-Mechanist Version of the Justification of Arguments in Mathematicians' Proof Practices", *Philosophia Mathematica* 15, Nr. 3, S. 291–320

H. Reichenbach (1938): *Experience and Prediction*, University Of Chicago Press, Chicago

M. Resnik (1992): "Proof As a Source of Truth", in: M. Detlefsen (Hg.), *Proof and Knowledge in Mathematics*, S. 6–32, Routledge, London & New York

B. Rosser (1939): "An Informal Exposition of Proofs of Godel's Theorems and Church's Theorem", *The Journal of Symbolic Logic* 4, Nr. 2, S. 53–60

G.-C. Rota (1997): "The Phenomenology of Mathematical Proof", *Synthese* 111, Nr. 2, S. 183–196

B. Rotman (2006): "Toward a Semiotics of Mathematics", in: R. Hersh (Hg.), *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*, Springer, New York

G. Ryle (1949): *The Concept of Mind*, Hutchinson's University Library, London

J. H. Silverman (1986): *The Arithmetic of Elliptic Curves*, *Graduate Texts in Mathematics*, Band 106, Springer, New York

C. Smoryński (1981): "Fifty Years of Self-Reference in Arithmetic", *Notre Dame Journal of Formal Logic* 22, Nr. 4, S. 357–374

—— (1982): "Fixed Point Algebras", *Bulletin of the American Mathematical Society, New Series* 6, Nr. 3, S. 317–356

—— (1985): *Self-Reference and Modal Logic*, Springer, New York

M. Steiner (1975): *Mathematical Knowledge*, Contemporary Philosophy, Cornell University Press, Ithaca and London

M. H. Stone (1936): "The Theory of Representation for Boolean Algebras", *Transactions of the American Mathematical Society* 40, Nr. 1, S. 37–111

—— (1937): "Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology", *Transactions of the American Mathematical Society* 41, Nr. 3, S. 375–481

W. P. THURSTON (1994): "On Proof and Progress in Mathematics", *Bulletin of the American Mathematical Society, New Series* 30, S. 161–177, wieder abgedruckt in Tymoczko ([1986] 1998)

R. TIESZEN (1992): "What is a Proof?", in: Detlefsen (1992)

R. S. TRAGESSER (1992): "Three Insufficiently Attended to Aspects of Most of Mathematical Proofs: Phenomenological Studies", in: Detlefsen (1992), S. 162–198

T. TYMOCZKO (1979): "The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance", *The Journal of Philosophy* 76, Nr. 2, S. 57–83

T. TYMOCZKO (Hg.) ([1986] 1998): *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey

D. VAN DALEN UND A. S. TROELSTRA (1998): *Constructivism In Mathematics*, Band 1, North-Holland, Amsterdam

R. VANDEN EYNDE (1999): "Development of the Concept of Homotopy", in: I. M. JAMES (Hg.), *History of Topology*, S. 65–102, Elsevier, Amsterdam

A. WEIL (1979): « De la Métaphysique aux Mathématiques », in: *Oeuvres scientifiques*, Band 2, S. 408–12, Springer, Berlin, Heidelberg

F. WIEDIJK (2008): "Formal Proof—Getting Started", *Notices of the American Mathematical Society* 55, Nr. 11, S. 1408–1414

—— (nicht publiziert): „The de Bruijn factor", erhältlich von: `http://www.cs.kun.nl/~freek/notes`, Stand: 27. Februar 2010

N. S. YANOFSKY (2003): "A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points", *The Bulletin of Symbolic Logic* 9, Nr. 3, S. 362–386